# Geometría algebraica I

25 feb

Ayer: Variedades afines y

$\mathbb{A}^n \qquad\qquad \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$

$\cup\!|$

$S \longrightarrow I(S)$ ideal ¿propiedades?

OBJETO DE ESTUDIO

Variedad afín $\to$ $V(J) \longleftarrow J$ ideal

¿ $\operatorname{Im} \varphi \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{F}}$ es algebraico?

Hoy: Propiedades de $V(J)$ & $I(S)$.

Con la topología de Zariski en $\mathbb{A}^n_{\mathbb{F}}$: Dado

$S \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{F}}$ tenemos la noción de

$\overline{S}$ cerradura

El cerrado más pequeño que contiene a $S$

$\mathbb{F} = \overline{\mathbb{F}}$. Proposición: Dado $S \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{F}}$

$$V(I(S)) = \overline{S}$$ cerradura de Zariski

Dem: En gral $\underbrace{S \subseteq V(I(S))}_{\text{cerrado}}$ $\Rightarrow$

$$\overline{S} \subseteq V(I(S)).$$

Ahora mostremos que para cualquier cerrado que contenga a $S$; $\overline{W}$, tenemos

$$V(I(S)) \subseteq \overline{W}.$$

$$S \subseteq \overline{W} = V(J)$$

$J$ ideal

en gral.

$$I(S) \supseteq I(V(J)) \supseteq J$$

$$V(I(S)) \subseteq V(J) = \overline{W}$$ $\Rightarrow$ $V(I(S))$ está en cualquier $\overline{W}$ cerrado que contiene a $S$.

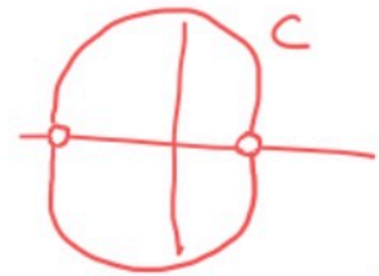
$$\Rightarrow VI(S) = \overline{S}.$$

$\boxtimes$

Eg: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{A}^1_\mathbb{C}$ su cerradura en $\mathbb{A}^1_\mathbb{C}$ es $\mathbb{A}^1_\mathbb{C}$

---

Eg: $C = \{x^2+y^2=1 \;;\; x\neq 0\} \subseteq \mathbb{A}^2_\mathbb{C}$




$\mathbb{A}^2_\mathbb{C}$

$$\overline{C} = \{x^2+y^2=1\}$$

---

Eg: $S = \mathbb{A}^2_\mathbb{C} \setminus \{0,0\} \underset{\text{abierto}}{\subseteq} \mathbb{A}^2_\mathbb{C}$

$$\overline{S} = \mathbb{A}^2_\mathbb{C}.$$

---

COROLARIO: $V(I(S)) = S$ sii

S es algebraico.

De vuelta a: $\varphi : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^m$ $\quad \varphi_i \in \mathbb{F}[x_1..x_n]$

$$(x_1,\dots,x_n) \longmapsto (\varphi_1(x_1,\dots,x_n),\dots,\varphi_m(x_1,\dots,x_n))$$

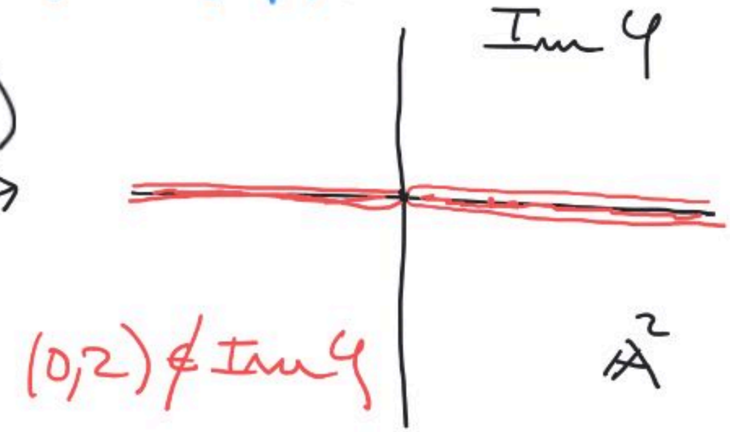
¿ES $\operatorname{Im}\varphi$ algebraico?

