Geometría algebraica I

$\mathbb{F} = \overline{\mathbb{F}}$ 2 de marzo.

Ayer: $\mathbb{A}^n_{\mathbb{F}}$ $\mathbb{F}[x_1 \ldots x_n]$

$S \longmapsto \mathrm{Ideal}(S)$

$V(J) \longleftarrow J$

Propiedades:

1) Primo $\Leftrightarrow$ S irred

2) $V(\mathrm{Ideal}(S)) = \overline{S}$

3) $\mathrm{Ideal}(V(J)) \underset{!?}{=} J$

Hoy: Morfismos entre variedades afines

pregunta: $\varphi : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^m$ ¿ $\mathrm{Im}\,\varphi = \overline{\mathrm{Im}\,\varphi}$?

Ejemplo de la clase pasada:

Eg $\quad f \in \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ irred$/_{\mathbb{F}}$ $\iff$ $\langle f \rangle$ primo

si $\mathbb{F} = \overline{\mathbb{F}}$ $\qquad V(f)$ irreducible

$\boxed{!?}$

$\iff$

$\langle f \rangle \subseteq I(V(\langle f \rangle))$

Nullstellensatz

$\langle f \rangle$ primo

$\iff \qquad f$ irred$/_{\mathbb{F}}$

Eg (Var Reducible) $\quad \underline{X} = V(xz-y,\ x^2-yz) \subseteq \mathbb{A}^3$

$C = \{(t^2, t^3, t) \mid t \in \mathbb{A}^1\} = \mathrm{Im}\,\varphi$

$\subseteq \underline{X}$

$\varphi: \mathbb{A}^1 \longrightarrow \mathbb{A}^3$

$t \longmapsto (t^2, t^3, t)$

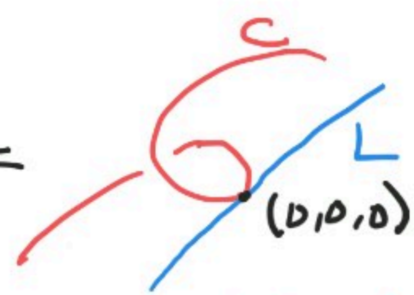
$L = V(x,y) \subseteq \underline{X}$

Afirmación:

$X = C \cup L$;

$\langle xz-y, x^2-yz\rangle = \langle z^2-x, xz-y, x^2-yz\rangle = I(C)$ primo

$\cap\ \langle x, y\rangle = I(L)$ primo

$X =$ 

$\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$

¿Es L tangente a C?

Hoy: Morfismos entre variedades afines

pregunta: $\varphi: \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$ ¿ $\mathrm{Im}\,\varphi = \overline{\mathrm{Im}\,\varphi}$?

Recordar: $\varphi: \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^m$

$$(x_1, \ldots x_n) \longmapsto (\varphi_1(x_1 \ldots, x_n), \ldots \ldots \varphi_m(x_1 \cdots x_n))$$

$$\varphi_j \in \mathbb{F}[x_1 \ldots, x_n].$$

Para cada $f \in \mathbb{F}[\underline{\underline{x_1}}, \ldots, \underline{\underline{x_m}}]$ el inducido

$$\varphi^* f := f(\varphi_1(x_1 \ldots, x_n), \ldots \varphi_m(x_1, \ldots, x_n))$$

con esto, obtenemos un homomorfismo de anillos

$$\varphi^*: \mathbb{F}[y_1, \ldots, y_m] \longrightarrow \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]$$

$$y_j \longmapsto \varphi_j(x_1, \ldots, x_n)$$

satisface $\varphi^*(c) = c \quad \forall\, c \in \mathbb{F}$. Es decir, φ^* es un homomorfismo de $\mathbb{F}$-álgebras.

Recíproco:

$$\psi : \mathbb{F}[y_1, \dots, y_m] \longrightarrow \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$$

morfismo de $\mathbb{F}$-álgebras

$$y_j \longmapsto \psi_j(x_1, \dots, x_n)$$

Entonces escribimos $\mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^m$

$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto (\psi_1, \dots, \psi_m)$$

Proposición:

$$\left\{ \varphi : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m \right\} \longleftrightarrow \left\{ \varphi^* : \mathbb{F}[y_1 \dots y_m] \to \mathbb{F}[x_1 \dots x_n] \right\}$$

$$\varphi \longmapsto \varphi^*$$

Def.- $\bar{V} \subseteq \mathbb{A}^n$ variedad afín. Dos morfismos

$$\phi_1, \phi_2 : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^m$$

son equivalentes en $\bar{V}$

si las composiciones

$$\begin{array}{l} \phi_1^* : \mathbb{F}[\mathbb{A}^m] \longrightarrow \mathbb{F}[\mathbb{A}^n] \searrow \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \mathbb{F}[V] \\ \phi_2^* : \mathbb{F}[\mathbb{A}^m] \longrightarrow \mathbb{F}[\mathbb{A}^n] \nearrow \end{array}$$

son iguales.

