Geometría algebraica I

4 de Junio

Ayer: Aplicación racionales
(Equiv Birracional)

Hoy: Explosiones

—— // ——

Recordar:

$$\begin{tikzcd} Bl_0 \mathbb{A}^2 \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{A}^2 \arrow[u, bend left, dashed, "g"] \end{tikzcd}$$

$Bl_0 \mathbb{A}^2 = \left\{ (x, L_x) \;\middle|\; \begin{array}{l} x \in \mathbb{A}^2 \\ L_x = \overline{0x} \end{array} \right\}$

$= \{ xa - by = 0 \} \subseteq \mathbb{A}^2_{(x,y)} \times \mathbb{P}^1_{[a:b]}$

Morfismo π birracional

$\left.\begin{array}{l} g|_{\mathbb{A}^2 \setminus \{0\}} \\ \text{isomorfismo} \end{array}\right\}$ $\overline{g(\mathbb{A}^2 \setminus \{0\})} \subseteq \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$

$\overline{g(\mathbb{A}^2 \setminus \{0\})} = Bl_0 \mathbb{A}^2.$

Resolver singularidades aisladas de CURVAS

$$\begin{tikzcd} Bl_p \arrow[d, "\pi"] & \supseteq & \tilde{C} \arrow[d] \\ \mathbb{P}^2 & \supseteq & C \end{tikzcd}$$

donde $\tilde{C} = \overline{g(C \setminus \{p\})} \subseteq Bl_p \mathbb{P}^2$.

irreducible
singular en p

π es un morfismo birracional

$$= Bl_p \mathbb{P}^2 \setminus \pi^{-1}(p) \cong \underbrace{\mathbb{P}^2 \setminus \{p\}}_{}$$

$$V_2 \underset{g}{\overset{\cong}{\longleftarrow}} V_1$$

OBJETIVO: escribir ecuaciones de $\tilde{C}$

Cuando $\tilde{C}$ es suave, le llamamos Resolución de singularidades de C.

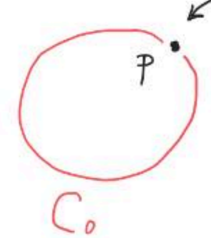
Pues 1) $\tilde{C} \xrightarrow[\pi]{} C$ donde $\tilde{C}$ es suave

2) π es un morfismo birracional.

Eg: $C_0 = \{ y^2 = x^4 + x + 1 \} \subseteq \mathbb{A}^2$ curva afín.
Suave en $\mathbb{A}^2$.

$$C = \{ y^2 z^2 - (x^4 + x z^3 + z^4) = 0 \} \subseteq \mathbb{P}^2_{[x:y:z]}.$$

$$C \setminus C_0 = C \cap \underbrace{\{z = 0\}}_{\substack{\text{Recta} \\ \text{al infinito} \\ \text{de } \mathbb{A}^2_{(x,y)}.}} = \mathrm{Var}(z, x^4) = [0:1:0] = P$$



$= C_0 \cup P$
$= C$.

¿es C suave? tenemos que decidir si C es suave en $\underline{P}$.

en la carta $\mathbb{A}^2_{(x,z)} = \{ y = 1 \}$

$$C_1 = \{ z^2 - (x^4 + x z^3 + z^4) = 0 \} \subseteq \underline{\mathbb{A}^2_{(x,z)}} \ni (0,0) = P$$

¿suave en $(0,0)$? $\underline{\text{No}}$ ¿Desingularización?

Nota: la multiplicidad de la singularidad es 2.
= el menor grado de un monomio de C_1.

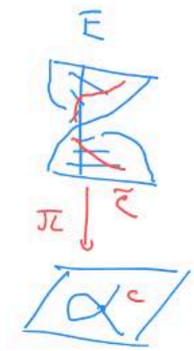
$$Bl_0 \mathbb{A}^2 = \{(x,z),[a:b] \mid ax - zb = 0\} \subseteq \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1 \xrightarrow{\pi} \mathbb{A}^2$$

$$\supseteq \{(x,z),[a:1] \mid ax = z\} \subseteq \mathbb{A}^2 \times \mathbb{A}^1$$

$$\pi^* C_1 = \{a^2x^2 - (x^4 + x\, a^3x^3 + a^4x^4) = 0\} \subseteq \mathbb{A}^2_{(x,a)} \subseteq Bl_0 \mathbb{A}^2$$

No es irreducible

$$= \{x^2 \underbrace{(a^2 - (x^2 + x^2a^3 + a^4x^2))}_{\tilde{C}_1} = 0\} \subseteq \mathbb{A}^2_{(x,a)} \subseteq Bl_0 \mathbb{A}^2$$

$\mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1 \supseteq$ 

Nemotecnia:

$\pi^* C_1 = 2E + \tilde{C}_1$ ¿es $\tilde{C}_1$ singular?

si C pasa por $(0,0) \Rightarrow \pi^* C_1$ es reducible:

$$\pi^* C_1 = k E + \tilde{C}$$

multiplicidad de C_1 en $(0,0)$

$\tilde{C}_1$ es singular en $(0,0)$

y la multiplicidad de $\tilde{C}_1$ en $(0,0)$ es 2

$$Bl_0 \mathbb{A}^2_{(x,a)} \xrightarrow{\pi_2} \mathbb{A}_{(x,a)}$$

$$\|$$

$$\{(x,a),[\alpha:\beta] \mid \alpha x - \beta a = 0\}$$

Carta
$\beta = 1$

$$\pi_2^* \tilde{C}_1 = \{\alpha^2 x^2 - (x^2 + x^2 \alpha^3 x^3 + \alpha^4 x^4 x^2) = 0\}$$

$$= \{x^2 \underbrace{(\alpha^2 - (1 + \alpha^3 x^3 + \alpha^4 x^4))}_{\tilde{\tilde{C}}_1} = 0\}$$

$$\begin{array}{c} \tilde{\tilde{C}} \\ \downarrow R \\ C_1 \end{array}$$

es la resolución de la singularidad de C_1.

Suave

$$\begin{tikzcd}
\tilde{\tilde{C}}_1 \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "R"] \arrow[d, phantom, sloped, "\subset"] & \tilde{C}_1 \arrow[r] \arrow[d, phantom, sloped, "\subset"] & C_1 \arrow[d, phantom, sloped, "\subset"] \\
Bl_0 \mathbb{A}^2 \arrow[r] & Bl_0 \mathbb{A}^2 \arrow[r, "\pi"] & \mathbb{A}^2
\end{tikzcd}$$