CATÁLOGO DE CURVAS ALGEBRAICAS

1. Introduction

Una curva abstracta C de género $g > 1$ la podemos representar en el espacio proyectivo $\mathbb{P}^{g-1}$ usando secciones de su haz canónico K_C. Es decir, el haz K_C nos ayuda a representar la curva C mediante ecuaciones en $\mathbb{P}^{g-1}$ que podemos analizar. En este catálogo analizaremos dichas ecuaciones e interpretaremos sus propiedades en términos geométricos de la curva.

Empecemos por generalidades del sistema lineal canónico $|K_C|$. Observemos que este sistema lineal no tiene puntos base: supongamos que $p \in C$ es un punto base de $|K_C|$, entonces

$$h^0(K_C - p) = h^0(K_C) = g.$$

El teorema de Riemann-Roch implica que

$$h^0(K_C - p) = g - 2 + h^0(\mathcal{O}_C(p)),$$

de donde conlcuimos que $p \in C$ varia en un pincel. Este pincel tendría grado 1 y por tanto C sería biracional a $\mathbb{P}^1$, lo cual contradice $g(C) > 1$.

Concluimos que el sistema lineal $|K_C|$ induce un morfismo $\phi_{K_C} : C \to |K_C|$, definido por

$$p \mapsto [\omega_1(p) : \cdots : \omega_g(p)],$$

con ω_i formas meromorfas sobre C, *i.e.* una base para $H^0(C, \Omega)$. La imagen del morfismo ϕ_{K_C} la llamaremos *curva canónica.*

Notemos que ϕ_{K_C} es inyectivo en varios casos...

Theorem 1.1 (Max Noether)**.** *Si C es una curva suave, no hiper elíptica, y K_C denota el divisor canónico de C, entonces las aplicaciones*

$$\mathrm{Sym}^n H^0(C, K_C) \to H^0(C, nK_C)$$

son suprayectivas para toda $n > 0$.

La siguiente versión del teorema de Brill-Noether es burda, sin embargo es suficiente para nuestro estudio de curvas canónicas y sus proyecciones. Recordamos la definición del número de Brill-Noether:

$$\rho(g, r, d) := g - (r + 1)(g - d + r).$$

Theorem 1.2 (Brill-Noether)**.**

(1) *Si $\rho(g, r, d) \geq 0$, entonces toda curva de género g admite un morfismo no degenerado de grado d o menos a $\mathbb{P}^r$.*

(2) *Para una curva general esta cota es precisa; esto es, una curva general de género g admite un morfismo no degenerado de grado d o menos a $\mathbb{P}^r$ si y solo si $\rho \geq 0$.*

Proposition 1.3 (Zariski, Caporaso - Harris)**.** *Si C es una curva general de género g, entonces la aplicación $\phi : C \to \mathbb{P}^2$ inducida por un g^2_d general es birracional en su imagen con nodos como únicas singularidades.*

La siguiente tabla resume los grados y números de nodos de curvas genéricas de género g que admiten un g^2_d. También indica si los nodos están en posición general.

Género	Grado	δ	$\frac{d(d+3)}{2} - 3\delta$	ρ
1	3	0	9	1
2	4	1	11	2
3	4	0	14	0
4	5	2	14	1
5	6	5	12	2
6	6	4	15	0
7	7	8	11	1
8	8	13	5	2
9	8	12	8	0
10	9	18	0	1
11	10	25	-10	2
12	10	24	-7	0
13	11	32	-19	1
14	12	41	-33	2
15	12	40	-30	0

2. Configuración de nodos inducen números de betti en curvas canónicas

Para géneros menores de 11, los módelos planos de curvas genéricas son curvas planas de grado d con δ nodos en posición general. Ver tabla Brill-Noether. La siguiente pregunta guiará nuestro estudio de curvas algebraicas:

Pregunta 2.1. ¿Cómo depende la tabla de Betti de la curva canónica $C \subset \mathbb{P}^{g-1}$ de la configuación de los nodos en $\mathbb{P}^{2[\delta]}$ del módelo plano de C?

De la pregunta anterior se deriba los siguiente: ¿existe una relación entre puntos base de divisores efectivos en $\mathbb{P}^{2[\delta]}$ y tablas de Betti the curvas encajadas?