Ej: $V = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$

$$I(V) = \langle x^2 + y^2 - 1 \rangle \subseteq \mathbb{R}[x,y]$$

$$\left.\begin{array}{l} \phi_1 : \mathbb{A}^2 \longrightarrow \mathbb{A}^1 \\ \quad (x,y) \longmapsto x^2 \\ \\ \phi_2 : \mathbb{A}^2 \longrightarrow \mathbb{A}^1 \\ \quad (x,y) \longmapsto 1 - y^2 \end{array}\right\} \quad \phi_2 \text{ e } \phi_3 \text{ son equivalentes en } V.$$

Def.- Un morfismo $\phi: V \longrightarrow \mathbb{A}^m$ es una clase de equivalencia de ϕ's : $\mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^m$ que restringidas a V son iguales.

Cada $\hat{\phi}: \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$ tal que $\hat{\phi}_{|V} = \phi$ le llamamos extensión de ϕ.

Proposición: $V \subseteq \mathbb{A}^n$ variedad afín y ϕ_1 & ϕ_2 morfismos de $\mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^m$ equivalentes en V.

Entonces, $\phi_{1_{|V}}(x) = \phi_{2_{|V}}(x) \quad \forall\ x \in V$.

Dem: Tarea.

Def.- Fijen dos variedades afines $V \subseteq \mathbb{A}^n$ & $W \subseteq \mathbb{A}^m$. Un morfismo entre

$\phi: V \longrightarrow W$ se define como

Un morfismo $\phi : V \longrightarrow \mathbb{A}^m$ tal que $\varphi(V) \subseteq W$. ¡satisface ecuaciones de W!

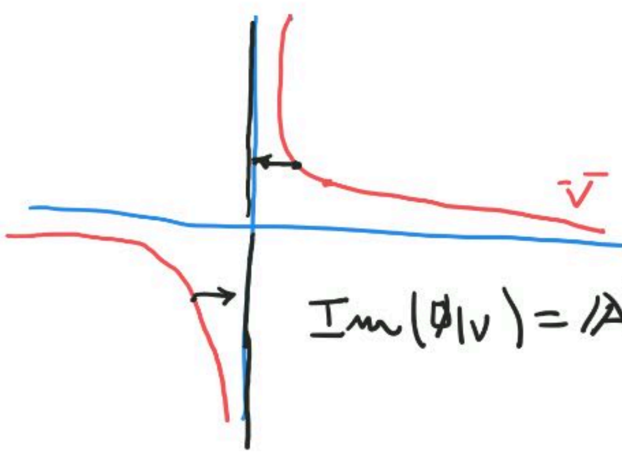
Eg: $V = \{xy = 1\} \subseteq \mathbb{A}^2$

$$\begin{array}{rcl} \phi : \mathbb{A}^2 & \longrightarrow & \mathbb{A}^1 \\ (x,y) & \longmapsto & y \end{array} \qquad \Bigg| \qquad \begin{array}{rcl} \phi|_V : V & \longrightarrow & \mathbb{A}^1 \\ (x,y) & \longmapsto & y \end{array}$$

$\mathrm{Im}(\phi|_V) \subseteq \mathbb{A}^1$

$$\mathrm{Im}(\phi|_V) = \{y \in \mathbb{A}^1 \mid y \neq 0\} = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$$

¡NO es cerrado!



$\mathrm{Im}(\phi|_V) = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$

$$\phi^* : \mathbb{F}[\mathbb{A}^1] \longrightarrow \mathbb{F}[V] = \frac{\mathbb{F}[x,y]}{\langle xy - 1 \rangle}$$

$\mathbb{F}[\mathbb{A}^1] = \mathbb{F}[t]$

$t \longmapsto y$

¿Propiedades de ϕ^*?