UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Geometría algebraica I: tarea 12

Fecha de entrega: 26 de mayo 2021

Asumir siempre que el campo $\mathbb{F}$ es algebraicamente cerrado de caracterśistica $\neq 2$.

CONTINUACIÓN: TAREA 11, EJERCICIO 4

Considerar la cerradura en $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ de las siguientes curvas bajo el encaje $\mathbb{A}^2 \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ definido como $(x, y) \mapsto [x:1], [y:1]$ y decidir si son singulares.

1. $C_1 = V(y^2 - f(x))$, donde f es un polinomio de una variable de grado $d = 2$.
2. $C_2 = V(y^2 - f(x))$, donde f es un polinomio de una variable de grado $d = 3$.
3. $C_3 = V(y^2 - f(x))$, donde f es un polinomio de una variable de grado $d = 4$.

EJERCICIO 5

1. Mostrar que por cada punto $p \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ pasa una curva de bi grado $(1,0)$.
2. Mostrar que dados cualesquiera 5 puntos en $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ existe una curva de bi grado $(1,2)$ que pasa por ellos. ¿Es única?

EJERCICIO DEL EXAMEN GENERAL 2021

1. Considerar $|\mathscr{O}^3_{\mathbb{P}^3}(2)| = \mathbb{P}^9_k$, el espacio que parametriza a las cuádricas en $\mathbb{P}^3_k$. Mostrar que existe una hipersuperficie $\Delta \subset \mathbb{P}^9_k$ de grado 4 que parametriza a las cuádricas singulares.

2. Consideremos la cúbica alabeada $C \subset \mathbb{P}^3_k$:

$$C = \{[x_0^3 : x_0^2 x_1 : x_0 x_1^2 : x_1^3] \in \mathbb{P}^3_k \mid [x_0 : x_1] \in \mathbb{P}^1\},$$

y el ideal que la define $I_C = (Q_1, Q_2, Q_3)$. Si consideramos la red de cuádricas

$$W = \{[a : b : c] \in \mathbb{P}^2_k \mid aQ_1 + bQ_2 + cQ_3\} \subset |\mathscr{O}^3_{\mathbb{P}^3}(2)|,$$

entonces escribir la ecuación de la curva $D \subset W$ cuyos puntos parametrizan las cuádricas singulares que contienen a C; es decir, escribir la ecuación de $D = \Delta \cap W$. ¿Es D singular?

EXPLOSIÓN DE $\mathbb{A}^2$ EN UN PUNTO[1]

Considerar la siguiente hipersuperficie en $X := \mathbb{P}^1_{[a:b]} \times \mathbb{A}^2_{x,y}$:

$$\mathrm{Bl}_p(\mathbb{A}^2) := \{[a : b], (x, y) \in X \mid ax - by = 0\}.$$

Mostrar que $\mathrm{Bl}_p(\mathbb{A}^2)$ es suave de dimensión 2. Verificar que existe un morfismo

$$\pi : \mathrm{Bl}_p(\mathbb{A}^2) \to \mathbb{A}^2$$

que contrae una curva E.
Punto extra: ¿Es $\mathrm{Bl}_p(\mathbb{A}^2)$ una parte afín de $\mathrm{Bl}_p(\mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$?

EJERCICIO DEL EXAMEN GENERAL 2021

1. Verificar que la curva $C = \mathrm{Var}(y^4 - (x-1)(x-2)) \subset \mathbb{A}^2$ es no singular pero que su cerradura proyectiva $\bar{C} \subset \mathbb{P}^2$ es singular.

2. Si $C_0 \subset \mathbb{A}^2_{(x,y)}$ es la parte afín de $\bar{C}$ que contiene a un punto singular en $(0,0)$. Usar el morfismo de la tarea 2, ejercicio 2:

$$\phi : \mathbb{A}^2_{(z,w)} \to \mathbb{A}^2_{(x,y)}$$

y escribir la ecuación de $\phi^{-1}(C_0) \subset \mathbb{A}^2_{(z,w)}$. ¿ Es esta última curva irreducible? ¿continua siendo singular?

[1]Comparar con: tarea 2, ejercicio 3.