
Geometría algebraica I: tarea 14

Fecha de entrega: 10 de junio 2021
Última tarea

Asumir siempre que el campo $\mathbb{F}$ es algebraicamente cerrado de característica $\neq 2$.

PROBLEMA DE EXAMEN

Teorema. *Las funciones regulares de una variedad proyectiva irreducible son constantes.*

GRASSMANNIANA DE LÍNEAS EN $\mathbb{P}^3$

- Mostrar que la Grassmanniana de líneas en $\mathbb{P}^3$, denotada $\mathbb{G}(1,3)$, es una variedad algebraica suave de dimension 4.
- Si $L \subset \mathbb{P}^3$ es una recta fija, mostrar que el conjunto

$$\Sigma(L) := \{l \in \mathbb{G}(1,3) \mid l \cap L \neq \emptyset\}$$

es un corte de hiperplano de $\mathbb{G}(1,3)$; sin embargo no todos los cortes de hiperplano son de este tipo.

- Comparar el hiperplano del inciso anterior con el espacio tangente $T_L \mathbb{G}(1,3)$.

EJERCICIO 3

Si $L_1, L_2, L_3 \subset \mathbb{P}^3$ son tres rectas alabeadas fijas, describir el conjunto

$$H := \{l \in \mathbb{G}(1, 3) \mid l \cap L_i \neq \emptyset \text{ para toda } i\}$$

como una subvariedad de $\mathbb{G}(1, 3)$. Dicha subvariedad ¿es suave? ¿es irreducible?

EJERCICIO 4

1. Considerar un morfismo $f: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{G}(1, 3)$ de grado 4. Si a la imagen del punto t bajo f la denotamos como $f(t) = L_t$, entonces la superficie (reglada)

$$S := \bigcup_t L_t \subset \mathbb{P}^3$$

¿qué grado tiene? ¿es suave?

2. Mostrar que la superficie del ejercicio 5 del primer examen parcial (proyektivizada) $\text{Tan}(C) \subset \mathbb{P}^3$ induce un morfismo

$$TC: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{G}(1, 3),$$

definido por $p \mapsto T_p C$, donde $p \in C$ y $T_p C$ denota la recta tangente como punto en $\mathbb{G}(1, 3)$. ¿Qué grado tienen las entradas de dicho morfismo?

EJERCICIO 5

Considerar cuatro líneas alabeadas fijas $L_i \subset \mathbb{P}^3$, $i = 1, \dots, 4$. Mostrar que siempre existen dos líneas l_1, l_2 que son incidentes L_i para toda i .

ARGUMENTAR A FAVOR O EN CONTRA

Si $F = \mathbb{C}$, existe una involución de la Grassmanniana

$$\tau: \mathbb{G}(1, 3) \rightarrow \mathbb{G}(1, 3)$$

definida¹ por $L \mapsto L^\perp$. Esto es, τ es un morfismo de variedades proyectivas tal que $\tau \circ \tau = id$.
Punto extra: τ induce una acción libre de $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ en $\mathbb{G}(1, 3)$ y el espacio topológico cociente sería una variedad algebraica con grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{G}/\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$.

¹Notar que dado un 2-subespacio $\Lambda \subset \mathbb{C}^4$ éste tiene un único complemento ortogonal $\Lambda^\perp \subset \mathbb{C}^4$.