UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Geometría algebraica: tarea 3

Fecha de entrega: 10 de marzo 2021

Asumir siempre que el campo K es algebraicamente cerrado de caracterśistica $\neq 2$.

EJERCICIO 1

Considerar la siguiente curva en el plano afín $C \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$,

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}} \mid x^2 = y^2 + y^3\}.$$

El pincel de líneas en $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ basado en $(0,0)$ induce un morfismo $f : \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \to C$. Mostrar que f^* es inyectivo y caracterizar los polinomios en su imagen. ¿Es f un isomorfismo?

EJERCICIO 2

Calcular el anillo cordenado de $\mathbb{A}^1_K \setminus \{0\}$ y concluir que es isomorfo a $C = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2_K \mid xy = 1\}$.

EJERCICIO 3

Considerar la siguientes variedades afines

$$V(xy - 1) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}} \quad \text{y} \quad V(x^2 - y^2 - 1) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}.$$

Mostrar que son isormorfas.

EJERCICIO 4

Considerar las variedades afines

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x^4 + y^4 = 1\} \qquad W = \{(a, b) \in \mathbb{C}^2 \mid a^2 + b^2 = 1\},$$

y el morfismo $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ definido por

$$(x, y) \mapsto (x^2, y^2).$$

Mostrar que $f(V) \subset W$.

LA CÚBICA ALABEADA

Mostrar que la cúbica alabeda

$$\phi : \mathbb{A}^1_K \to \mathbb{A}^3_K$$

definida como la imagen del morfismo $t \mapsto (t, t^2, t^3)$ es isomorfa a $\mathbb{A}^1_K$.

EJERCICIO 6

Elementos irreducibles pueden originar variedades reducibles: mostrar que la siguiente variedad es irreducible

$$V = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy - z^2 = 0\}.$$

1. La variedad afín V es irreducible.
2. El elemento $z \in \mathbb{R}[V]$ es irreducible como elemento en $\mathbb{R}[V]$.
3. Mostrar que $\{z = 0\} \subset V$ es reducible.

¿La situación es distinta si el campo es $\mathbb{C}$?