Geometría algebraica I

3 Junio

Ayer: Grassmanniana $G(1,3)$

* es variedad
* es dim 4
* es suave
* es irreducible

Hoy: Variedades Birracionales.

—— // —— // ——

Recordar: $V \subseteq \mathbb{A}^n$ variedad afín irred.

Un morfismo racional $f: V \dashrightarrow \mathbb{A}^m$ es $f = (f_0, \dots, f_m)$

f_j's $\in \mathbb{F}(V)$.

$$\mathrm{dom}(f) = \{x \in V \mid f \text{ es regular en } x\}$$

$f: V \dashrightarrow W \subseteq \mathbb{A}^m$ Propiedades de arriba y

$$f(\mathrm{dom}(f)) \subseteq W.$$

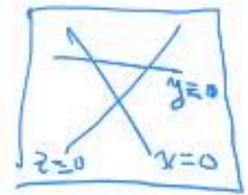
$V \subseteq \mathbb{P}^n$ variedad proyectiva irred.

morfismo racional $\quad f: V \dashrightarrow \mathbb{P}^m \qquad f(p) = [f_0(p) : \cdots : f_m(p)]$

homogéneos de grado d.

Eg: $\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$

$[x:y:z] \mapsto \left[\frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z}\right]$ ← f no está definido $\{xyz = 0\}$



$= [yz : xz : xy]$ ← $V(\underbrace{xy, xz, yz})$

¡tres pts!

$f: V \dashrightarrow W \subseteq \mathbb{P}^n$ morfismo racional:

* $f: V \dashrightarrow \mathbb{P}^n$
* $f(\mathrm{dom} f) \subseteq W$

Def: V e W variedades project. irreducibles

$\cup\!|$ $\quad$ $\cup\!|$

U_1 $\quad$ U_2 abiertos. Un morfismo

$F: U_1 \longrightarrow U_2$ es un

morfismo racional $f: V \dashrightarrow W$ tal

$U_1 \subseteq dom(f)$

$f(dom(f)) \subseteq U_2$.

F es isomorfismo si su inverso existe.

Def.- W, V variedades proyectivas irreducibles

$V \dashrightarrow W$ se dicen biracionales si

$\exists$ $\underset{U_1}{\cup\!|}$ $\quad$ $\underset{U_2}{\cup\!|}$ abiertos isomorfos.

Eg: Explosión de $\mathbb{A}^2$ en ~~un punto~~. el origen

es una superficie

$$Bl_0\mathbb{A}^2 = I = \{(x, L_x)\} = \{(x,y), [a:b] \mid ay = bx\}$$

($L_x = \overline{0x}$)

$$\begin{array}{c} Bl_0\mathbb{A}^2 \\ \downarrow \pi \leftarrow \text{morfismo} \\ \mathbb{A}^2 \end{array}$$

morfismo racional G

$(1,3)$

$$I \subseteq \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1_{[a:b]}$$

$$\begin{array}{ccc} I & & \\ \downarrow \pi & & \downarrow \\ \mathbb{A}^2 & & \mathbb{A}^2 \end{array}$$

Propiedades:

1) es 1-1 excepto en en $\pi^{-1}(0)$

2) $\pi^{-1}(0) = \mathbb{P}^1$

$$Bl_0\mathbb{A}^2 \setminus \pi^{-1}(0) \cong \mathbb{A}^2 \setminus \{0\}$$

$Bl_0\mathbb{A}^2$ y $\mathbb{A}^2$ son birracionales (No son isomorfos)

$$x \longmapsto (x, L_x)$$

$$\mathbb{A}^2 \longrightarrow \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1 \qquad U_2 = g(U_1)$$

$$\cup\!\!|$$

$$U_1 = \mathbb{A}^2 \setminus \{0\} \xrightarrow[g]{\cong} U_2 \subseteq \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1 \quad \text{isomorfismo}$$

$$y \; \mathrm{i} \; \overline{g(U_1)} = Bl_0\mathbb{A}^2 \; !$$