Universidad Nacional Autónoma de México

Geometría algebraica I: tarea 4

Fecha de entrega: 17 de marzo 2021

Asumir siempre que el campo K es algebraicamente cerrado de caracterśistica $\neq 2$.

Ejercicio de examen

Teorema. *Un morfismo finito entre variedades afines es suprayectivo.*

Ejercicio 2

Considerar un morfismo entre variedades afines $f : V \to W$. Mostrar que si f^* es suprayectivo entonces f es inyectivo y además su imagen $Im(f)$ es un conjunto cerrado.

Argumentar a favor o en contra

Si el morfismo $f : V \to W$ entre variedades afines es dominante y V es irreducible, entonces W es irreducible.

CONTINUACIÓN: TAREA 1; EJERCICIO 6

Considerar la siguiente parametrización para los pinceles $P(t), Q(t)$: fijar dos líneas auxiliares M_1 y M_2 y un punto $q \notin M_1, M_2$. Entonces, para cada línea $M(t)$ que pasa por q, considerar $P(t)$ como la línea que une p_1 y el punto $M(t) \cap M_1$. Similarmente definimos $Q(t)$ como la línea que une p_2 y el punto $M(t) \cap M_2$.[1]
Considerar tres puntos en el plano no colineales $p_3, p_4, p_5 \notin \overline{p_1 p_2}$ tal que dos de ellos no sean colineales ni con p_1 ni con p_2. Mostrar que si

$$M_1 = \overline{p_3 p_4}, \quad M_2 = \overline{p_3 p_5}, \quad q = \overline{p_1 p_5} \cap \overline{p_2 p_4},$$

entonces la cónica de la Tarea 1; ejercicio 6 pasa por $p_1, \ldots, p_5$. Es decir, se puede construir de manera sintética una cónica que pasa por 5 puntos.

EJERCICIO 5

Considerar dos pinceles $P(t)$ y $Q(t)$ de 2-planos en $\mathbb{C}^3$ sin componentes en común. Mostrar que el lugar geométrico W

$$W = \bigcup_t (P(t) \cap Q(t))$$

es una superficie de grado 2 y escribir la ecuación para una parametrización conveniente. Dicha W es un ejemplo de *superficie reglada*.

EJERCICIO 6

Considerar tres pinceles $P(t), Q(t), R(t)$ de 2-planos en $\mathbb{C}^3$ sin componentes en común. Mostrar que el lugar geométrico C

$$C = \bigcup_t (P(t) \cap Q(t) \cap R(t))$$

es una curva irreducible. Invocar el ejercicio anterior para deducir que C es una curva contenida en cuádricas. Para una parametrización coveniente, ¿qué ecuaciones tienen?

[1] ¿Cómo es esto compatible con la nota de Leal?