A manera de ejemplo, observar que existen configuraciones especiales de puntos $\Gamma \in \mathbb{P}^{2[\delta]}$ tal que

$$\phi_D(Bl_\Gamma(\mathbb{P}^2)) \subset |D| = \mathbb{P}^N$$

tiene números de Betti especiales. En este caso, las syzygías de la superficie $S = \phi_D(Bl_\Gamma(\mathbb{P}^2))$ inducirán syzygías especiales de la curva canónica $C \subset |D|$. Listamos algunos ejemplos:

(1) $g = 5, \delta = 5$, una de estas configuraciones son 4 puntos colineales.
(2) $g = 6, \delta = 4$, una de estas configuraciones son 4 puntos colineales.
(3) Para $g = 8$, podemos considerar una curva plana de grado 8 con 13 nodos cuya resolución minimal es de la forma

$$0 \to \mathcal{O}(-7) \oplus \mathcal{O}(-5) \to \mathcal{O}(-4)^3.$$

Una curva canónica obtenida de esta forma tiene tabla de Betti

1						
	15	40	45	24	5	
	5	24	45	40	15	
						1

3. Curvas canónicas de género 4

Consideremos una curva C de género 4 y su clase canónica K_C. Notemos que $|K_C| \cong \mathbb{P}^3$ y además

$$\phi_{K_C} : C \to \mathbb{P}^3$$

es un encaje si C no es hiper elíptica. Esto nos indica los generadores y sizigias del ideal de C,

$$0 \to \mathcal{O}(-5) \to \mathcal{O}(-2) \oplus \mathcal{O}(-3) \to \mathcal{I}_C \to 0.$$

Encontrando los g^1_d's: El teorema de Brill-Noether predice un número finito de g^1_3's en una curva general de C género 4. En efecto, las dos reglas de la superficie cuádrica que contiene a $C \subset Q \subset \mathbb{P}^3$ son dichos g^1_3's.

Observar que cuando la superficie cuádrica es un cono, dichos g^1_3's colapsan el uno en el otro. Esta familia forma un divisor en el espacio móduli $\mathcal{M}_4$.

Curvas de género 5

Consideremos una curva C de género 5 y su clase canónica K_C. Notemos que $|K_C| \cong \mathbb{P}^4$ y por tanto el morfismo canónico es

$$\phi_{K_C} : C \to \mathbb{P}^4.$$

Observemos que

$$H^0(C, 2K_C) = 16 - 5 + 1 = 12,$$

y además que $h^0(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}(2)) = 15$. Esto nos indica que la curva canónica $\phi(C)$ está contenida en 3 cuádricas independientes. El teorema de Enriques & Babbage nos indica que éstas generan el ideal I_C. Recíprocamente, dadas 3 cuádricas independientes, la fórmula de adjunción aplicada 3 veces, nos dice que la intersección transversal de estas cuádricas es una curva de género 5 y grado 8.

Ejercicio: Calcular la resolución minimal del ideal de la curva C, notar que ésta es *pura*:

$$0 \to \mathcal{O}(-5) \to \mathcal{O}(-3)^3 \to \mathcal{O}(-2)^3 \to \mathcal{I}_C \to 0.$$

Comentario: ¿Qué dimensión tiene el espacio móduli $\mathcal{M}_5$? La curva $\phi_{K_C}(C) = C$ está determinada por un subspacio de dimesion 3 en el espacio de quadricas en $\mathbb{P}^4$. Es decir un punto en la Grasmanniana $\mathbb{G}(2, 14)$ la cual tiene dimensión 36. Eliminando la elección de una base en $H^0(C, \Omega)$, obtenemos que C está determinadad por $36 - 24 = 12$ parámetros.

El comentario de arriba sugiere que el espacio móduli $\mathcal{M}_5$ es birracional al cociente

$$\mathcal{M}_5 \cong \mathbb{G}(2, 14)^{ss} /\!\!/ SL(5).$$

Este es en efecto el caso y se demuestra en el artículo [Maksym].

Modelo plano de la curva genérica. Consideremos una sextica plana con 5 nodos en posición general $p_1, \ldots, p_5$. En este caso, el sistema lineal $|3H - p_1 - \cdots - p_5| \cong \mathbb{P}^4$, y además induce un sistema lineal completo $|\tilde{D}|$ y sin puntos base el la exposión $Bl_\Gamma(\mathbb{P}^2)$, *i.e.*, obtenemos un morfismo

$$\phi_{\tilde{D}} : Bl_\Gamma(\mathbb{P}^2) \to \mathbb{P}^4,$$

donde Γ denota los puntos $p_1, \ldots, p_5$.
Notar que la imagen de $\phi_{\tilde{D}}$ es una superficie S de grado 4 en $\mathbb{P}^4$; una superficie del Pezzo.
Más aún, de esta descripción deducimos que la curva $C \in |\mathcal{O}_S(2)|$. Es decir C es la intersección transversal de tres cuádricas en $\mathbb{P}^4$.
Observar que las curvas de esta sub sección no admiten 3-secantes. La familia de curvas con trisecantes es el tema de la siguiente sub sección.

Brill-Noether: las superficies del Pezzo que contienen a una curva canónica fija en $\mathbb{P}^4$ forman una familia de dimensión 2. Es decir, la representación plana de la curva abstracta C varia en una familia de dimensión 2.

