Geometría algebraica I

16 marzo

Ayer: Morfismos finitos

Hoy: Nullstellensatz (débil)

—//—

Ej: $\mathbb{A}^2_{\mathbb{F}} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{A}^5_{\mathbb{F}}$

$(s,t) \longmapsto (s^2, t^2, st, s, t)$

1) $\mathrm{Ideal}(\overline{\mathrm{Im}\,\varphi})$

2) ¿$\mathrm{Im}\,\varphi$ es cerrado?

3) ¿Qué curvas contiene $\overline{\mathrm{Im}\,\varphi}$?

Notación: $\mathrm{Im}\,\varphi := S \subseteq \mathbb{A}^5_{\mathbb{F}}$

* φ es inyectivo

$$\varphi^*: \mathbb{F}[\mathbb{A}^5] \longrightarrow \mathbb{F}[\mathbb{A}^2]$$

$$\mathbb{F}[x_1,\ldots,x_5] \longrightarrow \mathbb{F}[s,t]$$

$$x_1 \longmapsto s^2$$

$$x_2 \longmapsto t^2$$

$$x_3 \longmapsto st$$

$$x_4 \mapsto s$$

$$x_5 \mapsto t$$

$$\varphi: \mathbb{A}^2 \longrightarrow \overline{W} \subseteq \mathbb{A}^5$$

$$I(\overline{\operatorname{Im}\varphi}) = \ker \varphi^*$$

$$= \langle x_1x_2 - x_3^2,\ x_5^2 - x_2 \ \cdots \rangle$$

$$W = \overline{\operatorname{Im}\varphi}$$

¿Finito? $\approx$ ¿extensión de anillos integral? ¿Por qué?

$$\varphi^*: \mathbb{F}[W] \longrightarrow \mathbb{F}[\mathbb{A}^2]$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{Im}\varphi = \overline{\operatorname{Im}\varphi} =: S}$$

— // —

```
i1 : A2 = QQ[s,t]

o1 = A2

o1 : PolynomialRing

i2 : A5 = QQ[x_1..x_5]

o2 = A5

o2 : PolynomialRing

i3 : F = map(A2,A5,matrix{{s^2,t^2,s*t,s,t}})

                  2   2
o3 = map(A2,A5,{s , t , s*t, s, t})

o3 : RingMap A2 <--- A5

i4 : ker F

             2                   2                                         2
o4 = ideal (x  - x , x x  - x , x  - x , x x  - x x , x x  - x x , x x  - x )
             5    2   4 5    3   4    1   3 4    1 5   2 4    3 5   1 2    3

o4 : Ideal of A5
```

si $C \subseteq \mathbb{A}^2$ es una curva

¿Qué ecuaciones satisface $\mathrm{Im}\,\varphi_{|C}$?
en $\mathbb{A}^5$ ó en W

Analizar $\varphi_{|C} : C \longrightarrow W \subseteq \mathbb{A}^5$

$$\varphi_{|C}^* : \mathbb{F}[W] \longrightarrow \mathbb{F}[C]$$

¡aquí hay redundancia!

si $C = \{s=0\} \subseteq \mathbb{A}^2_{(s,t)}$ $\quad \ker \varphi_{|C}^* = \langle x_4, x_3, x_1 \rangle \subseteq \mathbb{F}[W]$

si considera $\varphi_{|C} : C \longrightarrow \mathbb{A}^5$ $\quad \ker \varphi_{|C}^* = \langle x_4, x_3, x_1, x_5^2 - x_2 \rangle \subseteq \mathbb{F}[\mathbb{A}^5]$

$\Rightarrow S$ contiene cónicas.

¿S no contiene líneas? <u>tarea</u>

Teorema: (Nullstellensatz débil) $\quad \mathbb{F} = \overline{\mathbb{F}}$

si $I \subsetneq \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n] \iff V(I) \neq \emptyset$.

Demostración: Considerar $I \subsetneq \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ ideal propio.

$\exists\, \mathfrak{m} \supseteq I$ ideal maximal; $V(\mathfrak{m}) \subseteq V(I)$

Veremos que $V(\mathfrak{m}) \neq \emptyset$.

Campo.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{F} \arrow[r, hook] \arrow[rrr, bend right, "\varphi \text{ isomorfismo}"'] & \mathbb{F}[x_1 \dots x_n] \arrow[r, "\pi"] & \mathbb{F}[x_1 \dots x_n]/\mathfrak{m} \arrow[r, phantom, "="] & K
\end{tikzcd}
$$

Entonces tenemos una extensión de campos

$$\begin{array}{c} K \\ | \\ \mathbb{F} \end{array}$$

¿es algebraica? =lema algebraico=

sí

$b_i := x_i \pmod{m} \in K$

$\alpha_i := \varphi^{-1}(b_i) \in \mathbb{F}$

$\overset{\mathbb{F}=\overline{\mathbb{F}}}{\Longrightarrow} \quad \mathbb{F} \cong K.$

$\Rightarrow \quad x_i - \alpha_i \in \operatorname{Ker} \pi \quad$ para cada $i = 1, \ldots, n$.

Por tanto

ideal maximal

$$\langle x_1 - \alpha_1, \ldots, x_n - \alpha_n \rangle \leq \operatorname{Ker} \pi = m$$

$$\Rightarrow \quad \langle x_1 - \underline{\underline{\alpha}}_1, \ldots, x_n - \underline{\underline{\alpha}}_n \rangle = \mathfrak{m}.$$

$$y \quad (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in V(\mathfrak{m}) \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{F}}$$

$$\neq \emptyset$$

CORDLARIO: Todo ideal maximal $\mathfrak{m} \in \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]$ es de la forma:

$$\mathfrak{m} = \langle x_1 - \alpha_1, \ldots, x_n - \alpha_n \rangle \qquad \alpha_j \in \mathbb{F}.$$

Lema algebraico: $\mathbb{F}$ un campo infinito

$A = \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n] =$ $\mathbb{F}$-álgebra finitamente generada

si A es un campo,

entonces es algebraico sobre $\mathbb{F}$.

Prox: citaremos Teorema de Normalización de Noether $\Rightarrow$ Lema algebraico