Geometría algebraica I

8 Junio (última semana de clases)

Ayer: Explosiones de $\mathbb{A}^2$ para
Resolver sing de curvas en $\mathbb{A}^2$.

Hoy: Continuación.

—//—//—

Notación:
$$\begin{tikzcd} Bl_0\mathbb{A}^2 \arrow[r, "\pi"] & \mathbb{A}^2 \arrow[l, dashed, bend left, "f"] \end{tikzcd}$$
explosión en el origen
i.e., π morfismo birracional.

π^*C = transformada total de C : reducible $kE+\tilde{C}$

$\tilde{C}$ = transformada estricta de C.

Eg. Tarea *?

$f: \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^4$ aplicación racional

$[x:y:z] \longmapsto [xz:yz:x^2:y^2:xy]$ (f no está definido en $[0\ 0\ 1]=P$)

tomando la carta de $\mathbb{P}^2 \supseteq \{z=1\}$

$\mathbb{A}^2 \subseteq \mathbb{P}^2$

$p=(0,0)$

¿Qué tiene que ver f con la explosión $Bl_p\mathbb{P}^2$?

f escrito en la carta $[z=1]$

$$f_0 : \mathbb{A}^2 \longrightarrow \mathbb{A}^4$$
$$(x,y) \longmapsto \left(\frac{1}{y}, \frac{1}{x}, \frac{x}{y}, \frac{y}{x}\right)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} cd - e^2 = 0 \\ ad - be = 0 \\ bc - ae = 0 \end{array}}$$

Ecuaciones de $\overline{\mathrm{Im}(f)}$

i.e.

$$I(\mathrm{Im}(f)) = \langle cd - e^2, ad - be, bc - ae \rangle \subseteq \mathbb{F}[a,b,c,d,e]$$

Ecuaciones de $\mathrm{Im}(f_0)$: $\left(\overline{\mathrm{Im}(f_0)}\right)$

$$cb - a = 0$$
$$ad - b = 0$$
$$cd - 1 = 0$$

$$\mathrm{Im}(f) = f(\mathbb{P}^2 \setminus \{p\}) \subseteq \mathbb{P}^4$$

Es claro que $E \subseteq \overline{\mathrm{Im}(f)}$

Escribamos: $E \subseteq \mathbb{P}^4$ como

$$\boxed{E = \mathrm{Var}(c,d,e)}$$

@Kenett

$$L_\infty := \{e = 0\} \subseteq \mathbb{P}^4_{[a:b:c:d:e]}$$

hiperplano.

Notar

$$L_\infty \cap \overline{\mathrm{Im}(f)} = E$$

donde

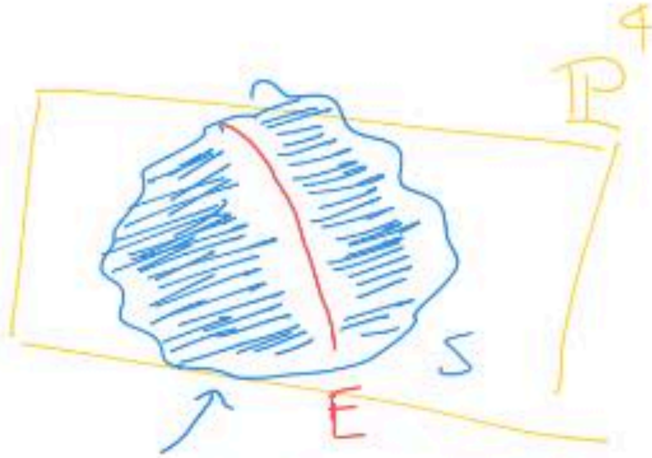
$$E = \mathrm{Var}(e, d, c) \subseteq \overline{\mathrm{Im}(f)}$$

$$\subseteq \mathbb{P}^4$$

¿ $E \subseteq \mathrm{Im}(f)$?

