

## Examen final de teoría de números

---

19 de diciembre 2018

Una condición necesaria para aprobar este examen es presentar la solución completa de al menos dos problemas. 70 puntos son un puntaje aprobatorio.

**Teorema (Gauss).** *El polígono regular de 17 lados es constructible con regla y compás.*<sup>1</sup>

### SUMAS DE GAUSS

Considerar  $\mathbb{Q}(\zeta_p)$  el campo polinomio ciclotómico con  $p \in \mathbb{Z}$  primo impar. Mostrar que existe un subcampo

$$\mathbb{Q}(\sqrt{d}) \subset \mathbb{Q}(\zeta_p),$$

para un entero  $d$ , ¿qué entero  $d$ ?

25 PUNTOS

Mostrar que el número de clase  $h_{17}$  del anillo de enteros algebraicos

$$\mathcal{O} \subset \mathbb{Q}[\sqrt{-17}],$$

es  $h_{17} > 1$ .

---

<sup>1</sup>Estrategia: mostrar que  $\Phi_{17}(x) = x^{16} + x^{15} + x^{14} + \dots + x + 1$  se resuelve con radicales cuadráticos.

25 PUNTOS

Caracterizar los números primos que se pueden escribir como

$$p = x^2 + 5y^2, \quad \text{ó} \quad p = 2x^2 + 2xy + 3y^2.$$

ARGUMENTAR A FAVOR O EN CONTRA

Existe un polinomio ciclotómico que tiene raíces radicales y también no radicales.