UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Geometría algebraica I: tarea 10

Fecha de entrega: 10 de mayo 2021

Asumir siempre que el campo $\mathbb{F}$ es algebraicamente cerrado de caracterśistica $\neq 2$.

EJERCICIO DEL EXAMEN GENERAL 2020-2

Consideremos $f \in K[x, y, z]$ el polinomio general cuadrático definido como:

$$f(x, y, z) = a_{0,0}x^2 + a_{1,1}y^2 + a_{2,2}z^2 + a_{0,1}xy + a_{0,2}xz + a_{1,2}yz.$$

Si denotamos como $X = V(f) \subset \mathbb{P}^2$ entonces:

1. Calcular la ecuación de la variedad discriminante $\Delta := \{\text{cónicas singulares}\}$, en términos de los coeficientes $a_{i,j}$ de arriba.
2. Mostrar que si X es irreducible entonces es no singular.

EJERCICIO DEL EXAMEN GENERAL 2020-2

Denotemos $C := V(f)$, donde $f \in K[x, y, z]$ es un polinomio homogéneo de grado tres. Demostrar que si C es irreducible entonces no puede tener dos puntos singulares.

Ejercicio del examen general 2019-2

Considerar el siguiente morfismo $f : \mathbb{A}^1_t \to \mathbb{A}^3_{x,y,z}$ definido por

$$t \mapsto (t, t^3, t^5).$$

1. Mostrar que la imagen $Im(f) \subset \mathbb{A}^3$ es una variedad afín.
2. Calcular los puntos singulares de la imagen $Im(f)$ y los de su cerradura proyectiva.

Ejercicio 4

Teorema. *Todas las cónicas suaves en $\mathbb{P}^2$ son proyectivamente equivalentes.*

Ejercicio 5

1. Considerar el siguiente anillo local $R = \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,p}$ y $p \in V(f) \cap V(g)$, donde $f, g \in K[x,y]$ son dos polinomios no nulos, coprimos e irreducibles que contienen a p. Entonces mostrar que el cociente $R/(f,g)$ tiene estructura de espacio vectorial de dimensión finita sobre K.

   Por lo tanto se define la *multiplicidad* de la intersección $V(f) \cap V(g)$ en p como

   $$\mathrm{mult}_p(V(f), V(g)) := \dim_K R/(f,g).$$

2. ¿Cuál es multiplicidad de la intersección de las siguientes curvas en el origen?

   $$f = x - y^3 \quad \text{y} \quad g = x.$$

3. Mostrar que si la intersección $V(f) \cap V(g)$ es transversal, entonces $m_p(V(f), V(g)) = 1$.
4. *Punto extra*: Mostrar que la siguiente sucesión es exacta[1]

   $$0 \longrightarrow R \xrightarrow{(g,-f)} R^2 \xrightarrow{(f,g)} R \longrightarrow R/(f,g) \longrightarrow 0.$$

Cúbica de Clebsch

Escribir las 27 líneas contenidas en la superficie cúbica de Clebsh:

$$\{x^3 + y^3 + z^3 + w^3 - (x+y+z+w)^3 = 0\} \subset \mathbb{P}^3.$$

[1] Ver: *Complex algebraic surfaces*, Arnaud Beauville. London Math. Soc., Student text 34. Pág. 2.