Geometría algebraica I

23 feb.

Ayer: plano proyectivo & proyectivización de $\mathbb{A}^2$: $\mathbb{P}(\mathbb{A}^2)$.

Hoy: ¿Cuándo es $\mathbb{P}^2 \cong \mathbb{P}^2(\mathbb{A}^2_k)$ para un campo k?

Variedades afines.

Teorema: Cosideremos $\mathbb{P}^2$ com P1-P4 & Pappus entonces $\mathbb{P}^2 \cong \mathbb{P}(\mathbb{A}^2_k)$ com K un campo.

Ingredientes de la prueba:

1.- $\mathbb{P}^2 \setminus \ell \cong \mathbb{A}^2$

2.- ¿Es $\mathbb{A}^2 \cong \mathbb{A}^2_k$?

= sí =

3.- ¿Porqué? En $\ell \subseteq \mathbb{A}^2$ recta fija para sus elementos podemos definir uma operación de Campo.
¿Cómo? com la acción de $\underline{Aut(\mathbb{A}^2)}$.

PAPPUS

Def.- <u>Espacio afín</u> sobre <u>un campo</u> $\mathbb{F}$

$$\mathbb{A}^n_{\mathbb{F}} := \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_j \in \mathbb{F}\}.$$

¿Porqué no simplemente escribimos $\mathbb{F}^n$?

↳ Para enfatizar la naturaleza geométrica $\mathbb{A}^n_{\mathbb{F}}$.

Eg: $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. $\mathbb{A}^n_{\mathbb{F}} \cong \mathbb{R}^n$.

Estudiaremos aplicaciones entre $\mathbb{A}^n_{\mathbb{F}}$'s

Def.- $\varphi : \mathbb{A}^n_{\mathbb{F}} \longrightarrow \mathbb{A}^m_{\mathbb{F}}$ } morfismo entre $\mathbb{A}^n$ & $\mathbb{A}^m$.

$$(a_1, \dots, a_n) \longmapsto (f_1(a_1, \dots, a_n), \dots f_m(a_1 \dots, a_n))$$

donde $f_j \in \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$

φ depende de $\mathbb{F}$.

Eg (1) Aplicaciones lineales

$$\mathbb{A}^n_{\mathbb{F}} \longrightarrow \mathbb{A}^m_{\mathbb{F}}$$

Eg (2) $\mathbb{A}^1_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$

$t \longmapsto (t, t^2)$,

¿Cual es la imagen?

Resp.

$\{(y_1, y_2) \mid y_1^2 = y_2\}$

la imagen satisface una ecuación algebraica

Problema Mayor de Geo Alg: Escribir ecuaciones para la imagen de aplicaciones entre $\mathbb{A}^n_{\mathbb{F}}$ & $\mathbb{A}^m_{\mathbb{F}}$

$\mathrm{Im}(\varphi) = S \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{F}}$ ¿Ecuaciones para S?

Def.- Dado $S \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{F}}$ el ideal de polinomios que se anulan en S se define:

$$I(S) := \{ f \in \mathbb{F}[x_1, \dots x_n] \mid f(\alpha) = 0 \ \forall \alpha \in S \}$$

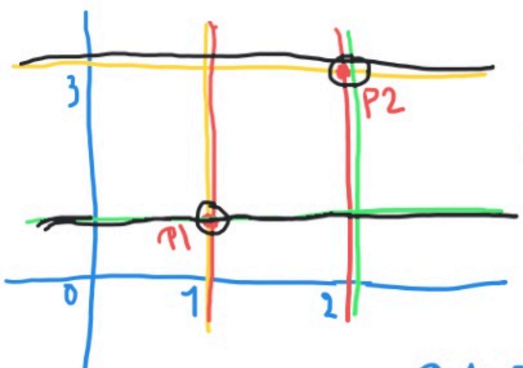
En efecto es un ideal:

- $f+g \in I(S)$ si $f, g \in I(S)$
- $\alpha f \in I(S)$ si $f \in I(S)$ $\alpha \in \mathbb{F}$.

