UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Geometría algebraica I: tarea 5

Fecha de entrega: 24 de marzo 2021

Asumir siempre que el campo $\mathbb{F}$ es algebraicamente cerrado de caracterśistica $\neq 2$.

EJERCICIO DEL EXAMEN GENERAL 2021-1

Consideremos un morfismo $\phi : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$. Mostrar que si $V \subset \mathbb{A}^n$ y $W \subset \mathbb{A}^m$ son variedades afines irreducibles, entonces ϕ induce un morfismo de

$$\phi_{|V} : V \to W$$

si y solo si

$$\phi^*(I(W)) \subset I(V).$$

Un caso particular es asumir $V = I(f)$, con $f \in \mathbb{F}[\mathbb{A}^n]$. Si escribimos $I(W) = (g_1, \dots, g_r)$ con $g_j \in \mathbb{F}[\mathbb{A}^m]$ y $\phi(p) = (h_1(p), \dots, h_m(p))$, con $h_j \in \mathbb{F}[\mathbb{A}^n]$, entonces ϕ induce un morfismo $\phi_{|V} : V \to W$, si y solo si existen $q_1, \dots, q_r \in \mathbb{F}[\mathbb{A}^m]$ tal que

$$g_i(h_1, \dots, h_r) = q_i f$$

para $i = 1, 2, \dots, r$.

EJERCICIO 2

Considerar un morfismo finito entre variedades afines $f : V \to W$. Mostrar que si $Z \subset V$ es un conjunto cerrado entonces $f(Z) \subset W$ es también cerrado. Es decir, *los morfismos finitos son cerrados.*

Ejercicio de examen: Nullstellensatz débil

Un ideal $I \subset \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]$ es propio si y sólo si $Var(I) \subset \mathbb{A}^n$ es no vacío.

Ejercicio 4

Denotemos como S a la imagen del morfismo $\phi : \mathbb{A}^2_{(s,t)} \to \mathbb{A}^5_{x_1,\ldots,x_5}$ definido como

$$(s,t) \mapsto (s^2, t^2, st, s, t).$$

Mostrar que S no contiene líneas.
Si restringimos ϕ a la línea $L = \mathrm{Var}(s+t) \subset \mathbb{A}^2$ obtenemos un morfismo

$$\phi_{|L} : L \to \mathbb{A}^5,$$

¿qué ecuaciones en $\mathbb{A}^5$ satisface la imagen de $\phi_{|L}$?
Verificar que la curva $\phi_{|L}(L) \subset S$ y además está definida en S por una sola ecuación: $x_4 + x_5 = 0$.

continuación: tarea 4; ejercicio 6

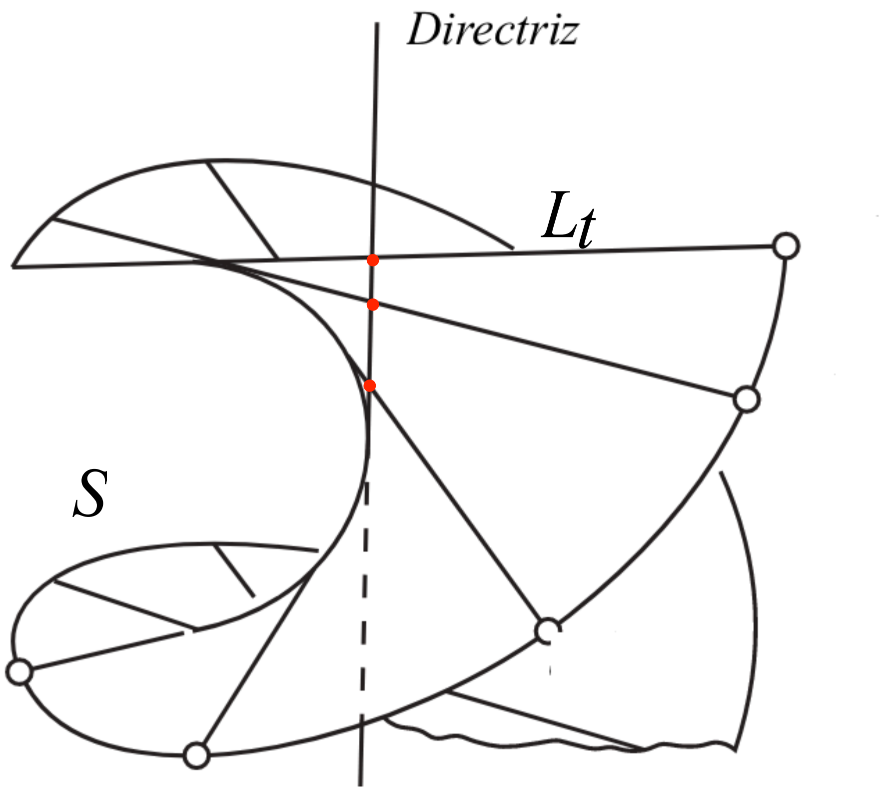
Elegir cualquier parametrización para tres pinceles $P(t), Q(t), R(t)$ de 3-planos en $\mathbb{C}^4$ sin componentes en común. Considerar el lugar geométrico

$$S = \bigcup_t (P(t) \cap Q(t) \cap R(t)).$$

Observar que S es *reglado* por construcción. ¿Es irreducible? ¿qué ecuaciones satisface? Si intersectamos $S \cap H$, donde $H \subset \mathbb{C}^4$ es un 3-plano genérico, ¿que variedad obtenemos?

EJERCICIO 6

En S, del ejercicio anterior, aparece *una* línea especial: cada $L_t = P(t) \cap Q(t) \cap R(t)$ pasa por un único punto de dicha línea y para cualquier punto en ella hay un L_t que lo contiene. Esta línea se llama *directriz* pues dicta la geometría de S.
Para la parametrización elegida en el ejercicio anterior, ¿qué ecuaciones[1] satisface la directriz de S?



[1] elijan escribir las ecuaciones en el anillo coordenado $\mathbb{C}[S]$ ó en $\mathbb{C}^4$.