UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Geometría algebraica I: tarea 6

Fecha de entrega: 7 de abril 2021

Asumir siempre que el campo $\mathbb{F}$ es algebraicamente cerrado de caracterśistica $\neq 2$.

NULLSTELLENSATZ[1]

Si $A = \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]$, entonces para todo ideal $J \subset A$ se tiene que

$$\mathrm{Ideal}(\mathrm{var}(J)) = \mathrm{rad}(J).$$

EJERCICIO 2

1. Si $f : V \to W$ es un morfismo dominante de variedades afines irreducibles ¿es $\mathbb{F}[V]$ un $\mathbb{F}[W]$-módulo finitamente generado? Demostrar o exhibir un contra ejemplo.
2. Si $f : V \to W$ es un morfismo finito entre variedades afines irreducibles ¿es $\mathbb{F}[V]$ un $\mathbb{F}[W]$-módulo finitamente generado? Demostrar o exhibir un contra ejemplo.

[1] leer la prueba en K. Hulek, página 25.

Ejercicio 3

Considerar una curva normal racional $C \subset \mathbb{A}^4$ y tres puntos $p, q, r \in C$ no colineales. Si consideramos el pincel de 3-planos H_t que contienen al plano $\overline{pqr}$, entonces observar que genericamente $H_t \cap C = \{p, q, r, h(t)\}$. Por lo tanto obtenemos una aplicación $F : C \to L$, donde $L \subset \mathbb{A}^4$ es una línea alabeada con C, de la siguiente manera:

$$h(t) \mapsto H_t \cap L.$$

¿Es F, o se puede hacer de él, un isomorfismo?

Continuación: tarea 5, ejercicio 4

Denotemos como V a la imagen del morfismo $\phi : \mathbb{A}^2_{(s,t)} \to \mathbb{A}^5_{x_1,\ldots,x_5}$ definido como

$$(s, t) \mapsto (s^2, t^2, st, s, t).$$

Mostrar que la variedad secante de V es –contra todos los pronósticos– una hipersuperficie en $\mathbb{A}^5$. Calcular la ecuación que satisface. Es decir, calcular la ecuación en $\mathbb{A}^5$ que satisface

$$Sec(V) = \bigcup_{q,p \in V} \overline{pq}.$$

Argumentar a favor o en contra[2]

Se pueden construir superficies regladas en $\mathbb{A}^3$ de todos los grados. Más aún, existen superficies doblemente regladas en $\mathbb{A}^3$ de varios grados distintos.

[2] Intentar resolverlo y *después* ver: "Mathematical Omnibus", thirty lectures on classical mathematics by Dmitry Fuchs and Serge Tabachnikov. AMS, 2007; página 228.

EJERCICIO 6

Consideremos en $\mathbb{A}^4$ las imágenes de los siguientes morfismos $f, g : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^4$

$$f : t \mapsto (t, t^2, t^3, 0),$$

$$g : u \mapsto (1, u, 0, 1).$$

Considerar un isomorfimo $F : \mathrm{im}(f) \to \mathrm{im}(g)$ y el lugar geométrico:

$$W = \bigcup_{p \in L} \overline{pF(p)}.$$

Mostrar que W es un conjunto cerrado e irreducible y escribir sus ecuaciónes en $\mathbb{A}^4$.

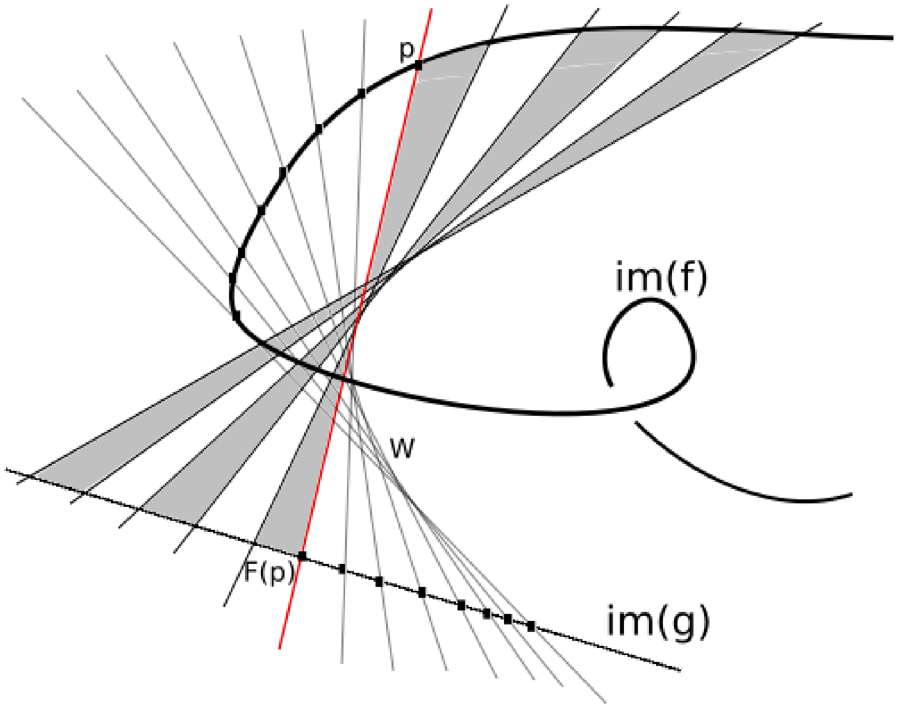

Figure 0.1: Caricatura del lugar geométrico $W \subset \mathbb{A}^4$.

Encontrar las ecuaciones de las reglas $\overline{pF(p)}$. Además, verificar, usando las funciones coordenadas de W, verificar que los ceros de la ecuación

$$\mathrm{Var}(3x - y + 1) = L \cup L' \cup L''$$

donde L, L', L'' son líneas. Es decir, el ideal $(3x - y + 1) \subset \mathbb{F}[W]$ no es primo.
Si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, ¿Es claro que la curvatura de Gauss de cada punto de la superficie $W \subset \mathbb{R}^3$ es cero?

Considerar el morfismo $f : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^4_{(x,y,z,w)}$ definido como[3]

$$(x, y) \mapsto (xy, x, y^2, y).$$

Verificar que la imagen $\operatorname{im} f = S \subset \mathbb{A}^4$ contiene la familia de rectas:

$$L_t = \{tw - 1 = tz - w = tx - y = 0\},$$

para todo $0 \neq t \in \mathbb{A}^1_{\mathbb{F}}$. Verificar que la siguiente recta L

$$L = \{x = z = w = 0\},$$

está contenida en S y ¿es parte del reglado? *i.e.* ¿pertenece a la familia L_t? Escribir las ecuaciones de las rectas L_t en el anillo coordenado $\mathbb{F}[S]$. ¿existe una recta directriz en S?

[3]comparar con: tarea 5, ejercicio 4.