Geometría algebraica I

9 de marzo

Ayer: un morfismo $f: V \to W$ entre variedades afines induce $f^*: \mathbb{F}[W] \longrightarrow \mathbb{F}[V]$ morfismo de $\mathbb{F}$-álgebras.

Hoy: Morfismos finitos.

Supongamos $f^*: \mathbb{F}[W] \longrightarrow \mathbb{F}[V]$ es inyectivo

$\mathbb{F}[V]$
|
$\mathbb{F}[W]$

!! $\overset{\Psi}{u}$ si $f^*(u)=0$

$\overset{\text{def}}{\iff}$ $u(f(x))=0 \quad \forall\, x \in V$

$\iff$ u se anula en $f(V)$

$\iff$ u se anula en $\overline{f(V)}$

$f^* u = 0 \iff u$ se anula en $\overline{f(V)}$

$\ker f^* = 0 \iff \overline{f(V)} = W$ pues $u=0$

Def.- $f: V \longrightarrow W$ se dice dominante si $\overline{f(V)} = W$.

Ej: $\mathbb{A}^2 \xrightarrow{\varphi} \mathbb{A}^1$
$(x,y) \longmapsto x$

$V = \{xy = 1\} \subseteq \mathbb{A}^2$

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{|V} : V &\longrightarrow \mathbb{A}^1 \\ (x,y) &\longmapsto x \end{aligned}\right\} \quad \operatorname{Im} \varphi_{|V} = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$$

$\varphi_{|V}$ es <u>dominante</u>. $\Rightarrow$ $\varphi^*_{|V} : \mathbb{F}[t] \hookrightarrow \mathbb{F}[x, x^{-1}]$
$t \longmapsto$ ¿?

$$\begin{array}{c} \mathbb{F}[W] \\ | \\ \mathbb{F}[V] \end{array}$$

extensión de anillos: $\mathbb{F}[V] \subseteq \mathbb{F}[W]$ & contiene a $1_{\mathbb{F}[W]}$.

¿~~algebraica~~?

¿finita?

Def.- $A \subseteq B$ extensión de anillos es integral si todo $b \in B$ satisface

$$0 = b^k + a_1 b^{k-1} + \cdots + a_k \;; \quad a_j \in A \;\; \forall j$$

Def.- $f : V \longrightarrow W$ morfismo de variedades afines se dice finito si

$$\mathbb{F}[W] \longrightarrow \mathbb{F}[V] \text{ es}$$

una extensión integral de anillos.

$f: V \longrightarrow W$ morfismo finito $\Rightarrow$

$\underset{w}{\cup}$ $\quad f^{-1}(w)$ es un conjunto finito

$W \subseteq \mathbb{A}^m_{\mathbb{F}}$ $\quad$ es suficiente: t_j toma un # finito

$V \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{F}}$ $\quad$ de valores en $f^{-1}(w)$.

$t_1, \ldots, t_n$

coordenadas de $\mathbb{A}^n$

como funciones en V.

sabemos:

$\underline{\mathbb{F}[W] \hookrightarrow \mathbb{F}[V]}$ ext. integral.

$\Rightarrow$ para $w \in W$ & $x \in f^{-1}(w)$ tenemos

$$\underline{t_j}(x)^k + a_1(w)\, t_j(x)^{k-1} + \cdots + a_k(w) = 0$$ para algún k

y esta ecuación tiene un # finito de raíces.

Moraleja: si $w \in W$ varía, la condición de integral de $\mathbb{F}[W] \hookrightarrow \mathbb{F}[V]$ impide que pts en $f^{-1}(w)$ desaparezcan.

Teorema: $f: V \longrightarrow W$ finito $\Rightarrow$ f es supra yectivo.

Demostración: $y \in W$; $m_y = \left[\begin{array}{l} \text{funciones } g \text{ en } W \\ \text{t.q. } g(y) = 0 \end{array}\right] \subseteq \mathbb{F}[W]$

$g: W \to \mathbb{F}$

$m_y = \text{ideal} \subseteq \mathbb{F}[W]$.

si $t_1, \dots, t_m$ son funciones coordenadas de $\overline{W}$ (en $\mathbb{A}^m$)

y $y = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ coordenadas en $\mathbb{A}^m$

$$\Rightarrow \quad m_y \overset{¿?}{=} \langle t_1 - \alpha_1, \dots, t_m - \alpha_m \rangle \subseteq \mathbb{F}[W].$$

$$\mathbb{F}[W] \supseteq m_y \supseteq \langle t_1 - \alpha_1, \dots\ t_m - \alpha_m \rangle$$

¡ideal maximal!

Entonces las ecuaciones de $\bar{f}^{-1}(y)$ son

Entonces las ecuaciones de $\bar{f}^{\prime}(y)$ son

$$(1)\quad \left.\begin{array}{l} f^{*}(t_1) - \alpha_1 = 0 \\ \vdots \\ f^{*}(t_m) - \alpha_m = 0 \end{array}\right\} \text{ en } \mathbb{A}^{n}_{\mathbb{F}}$$

Nullstellensatz

¿?

El conjunto de (1) es $\emptyset$ $\boxed{\text{ssi}}$

$$\langle f^{*}(t_1) - \alpha_1, \ldots f^{*}(t_m) - \alpha_m \rangle = \mathbb{F}[V]$$

continuará...