UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Geometría algebraica I: tarea 8

Fecha de entrega: 21 de abril 2021

Asumir siempre que el campo $\mathbb{F}$ es algebraicamente cerrado de caracterśistica $\neq 2$.

EJERCICIO 1

1. Si escribimos $C = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2_K \mid x^2 = y^2 + y^3\}$, ¿cuál es el lugar singular de C?
2. Denotemos por C a la imagen del morfismo $\phi : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^3$ definido como $t \mapsto (t^2, t, t^3)$. Definimos a la superficie tangente de C en $\mathbb{A}^3$ como sigue:
$$\mathrm{Tan}(C) := \bigcup_{p\in C} T_p C,$$
donde $T_p C$ denota la recta tangente a C en p. ¿Cuál es el lugar singular de $\mathrm{Tan}(C)$?
Punto extra[1]*: si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, ¿cuál es la curvatura Gaussiana en un punto genérico de esta superficie en $\mathbb{R}^3$?*
3. Considerar un corte de hiperplano de la superficie anterior:
$$D := \mathrm{Tan}(C) \cap H,$$
donde $H \subset \mathbb{A}^3$ es un 2-plano general. ¿Cuál es el lugar singular de D?

[1] Ver: *A first course in differential geometry*, Chuan-Chih Hsiung, página 223; ejer 2.

Superficies "de papel"

Considerar la siguiente superficie S en $\mathbb{A}^3_{(x,y,z)}$ y describir su lugar singular:

$$S = \{8x^3y^2 - 9x^4z - 16y^4 + 24xy^2z - 6x^2z^2 - z^3 = 0\}.$$

¿Es S reglada ó no?
Punto extra: si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, ¿cuál es la curvatura Gaussiana en un punto genérico de esta superficie en $\mathbb{R}^3$?

continuación: tarea 5; Ejercicio 5

Mostrar que la siguiente variedad afín es una superficie:

$$W = \{cd - b = bc - a = b^2 - ad = 0\} \subset \mathbb{A}^4_{(a,b,c,d)}.$$

Ejercicio del examen general 2021

1. Mostrar que $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\} \times \mathbb{A}^n$ es birracionalmente equivalente a $\mathbb{A}^{n+1}$.

2. Considerar $X \subset \mathbb{A}^n$ una hipersuperficie. Mostrar que $X \times \mathbb{A}^m$ es isomorfa a una hipersuperficie de $\mathbb{A}^{n+m}$.

Ejercicio 5

Si $Z \subset \mathbb{P}^2$ son tres puntos no colineales, mostrar que el ideal $I(X)$ no puede ser generado por 2 elementos.

Ejercicio 6

Considerar la curva

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2 \mid y^2 = p(x)\},$$

donde $p \in \mathbb{F}[x]$ tiene grado > 1. Calcular el grupo de Galois Gal de la extensión de campos $\mathbb{F}(C) \setminus \mathbb{F}(\mathbb{A}^1)$. ¿Actua Gal de manera geométrica en la curva C?

Argumentar a favor o en contra

Si X es una variedad afín irreducible entonces es isomorfa a una hipersuperficie de $\mathbb{A}^m$ para algún m.