UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Geometría algebraica I: tarea 7

Fecha de entrega: 14 de abril 2021

Asumir siempre que el campo $\mathbb{F}$ es algebraicamente cerrado de caracterśistica $\neq 2$.

EJERCICIO 1

Un conjunto U de un espacio topológico es llamado *localmente cerrado* si es un sub conjunto abierto de un conjunto cerrado. Consideremos $V \subset \mathbb{A}^n_K$ localmente cerrado y $\overline{V} \subset \mathbb{A}^n$ su cerradura. Una *función regular* en V es una función racional en $\overline{V}$ que es regular en todos los puntos de V. Un *morfismo regular* $f : V \to W$ entre conjuntos localmente cerrados del espacio afín es una aplicación definida por componentes que funciones regulares.

1. Considerar $V = \mathbb{A}^1_K \backslash \{0\}$. Calcular el anillo de funciones regulares $K[V]$ y concluir que V es isomorfo a $\{xy = 1\} \subset \mathbb{A}^2_K$.
2. Considerar $V = C \backslash \{0\} \subset \mathbb{A}^2_K$ donde
$$C = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2_K \mid x^2 = y^2 + y^3\}.$$
Mostrar que existe un morfismo regular biyectivo $g : V \to \mathbb{A}^1_K$. ¿Es isomorfismo?
3. Mostrar que la aplicación $z \mapsto 1/z$ define un automorfismo de la variedad afín $\mathbb{C}^1 \backslash \{0\}$ y que puede ser usada para darle un atlas a la esfera de Riemann $\tilde{\mathbb{C}}$.

EJERCICIO 2

Considerar el plano afín menos un punto $X = \mathbb{A}^2 \backslash \{p\}$. Mostrar que X no es isomorformo a una variedad afín.

Ejercicio 3

Considerar $X = \{y^2 - x^3 = 0\} \subset \mathbb{A}^2$ y el morfismo $f : \mathbb{A}^1 \to X$, donde $f(t) = (t^2, t^3)$, ¿es f finito?

Ejercicio 4

Definamos a $V_h \subset \mathbb{A}^n$ como un abierto principal. Mostrar que la imagen inversa de un abierto principal bajo un morfismo regular de variedades afines $f : V \to W$ es un abierto principal.

Ejercicio 5

Considerar $X \subset \mathbb{A}^2$ una variedad reducible de dimensión cero.

1. Mostrar que X es finito.
2. Mostrar que X se puede definir con dos ecuaciones.
3. Si $Z \subset \mathbb{P}^2$ son tres puntos no colineales, mostrar que el ideal $I(X)$ no puede ser generado por 2 elementos.