# Seminario de Representaciones

Seminario dictado por Marco Flores
Notas escritas por Emilio Montes de Oca

Enero de 2017, IMUNAM-Oaxaca

## Representaciones de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$

Recordemos que una base para $\mathfrak{sl}_2 = \{A \in End(\mathbb{C}^2) : tr(A) = 0\}$ es

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se cumple que

$$[H, X] = 2X, \quad [H, Y] = -2Y, \quad [X, Y] = H.$$

Sea $\rho : \mathfrak{sl}_2 \longrightarrow End(V)$ una representación irreducible (es decir, que no tiene subespacios invariantes). En la sesión anterior se mostró que dado $H$ es una matriz diagonal, entonces $\rho(H)$ es diagonalizable. Más aún, podemos descomponer al espacio como suma directa de los espacios propios de $\rho(H)$

$$V = \bigoplus V_\alpha,$$

con $H(v) = \alpha v$, $\forall v \in V_\alpha$, en donde hemos abusado de la notación escribiendo $H$ para $\rho(H)$. Continuaremos este abuso de la notación en adelante.

Notemos que

$$\begin{aligned} H(X(v)) &= X(H(v)) + [H, X](v) \\ &= X(\alpha v) + 2X(v), \text{ pues } \alpha \text{ es valor propio} \\ &= (\alpha + 2) \cdot X(v); \end{aligned}$$

por lo tanto, si $v$ es un vector propio con valor propio $\alpha$, entonces $X(v)$ es vector propio de $H$ con valor propio asociado $\alpha + 2$. Esto implica que $X : V_\alpha \longrightarrow V_{\alpha+2}$. De manera análoga, tenemos que $Y : V_\alpha \longrightarrow V_{\alpha-2}$.

Como consecuencia de lo anterior y de la irreducibilidad de $V$, los valores propios de la descomposición de $V$ son $n, n-2, n-4, \ldots, n-2k$ para algunos $n \in \mathbb{C}$ y $k \in \mathbb{N}$ (este $k$ existe porque $V$ es de dimensión finita). Tenemos entonces el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, bend left, "X"] & V_{n-4} \arrow[l, "Y"] \arrow[r, bend left, "X"] \arrow[loop below, "H"] & V_{n-2} \arrow[l, "Y"] \arrow[r, bend left, "X"] \arrow[loop below, "H"] & V_n \arrow[l, "Y"] \arrow[loop below, "H"] \end{tikzcd}$$

En la sesión pasada se probó lo siguiente:

**Proposición 1.**
*Sea $v \in V_n$. Entonces los vectores $\{v, Y(v), Y^2(v), \ldots\}$ generan a $V$.*

En consecuencia, se tiene que $n \in \mathbb{N}$ y que existe una única representación irreducible $V^{(n)}$ con valores propios $n, n-2, \ldots, n-2k$, $k \in \mathbb{N}$. Representamos esto explícitamente a través de $V^{(n)} \cong Sym^n\mathbb{C}^2$.

# Representaciones de $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$

Para estudiar las representaciones de $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$, vamos a proceder de la misma manera que en la sección anterior. Sea $\rho : \mathfrak{sl}_3 \longrightarrow End(V)$ una represntación irreducible y $\mathfrak{h} = \{M \in \mathfrak{sl}_3 \text{ diagonales}\}$.

Como las matrices diagonales que conmutan son simultáneamente diagonalizables, tenemos que $\mathfrak{h}$ son simultáneamente diagonalizables, y por lo tanto existe una base de vectores propios para todas ellas. Más aún, podemos descomponer a $V$ como

$$V = \bigoplus V_\alpha,$$

con $v \in V_\alpha$ vector proipio para todo $H \in \mathfrak{h}$.

**Definición 1.** 1. *Un vector propio de $\mathfrak{h}$ es un $v \in V$ vector propio de todo $H \in \mathfrak{h}$.*

2. *Un valor propio de $\mathfrak{h}$ es un $\alpha \in \mathfrak{h}*$ tal que existe $v \in V$ con $H(v) = \alpha(H)v$ para todo $H \in \mathfrak{h}$.*

3. *El espacio propio de $\alpha$ es $\{v \in V \mid H(v) = \alpha(H)v, \quad \forall H \in \mathfrak{h}\}$.*

Comencemos por analizar la representación adjunta $ad : \mathfrak{g} \longrightarrow End(\mathfrak{g})$, que satisface $ad(X)(Y) = [X, Y]$, donde $Y \in \mathfrak{g}$. Se cumple que

$$\mathfrak{sl}_3 = \mathfrak{h} \oplus (\oplus g_\alpha).$$

Notemos que para $H \in \mathfrak{h}, Y \in \mathfrak{g}_\alpha$ tenemos que $[H, Y](v) = \alpha(H)v$. Sean

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}, \quad E_{ij}$$

donde $E_{ij}$ es la matriz que tiene 1 en la posición $i, j$ y 0 en el resto de las posiciones. Observemos que

$$[H, E_{ij}] = HE_{ij} - E_{ij}H = (a_i - a_j)E_{ij}.$$

Para $L_i \in \mathfrak{h}*$ tenemos que $L_iH = a_i$, por lo que los valores propios $\alpha$ de $\mathfrak{h}$ son, por lo anterior, $\alpha = L_i - L_j$, y $\mathfrak{g}_\alpha$ está generado por $E_{ij}$.