$\exists$ algoritmos para encontrar $I(\operatorname{Im}\varphi)$ en términos de los $\varphi_i$'s.

¿Es posible que $\operatorname{Im}\varphi$ no sea algebraico?

Si $\varphi_j$'s son lineales: NO

↳ en grál, sí (Tarea)




ES más $\varphi : \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$

$$(x,y) \longmapsto (x, xy)$$

Proposición: $\varphi : \mathbb{A}^n_{\mathbb{F}} \longrightarrow \mathbb{A}^m_{\mathbb{F}}$ morfismo $\Rightarrow$

$\varphi$ es continua Zariski.

cerrado

Def.- $X$ cerrado es irreducible $\nexists$

$$X = X_1 \cup X_2 \quad (X_1, X_2 \subsetneq X)$$

subconjuntos cerrados de $X$ propios.

Proposición: $X \neq \emptyset$ cerrado, entonces $I(X)$
$\subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{F}}$

es un ideal primo $\Longleftrightarrow$ $X$ es irreducible.

Dem: $\Leftarrow$) Supongamos $X$ es irreducible, $f_1, f_2 \notin I(X)$

$$X_i = V(f_i) \cap X \quad \Rightarrow \quad X_1 \cup X_2 \subsetneq X.$$

$i = 1, 2$

$$x \in X \setminus \{X_1 \cup X_2\} \Rightarrow f_1 f_2(x) \neq 0$$

$$\Rightarrow f_1 f_2 \notin I(X)$$

$I(X)$ es primo.

$\Rightarrow)$

Recíproco: Asumamos $X = X_1 \cup X_2$ $\Rightarrow$ podemos encontrar

$f_1, f_2 \notin I(X)$ com

$$\left.\begin{array}{l} f_1 \in I(X_1) \\ f_2 \in I(X_2) \end{array}\right\} \Rightarrow f_1 \cdot f_2 \in I(X)$$

$\Rightarrow I(X)$ no es primo. $\boxtimes$

---

Comentario: $X = X_1 \cup \cdots \cup X_r$ Pag 21 Hulek

$=$ única/$s_r$ $=$

$$I(X) = \bigcap_{j}^{r} \underbrace{I(X_j)}_{\text{primo}}$$

$\leftarrow$ Descomp primaria de $I(X)$.

Def.- $X_j$ de arriba se llama componente irreducible de $X$.

comentario: $\overline{\mathrm{Im}\,\varphi}$ es irreducible.

$\mathbb{A}^m \longrightarrow \mathrm{Im}\,\varphi \Rightarrow \overline{\mathrm{Im}\,\varphi}$ es irred.

$$\overline{\mathrm{Im}\,\varphi} \underset{¿?}{=} \mathrm{Im}\,\varphi$$

¿Qué propiedades de $\varphi$ garantizan igualdad?

= como en el caso lineal =

Def.- $I(S) \subseteq \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ ideal, el anillo coordenado de $S$ se define

$$\mathbb{F}[S] := \frac{\mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]}{I(S)}.$$

Eg $\phi \neq \langle f \rangle \subseteq \mathbb{F}[x_1 \dots x_n]$ primo $\Longleftrightarrow$ $f$ es irred$/\mathbb{F}$.

NO Eg: $f \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_3]$ irred$/\mathbb{Q}$

$$f = x^2(x-1)^2 + y^2 + z^2$$

$$V(f) = \{(0,0,0), (1,0,0)\}$$ ← ¡ Variedad REDUCIBLE !