Geometría algebraica I

10 Junio = Penúltima clase

Ayer:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}^2_{(x,a)} \arrow[drr, "\pi_1"] \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & Bl_0\mathbb{A}^2 \arrow[d, "\pi_0"] \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & Bl_p\mathbb{P}^2 \arrow[d, "\pi"] \arrow[dr, "\tilde{f}"] & \\
& & \mathbb{A}^2_{(x,y)} \subseteq \mathbb{P}^2 \arrow[r, "f"] & \mathbb{P}^4
\end{tikzcd}$$

aplicación racional

$$[x:y:z] \longmapsto [xz : yz : x^2 : y^2 : xy]$$

Ecuaciones de

$$E \subseteq \overline{f(\mathbb{P}^2 \setminus \{p\})} \subseteq \mathbb{P}^4$$

$$\begin{bmatrix} cd - e^2 = 0 \\ ae - bc = 0 \\ ad - be = 0 \end{bmatrix} \qquad E \cong \mathbb{P}^1 \quad \begin{bmatrix} c = 0 \\ d = 0 \\ e = 0 \end{bmatrix}$$

Generan el espacio de cónicas en $\mathbb{P}^2$ que pasan por $[0:0:1] = P$

Ayer: tomamos la carta $\mathbb{A}^4 = \{e = 1\} \subseteq \mathbb{P}^4$

¡ E cae fuera de ella !

Remedio:

$$\mathbb{A}^2_{(x,y)} \xrightarrow{f_0} \mathbb{A}^4 = \{a = 1\}$$

$$(x,y) \longmapsto \left(\frac{y}{x}, \frac{x^2}{x}, \frac{y^2}{x}, \frac{xy}{x}\right) = \left(\frac{y}{x}, x, \frac{y^2}{x}, y\right)$$

$$\begin{tikzcd}
E \subseteq \mathbb{A}^2_{(x,a)} \arrow[d] \arrow[dr, "\tilde{f}_0"] & \\
\mathbb{A}^2_{(x,y)} \arrow[r, "f_0"'] & \mathbb{A}^4
\end{tikzcd}$$

$E = \{(0,a)\}$

$\tilde{f}_0$ es un morfismo

$$(x,a) \overset{\tilde{f}_0}{\longmapsto} \left(\frac{ax}{x}, x, \frac{a^2x^2}{x}, ax\right) = (a, x, a^2x, ax)$$

$$E \overset{\tilde{f}_0}{\longmapsto} (a, 0, 0, 0) \quad \leftarrow \text{Línea en } \mathbb{A}^4.$$

Moraleja: 1)

$\tilde{f}$ es morfismo biracional (en su imagen)

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}^2 \arrow[r, dashed, "f"] & \mathbb{P}^4 \\ Bl_p\mathbb{P}^2 \arrow[u] \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Se resuelve pasando a la explosión de los puntos donde no está definido f

Teorema: Si $f: S \dashrightarrow S'$ aplicación racional entre superficies suaves, entonces $\exists$ $S'' \xrightarrow{\pi} S$ superficie tal que $\tilde{f} \to S'$ es morfismo.

$$\begin{tikzcd} S'' \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\tilde{f}"] & \\ S \arrow[r, dashed, "f"'] & S' \end{tikzcd}$$

2)
$$\begin{tikzcd} Bl_p \arrow[d] \arrow[dr, "\tilde{f}"] & \\ \mathbb{P}^2 \arrow[r, dashed, "f"'] & \mathbb{P}^4 \end{tikzcd}$$

es un encaje de $\mathbb{P}^2 \setminus \{p\} \hookrightarrow \mathbb{P}^4$

$\tilde{f}$ " " de $Bl_p\mathbb{P}^2 \subseteq \mathbb{P}^4$

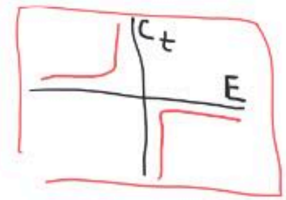
3)

$$
\begin{tikzcd}
(x,a) \arrow[d, mapsto] & \in & \mathbb{A}^2_{(x,a)} \arrow[d, "\pi_0"] & \subseteq Bl_0\mathbb{A}^2 \subseteq Bl_p\mathbb{P}^2 \\
(x,ax) & \in & \mathbb{A}_{(x,y)} & \supseteq C \longmapsto f(C) = \text{cónica}
\end{tikzcd}
$$

si $p \notin C \Rightarrow$

¿Qué pasa si $C \ni p$?

¿Quién es $f(C) \subseteq \mathbb{P}^4$?



$f(C)$

Resp: $\{C_t\}$ = pincel de líneas basado en $p \Rightarrow$

$f(C_t)$

líneas en $S = \tilde{f}(Bl_p\mathbb{P}^2)$

Proposición: $\widetilde{f(C_t)}$ = Reglas de S

$\widetilde{f(E)}$ = Directriz de S

OBSERVACIÓN: $[x:y:z] \xmapsto{f} [xz : yz : xy : x^2 : y^2]$

$$\mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^4$$

$g(x,y,z) = yz$

$[1:0:2] = [2:0:4]$

$g \notin \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} = \{\text{funciones regulares}\}$

$g(1:0:2) \neq g(2:0:4)$

Teorema: V variedad proyectiva irreducible

$$\Rightarrow \mathcal{O}_V = \{\underset{\text{en } V}{\text{funciones Regulares}}\} = \mathbb{F}.$$