$$= \overline{\mathrm{Im}(f)}$$

$$S := \mathrm{Var}(cd - e^2, ae - bc, ad - be)$$



$\mathrm{Im}(f)$ pero

$$E \not\subseteq \mathrm{Im}(f)$$

Pese a que $E \subseteq \overline{\mathrm{Im}(f)}$

Notar que

$$\overline{f(\mathbb{R}^2 \setminus \{p\})} \supseteq E$$

donde había un punto ahora hay una curva

Entendiendo la curva

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, "\pi"'] & \subseteq \mathrm{Bl}_0 \mathbb{A}^2 \arrow[d, "\pi"] \arrow[r, "\tilde{f}_0"] & \mathbb{A}^4 \\ (0,0) & \in \mathbb{A}^2_{(x,y)} \arrow[ur, dashed, "f_0"'] & \end{tikzcd}$$

¿Existe el levantamiento $\tilde{f}_0$? sí

¿Ecuaciones de $\tilde{f}_0|_E(E)$?

Levantamiento $\tilde{f}_0$: $(x,y) \overset{\pi}{\longmapsto} \left(\frac{1}{y}, \frac{1}{x}, \frac{x}{y}, \frac{y}{x}\right)$ ← Expresión local de f

funciones regulares de $\mathbb{A}^2 \setminus \left\{ \begin{matrix} x=0 \\ \cup \\ y=0 \end{matrix} \right\}$

$$\mathbb{A}^2_{(x,\alpha)} \subseteq \mathrm{Bl}_0 \mathbb{A}^2 = \{ (x,y), [\alpha : \beta] \mid x\alpha - y\beta = 0 \}$$

en la carta $\beta = 1$

$y = x\alpha$

$$\mathbb{A}^2_{(x,\alpha)} \xrightarrow{\pi_0} \mathbb{A}^2_{(x,y)}$$

$$\pi_0^*\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{x\alpha} \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2_{(x,\alpha)}}(U)$$

$$\tilde{f}_0 = \pi_0 \circ f_0 \quad (x,\alpha) \longmapsto \left(\frac{1}{x\alpha}, \frac{1}{x}, \frac{x}{x\alpha}, \frac{x\alpha}{x}\right) = \left(\frac{1}{x\alpha}, \frac{1}{x}, \frac{1}{\alpha}, \alpha\right)$$

$$\begin{tikzcd} (0,\alpha) = E \arrow[d] & \subseteq \mathrm{Bl}_0 \mathbb{A}^2 \supseteq \mathbb{A}^2_{(x,\alpha)} \arrow[d, "\pi"] \arrow[dr, "\tilde{f}_0"] & \\ (0,0) & \mathbb{A}^2_{(x,y)} \arrow[r, dashed, "f_0"] & \mathbb{A}^4_{(a,b,c,d)} \end{tikzcd}$$

Ecuaciones de $Im(\tilde{f}_0)$ $\left(\overline{Im(\tilde{f}_0)}\right)$ $\overset{\cup}{E}$ ¿?

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{l} ad-b=0 \\ bc-a=0 \\ cd=1 \end{array}\right.}_{\text{parte afín de } e=1}$$

$$I\left(\overline{Im f}\right) = \langle cd-e^2, ae-bc, ad-be \rangle$$

Ecuaciones de $Im(\tilde{f}_{|E}(E))$

¡No podemos sustituir $x=0$ en la definición de $\tilde{f}_0$!

Notar: $C = \{(1,\alpha)\} \subseteq \mathbb{A}^2_{(x,\alpha)} \subseteq Bl_0\mathbb{A}^2_{(x,y)}$ (

$$\tilde{f}_{0|C}(C) = \left(\frac{1}{\alpha}, 1, \frac{1}{\alpha}, \alpha\right) \subseteq \mathbb{A}^4$$

Ecuaciones de $\overline{Im(\tilde{f}_0(C))}$: $\left\{\begin{array}{l} ad=1 \\ cd=1 \\ b=1 \end{array}\right.$

$$\mathbb{A}^2_{(c,d)} \supseteq \underbrace{\{cd=1\}}_{\overline{C}} \leftarrow \left\{\begin{array}{l} a-c=0 \\ cd=1 \\ b=1 \end{array}\right.$$