Veamos ahora cómo $H : \mathfrak{g}_\alpha \longrightarrow \mathfrak{g}_\alpha$ se comporta respecto a [ , ]. Usando la identidad de Jacobi tenemos que para $X \in \mathfrak{g}_\alpha, Y \in \mathfrak{g}_\beta$

$$\begin{aligned} [H, [X, Y]] &= [X, [H, Y]] + [[H, X], Y] \\ &= [X, \beta(H)Y] + [\alpha(H)X, Y] \\ &= (\alpha(H) + \beta(H))[X, Y]. \end{aligned}$$

Luego, $[X, Y] \in \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ y $X : \mathfrak{g}_\beta \longrightarrow \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$. Por ejemplo, para $X \in \mathfrak{g}_{L_1-L_3}$ tenemos que $\mathfrak{g}_{L_2-L_1} \longrightarrow \mathfrak{g}_{L_2-L_3}$ y $\mathfrak{g}_{L_3-L_1} \longrightarrow \mathfrak{h}$, pues la suma de los índices es 0 y $\mathfrak{h}$ es su espacio propio asociado.

Ahora consideremos representaciones irreducibles. Recordemos que $V = \oplus V_\alpha$. Sea $X \in \mathfrak{g}_\alpha$, $v \in V_\beta$. Entonces

$$\begin{aligned} H(X(v)) &= X(H(v)) + [H,X](v) \\ &= X(\beta(H)v) + (\alpha(H)X)(v) \\ &= (\alpha(H) + \beta(H))X(v), \end{aligned}$$

por lo que $X(v) \in \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ y $X : V_\beta \longrightarrow V_{\alpha+\beta}$, de manera similar a lo que sucedió con la representación adjunta.

Observemos que los valores propios en $\oplus V_\alpha$ difieren entre sí por combinaciones enteras de $L_i - L_j$, i.e., por un trasladado de la retícula $\Lambda_R$.

De manera análoga al caso de $\mathfrak{sl}_2$, queremos hallar un vector propio extremal (uno "máximo"). Escojamos un funcional lineal $\ell : \Lambda_R \longrightarrow \mathbb{R}$ y extendamos linealmente a $\ell : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathbb{R}$. Tomemos $\alpha$ que maximice $Re(\ell(\alpha))$.

**Proposición 2.**
*Existe $v \in V_\alpha$ para algún $\alpha$ tal que $E_{1,2}(v) = E_{1,3}(v) = E_{2,3}(v) = 0$.*

**Proposición 3.**
*$V$ está generado por las imágenes de $v$ bajo las aplicaciones sucesivas de $E_{2,1}$, $E_{3,1}$ y $E_{3,2}$. Además, si $V$ es irreducible, genera una subrepresentación irreducible.*

Observemos que de lo anterior se sigue que $V_\alpha$ tiene dimensión 1 y que $v$ es único para cada sumando irreducible (salvo múltiplos escalares).

**Proposición 4.**
*Los valores propios son combinaciones enteras de los $L_i$ y pertenecen a $\Lambda_w \subset \mathfrak{h}^*$.*

**Proposición 5.**
*Para cada par $a, b \in \mathbb{N}$ existe una única representación irreducible $\Gamma_{a,b}$ de $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$ con valor propio máximo $aL_1 - bL_3$.*

Por ejemplo, la representación estándar $\mathbb{C}^3$. Los vectores propios de $\mathfrak{h}$ son $e_1, e_2, e_3$ con valores propios $L_1, L_2, L_3$. Tenemos en este caso que $\mathbb{C}^3 = \Gamma_{1,0}$.

Tomemos ahora como ejemplo a $(\mathbb{C}^3)^*$. Los vectores propios de $\mathfrak{h}$ son $e_1^*, e_2^*, e_3^*$ con valores propios $-L_1, -L_2, -L_3$ y $(\mathbb{C}^3)^* = \Gamma_{0,1}$.