Cambio de números de Betti: el divisor de Koszul. Los números de Betti de una curva de género 5 y grado 8 podrían no ser los de párrafo de arriba. Esto sucede, por ejemplo, cuando la intersección de las tres cuádricas arriba dejan de definir una curva. En este caso, dichas cuádricas definen una superficie donde yace la curva C. Esta superficie es reglada cúbica (cubic scroll) y la denotaremos por $S_{1,2}$. Describamos esta superficie $S_{1,2}$. Consideremos una línea l y una cónica C_0 ambas contenidas en $\mathbb{P}^4$. La supeficie $S_{1,2}$ es la unión de las líneas $\overline{xf(x)}$, donde $f : l \longrightarrow C_0$ es un isomorfismo fijo. Afirmamos que esta superficie es la intersección transversal de tres cuádricas, $S_{1,2} = Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3$. Por lo tanto, el ideal de una curva $C \subset S_{1,2}$ debe tener ecuaciones adicionales a las 3 cuádricas Q_1, Q_2, Q_3.

Más aún, las curvas $C \subset S_{1,2}$ satisfacen que las cuádricas en su ideal no generan las cúbicas del mismo. Es decir, el morfismo multiplicación por formas lineales

$$I_2 \otimes H^0(K_C) \to I_3,$$

no es un isomorfismo.
Modelo plano de la curva $C \subset S_{1,2}$: una descripción alternativa de la superficie $S_{1,2}$ es la siguiente. Consideremos el plano $\mathbb{P}^2$ y el sistema lineal $|D| = |2H - p|$ de cónicas que pasan por un punto fijo p. Notar que $|D| \cong \mathbb{P}^4$ y que además induce un sistema lineal completo $|\tilde{D}|$ en la explosión $Bl_p(\mathbb{P}^2)$. Más aún, $|\tilde{D}|$ no tiene puntos base y por tanto induce un morfismo

$$\phi_{\tilde{D}} : Bl_p(\mathbb{P}^2) \xrightarrow{\tilde{D}} \mathbb{P}^4.$$

La imagen de este morphism $\phi_{\tilde{D}}$ es una superficie cúbica reglada $S_{1,2}$.
En efecto, el morfismo $\phi_{\tilde{D}}$ manda líneas que pasan por p, denotadas por L, a las líneas que unen l y C_0. Más aún, el divisor excepcional E es mandado a la *directrix* de $S_{1,2}$; la linea l. Ver Recuadro 1, [CL2018].
Si denotamos por F una curva quíntica con un nodo en $\mathbb{P}^2$, entonces su transformada extricta tiene clase $\tilde{F} = 5H - 2E \in \mathrm{Pic}(Bl_p(\mathbb{P}^2))$ y además ésta es una curva suave de género 5. Afirmamos que $\phi_{\tilde{D}}(\tilde{F}) = C$.

Dado que la clase del hiperplano de $S_{1,2}$ es $\mathcal{O}(1) = 2H - E$, deducimos que la curva $C \cup L \in |\mathcal{O}_{S_{1,2}}(3)|$. Es decir, existe $Z \subset \mathbb{P}^4$ una hipersuperficie cúbica, tal que

$$S_{1,2} \cap Z = C \cup L.$$

Por lo tanto, ideal I_C admite un morfismo

$$\mathcal{O}(-2)^3 \oplus \mathcal{O}(-3)^2 \to I_C \to 0.$$

Un cálculo de cohomología, nos permite afirmar que estos son todos los generadores del ideal I_C. Observar that el número de Brill-Noether es

$$\rho(5, 2, 5) = -1.$$

Ejercicio: Escribir la resolución minimal libre de I_C.

Comentario: ¿Qué tipo de subvariedad forman las curvas $C \subset S_{1,2}$ en el espacio móduli $\mathcal{M}_5$?

Estimemos la dimensión de la familia $\mathcal{T} \subset \mathcal{M}_5$ que parametriza clases de isomorfismo de curvas de género 5 contenidas en superficies regladas cúbicas $C \subset S_{1,2}$.

El esquema de Hilbert de superficies $S_{1,2} \subset \mathbb{P}^4$, denotado por $\mathcal{H}$, tiene dimensión 18. En efecto, dado que $|\tilde{D}| \cong \mathbb{P}^4$, entonces el número de opciones para escoger secciones de $\mathcal{O}(\tilde{D})$ son $(4+1)^2 = 25$. Dado que dim $Aut(Bl_p(\mathbb{P}^2)) = 6$, entonces dim $\mathcal{H} = 25 - 1 - 6 = 18$.
Por otro lado, observar que la dimension del sistema lineal $\dim|\mathcal{O}_S(\tilde{F})| = 17$. Esto se sigue de Riemann-Roch (¿de qué otra cosa se podría seguir?)

$$\chi(S_{1,2}, \mathcal{O}(\tilde{F})) = \chi(\mathcal{O}) + \tfrac{1}{2}(5H - 2E)(8H - 3E) = 18,$$

si $h^1 = 0$. La dimensión que deseamos estimar es por lo tanto

$$\dim \mathcal{T} = \dim\mathcal{H} + \dim |\tilde{F}| - \dim Aut\mathbb{P}^4 = 11.$$

Por lo tanto estimamos que esta familia $\mathcal{T}$ forma un divisor en $\mathcal{M}_5$.

