Geometría algebraica I

4 de marzo

Ayer: morfismos entre variedades afines.

$$f: V \to W.$$

Eg: $V = \{x^2+y^2=1\} \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ $\qquad f^* = g^*$

$$\left.\begin{array}{ll} f: \mathbb{A}^2 \longrightarrow \mathbb{A}^1 & (x,y) \longmapsto x^2 \\ g: \mathbb{A}^2 \longrightarrow \mathbb{A}^1 & (x,y) \longmapsto 1-y^2 \end{array}\right\}$$

f es equiv. a g en V.

Propo: $f_{|V} = g_{|V}$ pues x^2 & $1-y^2$ son las mismas funciones en V.

observar

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, phantom, "\cup" rotate=90] & \mathbb{A}^1 \\ \mathbb{A}^2 \arrow[ur, "{f, g}"'] & \end{tikzcd}$$

morfismo $V \xrightarrow[{[f]}]{} \mathbb{A}^1$

Def: $V \subseteq \mathbb{A}^n$ $W \subseteq \mathbb{A}^m$ var. afines

Un morfismo $V \xrightarrow{f} W$ es un morfismo

$\boxed{f} : V \longrightarrow \mathbb{A}^m$ tal que $\tilde{f}(V) \subseteq W$.

$g : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^m$,

tal q $g_{|V} = f$.

Eg: $\mathbb{A}^1 \xrightarrow{f} X \subseteq \mathbb{A}^3$

$t \longmapsto (t^2, t^3, t)$

$\langle xz - y, x^2 - yz \rangle$

¿Es L tangente a C?

Hoy: morfismos $f : V \longrightarrow W$ entre var. afines

—//—

Notar: $f(V) \subseteq W$ condición geométrica

es equivalente a $f^*(I(W)) \subseteq I(V)$

es equivalente a $f^*(I(W)) \subseteq I(V)$

En efecto, $v \in V$ y $g \in I(W)$

pull-back
"
inducido

$\boxed{f^*(g)}(v) = g(f(v)) = 0$ pues $f(V) \subseteq W$

$\Rightarrow f^* g \in I(V)$

Recíproco: Asumamos $f^*(I(W)) \subseteq I(V)$

$g(f(v)) = (f^* g)(v) = 0 \Rightarrow f(V) \subseteq W$

Proposición: $V \subseteq \mathbb{A}^n$ $W \subseteq \mathbb{A}^m$ Variedades afines

cualquier $f: V \longrightarrow W$ morfismo

induce $f^*: \mathbb{F}[W] \longrightarrow \mathbb{F}[V]$ y recíprocamente cualquier $\psi : \mathbb{F}[W] \longrightarrow \mathbb{F}[V]$ homo de $\mathbb{F}$-álgebras

es $\psi = \phi^*$ para algún $\phi : V \longrightarrow \overline{W}$.

<u>Demostración</u>: Consideremos $f : V \longrightarrow W \subseteq \mathbb{A}^m$.

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{ccccc} \mathbb{F}[y_1, \dots, y_m] & \xrightarrow{\tilde{f}^*} & \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n] & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{F}[V] \\ \cup\!\mid & & \cup\!\mid & & \\ I(W) & \xrightarrow[f^*]{} & I(V) & \xrightarrow[\pi]{} & 0 \end{array}$$

$f(V) \subseteq \overline{W} \Rightarrow \tilde{f}^*(I(W)) \subseteq I(V) \Rightarrow I(W) \subseteq \ker(\pi \circ \tilde{f}^*)$

$\Rightarrow \quad \mathbb{F}[\overline{W}] \xrightarrow{f^*} \mathbb{F}[V]$

Recíproco:

$$y_j \overset{\tilde{\psi}^*}{\longmapsto} \psi_j^* \longleftarrow \text{levantar } \psi^*(y_j)$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{F}[y_1, \dots, y_m] \arrow[r, dashed, "\tilde{\psi}^*"] \arrow[d, "\pi"] & \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n] \arrow[d, "\pi"] & (*) \\
\mathbb{F}[W] \arrow[r, "\psi^*"] & \mathbb{F}[V] &
\end{tikzcd}$$

Dado ψ^* homo de $\mathbb{F}$-álgebras

queremos un $\tilde{\psi}^*$ tal que $(*)$ conmute.

sabemos

$$y_j \longmapsto \psi^*(y_j) \longleftarrow$$

Produce: $\tilde{\psi} : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^m$ morfismo

$(*)$ garantiza que $\tilde{\psi}^*(I(W)) \subseteq I(V)$

$$\tilde{\psi}(V) \subseteq W \implies \overline{\psi} : V \longrightarrow W$$

$\boxed{3}$

COROLARIO:

$$\left\{ \begin{array}{c} V \longrightarrow W \\ \text{morfismos} \\ \text{de var. afines} \end{array} \right\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{F}[W] \longrightarrow \mathbb{F}[V] \\ \text{homo de } \mathbb{F}\text{-algebras} \end{array} \right\}$$

Defi: isomorfismo $V \xrightarrow{f} W$ es un morfismo que admite un morfismo inverso: $f^{-1}: W \longrightarrow V$.

Eg: $\mathbb{F}[x_1, x_2] \xrightarrow{f^*} \mathbb{F}[x_1, x_2]$

$$x_1 \longmapsto x_1$$
$$x_2 \longmapsto x_2 + g(x_1) \qquad g \in \mathbb{F}[x_1]$$

$f: \mathbb{A}^2_{\mathbb{F}} \longrightarrow \mathbb{A}^2_{\mathbb{F}}$

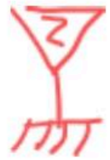
$$f^{*-1}: \begin{array}{l} x_1 \longmapsto x_1 \\ x_2 \longmapsto x_2 - g(x_1) \end{array}$$

$f^{-1}: \mathbb{A}^2_{\mathbb{F}} \longrightarrow \mathbb{A}^2_{\mathbb{F}}$

$\boxed{\text{si } \mathbb{F} = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \quad |\mathrm{Aut}(\underbrace{\mathbb{A}^2_{\mathbb{F}}}_{9 \text{ pts}})| = 9 \cdot 8 \cdot 6}$

Para cada $g \in \mathbb{F}[x_1]$ obtenemos $f \in \underbrace{\mathrm{Aut}(\mathbb{A}^2_{\mathbb{F}})}_{gp}$

¿ $|\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[x]|$?



es compatible con ¿?

Nota: ¿Propiedades de f que hereda f^* y vice versa?

supongamos $f^*: \mathbb{F}[W] \longrightarrow \mathbb{F}[V]$ es inyectivo

$\Rightarrow \mathbb{F}[W] \hookrightarrow \mathbb{F}[V]$ es una inclusión

Próxima clase:

$\Rightarrow f: V \longrightarrow W$ es dominante

Def: $\overline{f(V)} = W$

i.e. $f(V)$ es densa.