Usaremos estos dos ejemplos como base para lo que sigue. Recordemos que si $V, W$ son representaciones de $\mathfrak{g}$ entonces $V \otimes W$ y $Sym^2 V$ son representaciones para $X \in \mathfrak{g}$ con

$$X(v \otimes w) := X(v) \otimes w + v \otimes X(w),$$
$$X(v^2) = 2v \cdot X(v)$$

Esto implica que si $V, W$ son representaciones irreducibles de $\mathfrak{sl}_3$ con valores propios máximos $\alpha, \beta$ de vectores $v, w$ (respectivamente), entonces $v \oplus w \in V \oplus W$ es vector máximo con valor $\alpha + \beta$. $v^n \in Sym^n V$ es vector máximo con valor $n\alpha$.

Por lo tanto, $\Gamma_{a,b} \subseteqq Sym^a\mathbb{C}^3 \otimes (Sym^b\mathbb{C}^3)^*$.

Unicidad: $V$ y $W$ con valor propio $\alpha$, y $v \in V$, $w \in W$ son vectores máximos. $(v, w) \in V \otimes W$ tiene valor $\alpha$, genera $U \subseteqq V \oplus W$, irreducible y $\pi_1 : U \longrightarrow V$, $\pi_2 : U \longrightarrow W$ son isomorfismos.

$$\begin{aligned} L_{a,b} :& Sym^a\mathbb{C} \otimes (Sym^b\mathbb{C}^3)^* \longrightarrow Sym^{a-1}\mathbb{C} \otimes (Sym^{b-1}\mathbb{C}^3)^* \\ & (v_1 \cdots v_n) \otimes (v_1^* \cdots v_n^*) \mapsto \sum < v_i, v_j^* > (v_1 \cdots \hat{v_i} \cdots v_a) \otimes (v_1^* \cdots \hat{v_i^*} \cdots v_b^*) \end{aligned}$$

**Proposición 6.**
$\Gamma_{a,b} = Ker L_{a,b}$

# Descenso en geometría
# Seminario dictado por Felipe Zaldívar.
# Notas de Emilio Montes de Oca.

En lo que sigue, $K\ k$ será una extensión de campos tal que $K^G = k$, donde $G = Aut(K\ k)$.

Sea $W$ un $K$ espacio vectorial. Restringiendo escalares a $k$ tenemos que $E$ es un $k$ espacio vectorial (descendimos el espacio).

De manera inversa, podemos "ascender" W a través del tensor:

$$\begin{tikzcd} W \otimes_k K & K \\ W \arrow[u] & k \arrow[u] \end{tikzcd}$$

En este caso, el espacio vectorial $W$ asciende a $K$, y escribimos $W_K = W \otimes_K K$.

**Definición 2.**
*Sea $V$ un $K$ espacio vectorial. Decimos que $V$ desciende a $k$ si existe un espacio vectorial $W$ con $W \subsetneqq V$ tal que $W_k = V$.*

Observemos que $G$ actúa naturalmente en $W_k$, pues si $\sigma \in G$ cumple $\sigma(x \otimes \lambda) = x \otimes \sigma(\lambda)$. Luego, si $V$ desciende a $W$ entonces $G$ actúa en $V$.

La siguiente proposición caracteriza los descensos de espacios vectoriales:

**Proposición 7.**
*Sea $V$ un $K$ espacio vectorial. Los siguientes son equivalentes:*

1. *$V$ desciende a $W$.*
2. *Existe una $k$ base de $W$ que es $K$ base de $V$.*
3. *Toda $k$ base de $W$ es $K$ base de $V$.*

Por ejemplo, $K^n$ con la base canónica cumple todo lo anterior al tensorizar. También $Mat_{n\times n}(K)$ cumple todo lo anterior.

**Proposición 8.**
*Sea $V$ un $k$ espacio vectorial en el que actúa $G = Aut(K\ k)$. Entonces $V$ desciende a $V^G$ (los puntos fijos).*

Entonces todo espacio vectorial desciende, salvo isomorfismo, a un solo lugar, determinado por la acción de $G$.

Si $V$ desciende a $W$ sobre $k$ entonces diremos que $W$ es una forma de $V$ sobre $k$.

El número de formas de $V$ se denota

$$E(K\ k, V) = V^G.$$

Existe una biyección

$$\hat{H}(G, LL_K(V)) \longleftrightarrow E(K\ k, V),$$

donde $\hat{H}(G, GL_K(V))$ es el primer grupo de cohomología.

Observación: Para $GL_K(V) = K^*$ esto es el teorema 90 de Hilbert.

Una aplicación aritmética del decenso es el siguiente teorema:

**Proposición 9** (Teorema de la base normal)**.**
*Sea $K$ $k$ una extensión finita de Galois con grupo $G$. Entonces existe $\alpha \in K$ tal que*

$$\{\sigma(\alpha) : \sigma \in G\}$$

*es base normal de $K$ sobre $k$.*