UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Geometría algebraica I: tarea 13

Fecha de entrega: 2 de junio 2021

Asumir siempre que el campo $\mathbb{F}$ es algebraicamente cerrado de caracterśistica $\neq 2$.

CONTINUACIÓN: TAREA 5, EJERCICIO 4

Denotemos como S a la imagen del morfismo de Veronese $\phi : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^5$ definido como

$$[s:t:r] \mapsto [s^2 : t^2 : st : sr : tr : r^2].$$

Calcular el ideal proyectivo de $S \subset \mathbb{P}^5$ y además mostrar que S no contiene líneas.
Si restringimos ϕ a la línea $L = \mathrm{Var}(s+t) \subset \mathbb{P}^2$ obtenemos un morfismo

$$\phi_{|L} : L \to \mathbb{P}^5,$$

¿qué ecuaciones en $\mathbb{P}^5$ satisface la imagen de $\phi_{|L}$?

CONTINUACIÓN: TAREA 9, EJERCICIO 2

Escribir el radical del ideal que define a los puntos singulares de la superficie de Steiner en $\mathbb{P}^3$

$$\{x^2y^2 + x^2w^2 + y^2w^2 - xyzw = 0\} \subset \mathbb{P}^3.$$

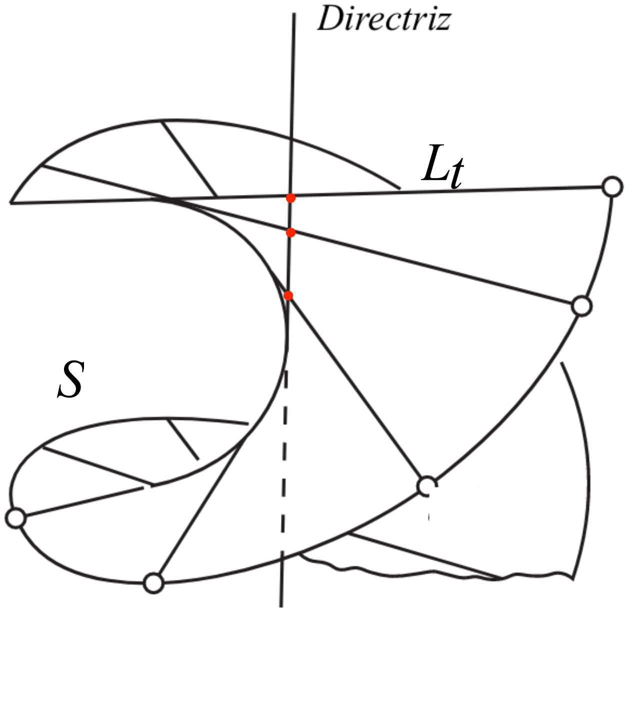
Comparar el lugar singular de esta superficie con el lugar singular del ejercicio 2, tarea9.

EJERCICIO DE EXAMEN

1. Considerar el morfismo de Segre: $f : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$ definido como
$$[a : b], [x : y] \to [ax : bx : ay : by].$$
Mostrar que f es un encaje y calcular las ecuaciones que satisface su imagen $\mathrm{Im} f$.
2. Concluir que todas las cuádricas suaves en $\mathbb{P}^3$ son isomorfas a $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.
3. Mostrar que todas las cuádricas suaves en $\mathbb{P}^3$ son doblemente regladas.
4. Considerar una curva $C \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ de bi grado (2,3). Si restringimos el encaje f a la curva C, ¿cuales son las ecuaciones que satisface la imagen $\mathrm{Im}(f_{|C}) \subset \mathbb{P}^3$?

CONTINUACIÓN: TAREA 6, EJERCICIO 7

Considerar el morfismo $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^4$ definido como
$$[x : y, z] \mapsto [xy : xz : y^2 : yz : z^2].$$
Verificar que la imagen $\mathrm{im} f = S \subset \mathbb{P}^4$ contiene una familia de rectas parametrizada por $\mathbb{P}^1$. ¿Existe una recta directriz en S?



EJERCICIO 5

Toda cónica en el espacio $\mathbb{P}^3$ es plana. Es más, la familia de cónicas en $\mathbb{P}^3$ es de dimensión 8.

EJERCICIO 6

Considerar W la variedad $\mathbb{P}^3$ definida por los 3 menores 2×2 de la siguiente matrix:

$$M = \begin{pmatrix} L_1 & L_2 & L_3 \\ L_4 & L_5 & L_6 \end{pmatrix},$$

donde cada L_i es un polinomio homogénero de grado 1 en 4 variables. ¿Qué dimensión tiene W? ¿Es W no singular?