Eg: $S = \mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$ entonces $I(S) = \langle 0 \rangle$.

$S = \emptyset \Rightarrow I(S) = \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$.

$S = \{(1,1), (2,3) \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{Q}}\}$ $\quad I(S) = \langle (x-1)(y-3), (x-1)(x-2), (y-1)(x-2), (y-1)(y-3) \rangle$



$$\left.\begin{array}{l} \langle (x-1),(y-1)\rangle = P_1 \\ \langle (x-2),(y-3)\rangle = P_2 \end{array}\right\} \quad \boxed{\begin{array}{c} I_{P_1} \cap I_{P_2} \\ \| \\ I(S) \end{array}}$$

P_1 & P_2 = 4 colores.

$$S \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{F}} \quad ; \quad \underbrace{I(S)}_{\text{¿Define a } S?} \subseteq \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$$

Def.- Una variedad afín es el lugar geométrico que anula a un conjunto de polinomios.

Es decir, $\{f_j\}_{j \in J} \subseteq \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ ← depende de $\mathbb{F}$.

$$V(\{f_j\}_{j \in J}) = \{a \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{F}} \mid f_j(a) = 0 \ \forall j \in J\}.$$

2 OBSERVACIONES: "Si añadimos ecuaciones la variedad afín se hace más pequeña"

1.-

$\{f_j\}_{j\in J} \subseteq \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ si $J' \subsetneq J$

$\Rightarrow \quad V(\{f_j\}_{j\in J}) \subseteq V(\{f_j\}_{j\in J'})$

2.- Para cualquier subconjunto $S' \subseteq S \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{F}}$

tenemos $\quad I(S') \supseteq I(S)$.

Hartshorne: $V(I)$ es un conjunto algebraico.

"Una variedad afín solo depende de su ideal"

Proposición: Dado $\{f_j\}_{j\in J}^{=F} \subseteq \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ que genera un ideal $I = \langle f_j \rangle$, entonces

$$V(\{f_j\}_{j\in J}) = V(I).$$

Demostración: Sabemos $F \subseteq I$ y por OBS 2:-

$$V(I) \subseteq V(F).$$

Recíproco: $\alpha \in V(F) \Rightarrow f_j(\alpha) = 0 \quad \forall j \in J$. Para cada

$$g = \sum^{N} h_j f_j \in I \Rightarrow g(\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha \in V(I) \quad \boxtimes$$

OBSERVACIONES:

1.- Intersección (arbitraria) de variedades es variedad.

$\boxed{2.-}$ La unión de dos variedades es variedad.

Def.- Dados dos $I_1, I_2 \subseteq R$ ideales

$$I_1 * I_2 = \left\{ \begin{array}{c} \text{generado} \\ \text{por } f\cdot g \end{array} \;\middle|\; \begin{array}{l} f \in I_1 \\ g \in I_2 \end{array} \right\}$$

Def.- La topología de Zariski de $\mathbb{A}^n_{\mathbb{F}}$ la genera los conjuntos algebraicos como cerrados.

Resumiendo:

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{A}^n & & \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n] \\ S & \longmapsto & I(S) \ \text{ideal} \\ & & \text{¿cualquiera?} \\ \underbrace{V(S)}_{\text{cerrado en Zariski}} & \longleftarrow\!\shortmid & J \end{array}$$

En general

$$I\,V(I) \supseteq I$$

no es "="

la igualdad depende de $\mathbb{F}$ & de la geo de $V(I)$.

Ej: $V(\langle f \rangle) \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{Q}}$

sin sol racionales

$$I(\emptyset) = \mathbb{Q}[x,y] \supseteq \langle f \rangle$$

$X \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{F}}$,

$$X \boxed{\subseteq} V(I(X))$$

¡no siempre es igualdad!