UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Primer examen parcial de geometría algebraica I

26 de marzo 2021

Resolver 5 ejercicios; sólo se tomarán en cuenta 5 respuestas. Cada ejercicio vale 20 puntos. Asumir que el campo $\mathbb{F}$ es algebraicamente cerrado de característica $\neq 2, 3$.

EJERCICIO 1

Teorema. *El teorema de normalización de Noether implica: un morfismo finito entre variedades afines es suprayectivo.*

EJERCICIO 2

Considerar un morfismo entre variedades afines

$$f : V \to W.$$

Si f^* es suprayectivo, mostrar que f es inyectivo y además su imagen $Im(f)$ es un conjunto cerrado. ¿El recíproco es cierto? $i.e.$ si f es inyectivo, ¿es f^* suprayectivo?

EJERCICIO 3

Teorema (Nullstellensatz débil)**.** *Un ideal $I \subset \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]$ es propio si y sólo si $Var(I) \subset \mathbb{A}^n$ es no vacío.*

Ejercicio 4

Elegir una parametrización para dos pinceles generales de 2-planos en $\mathbb{C}^3$ denotados por $P(t), Q(t)$ (en particular, no tendrán componentes en común). Mostrar que el siguiente lugar geométrico

$$W = \bigcup_t (P(t) \cap Q(t))$$

es una hipersuperficie irreducible. Escribir la ecuación que satisface.

Ejercicio 5

Denotemos como C a la imagen del morfismo $\phi : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^3$ definido como $t \mapsto (t, t^2, t^3)$. Consideremos el siguiente lugar geométrico de $\mathbb{A}^3$:

$$\mathrm{Tan}(C) = \bigcup_{p \in C} T_p C,$$

donde $T_p C$ denota la recta tangente a C en p. Mostrar que $\mathrm{Tan}(C)$ es un conjunto cerrado irreducible y calcular la ecuación que satisface en $\mathbb{A}^3$. Verificar, por su puesto, que $C \subset \mathrm{Tan}(C)$.

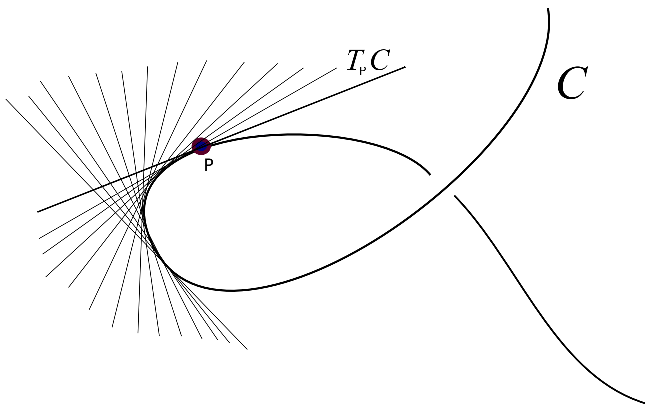

Figure 0.1: Lugar geométrico $\mathrm{Tan}(C) \subset \mathbb{A}^3$.

Denotemos $L_1, L_2 \subset \mathbb{A}^3$ a dos líneas alabeadas en el 3-espacio afín. Considerar[1] un isomorfimo $f : L_1 \to L_2$ y el lugar geométrico:

$$W = \bigcup_{p \in L_1} \overline{pf(p)}.$$

Mostrar que W es un conjunto cerrado e irreducible y escribir la ecuación que satisface en $\mathbb{A}^3$. Escribir las ecuaciones que satisface la línea $L_p = \overline{pf(p)}$ en $\mathbb{A}^3$.

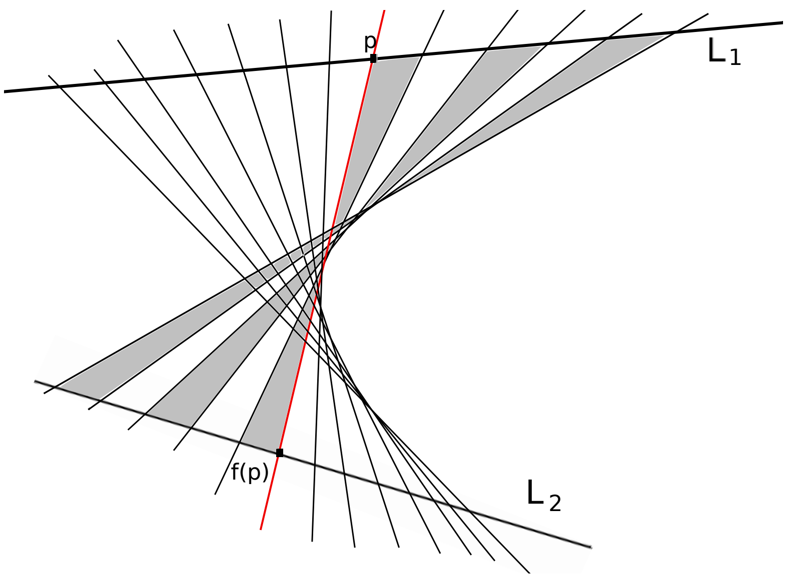

Figure 0.2: Lugar geométrico $W \subset \mathbb{A}^3$.

[1]Pista: se puede pensar en un pincel de planos H_t donde f manda $H_t \cap L_1$ a $H_t \cap L_2$.