En efecto $\mathcal{T}$ es un divisor en $\mathcal{M}_5$ que parametriza clases de isomorfismo de *curvas trigonales*. Esto es, dichas curvas cargan un g^1_3, que en este caso proviene de la regla de $S_{1,2}$:

$$C.(\text{regla de } S_{1,2}) = (5H - 2E)(H - E) = 3.$$

Recíprocamente,

Proposition 3.1 (Enriques, Harris)**.** *La unión de 3-secantes de una curva de género* 5 *y grado* 8*, $C \subset \mathbb{P}^4$,*

$$S_{1,2} = \bigcup_{L \in |g^1_3|} L,$$

es una superficie cúbica $S_{1,2}$.

De lo descrito en esta sección concluimos: *la curva genérica de género* 5 *en su encaje canónico no tiene* 3*-secantes. Las curvas que sí admiten* 3*-secantes forman un divisor en $\mathcal{M}_5$. Además, los generadores de la resolución minimal diferencia entre estos dos casos.*

Observar que el modelo plano de una curva genérica se especializa al modelo plano de una curva que tiene una 3-secante de la siguiente manera: en una séxtica con 5 nodos, éstos se especializan a una configuración donde 4 nodos son colineales. En este caso, la superficie del Pezzo

$$Bl_\Gamma \mathbb{P}^2 \subset |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3L - p_1 - p_2 - p_3 - p_4 - p_5)| \cong \mathbb{P}^4,$$

se especializa a una superficie cúbica reglada $S_{1,2}$. En efecto, cuando 4 puntos son colineales, el sistema lineal $|3L - p_1 - p_2 - p_3 - p_4 - p_5|$ adquiere una componente fija. Removiendo dicha componente obtenemos el sistema lineal $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2H - p)| \cong \mathbb{P}^4$.

Ejercicio: Calcular los invariantes del haz E sobre $\mathbb{P}^1$ tal que $S_{1,2} = \mathbb{P}(E)$.

Ejercicio: ¿Existen curvas elípticas de género 5 y grado 8 en $\mathbb{P}^4$ que sean límites de curvas genéricas?

Ejercicio: Calcular la clase del divisor $\mathcal{T}$ en $\mathrm{Pic}(\overline{\mathcal{M}}_5)$. ¿Esta clase coincide con la clase de del siguiente divisor

$$\mathcal{M}^1_{5,3} = \{C \in \mathcal{M}_5 \mid I_2(K_C) \otimes H^0(K_C) \neq I_3(K_C)\}?$$

Pregunta 3.2. La superficie reglada $S_{1,2} \subset \mathbb{P}^4$ induce una curva de grado 3 en la Grassmanniana $\mathbb{G} := \mathbb{G}(1,4)$. Es decir, un elemento del espacio móduli de Kontsevich $\mathcal{M}_{0,0}(\mathbb{G}, 3)$. Observar que la dimensión de este espacio $\dim \mathcal{M}_{0,0}(\mathbb{G}, 3) = 6 + 15 - 3 = 18$. Por tanto, existe una aplicación biracional del esquema de Hilbert de regladas cúbicas $\mathcal{H}$ al espacio móduli de Kontsevich

$$\phi : \mathcal{H} \to \mathcal{M}_{0,0}(\mathbb{G}, 3).$$

¿Qué tipo de aplicación es ϕ exactamente?

Pregunta 3.3. Si $C \subset \mathbb{P}^4$ es una curva canónica de género 5, la proyección de C a un plano general es una curva $C' \subset \mathbb{P}^2$ de grado 8 con 16 nodos. ¿Cuál es la familia $K_5 \subset \mathbb{P}^{2[16]}$ que parametriza los 16 nodos de estas curvas C'?

Proposition 3.4. *Los 16 nodos de la proyección C' están contenidos en una curva de grado 4.*

Comentario: La familia de configuraciones de 16 puntos contenidas en una curva de grado 4 tiene dimensión $\binom{4+2}{2} - 1 + 16 = 30$. Sin embargo, 16 puntos sobre una cuártica no son, en general, los nodos de una curva plana de grado 8. La familia de 16 puntos sobre una cuártica que sí son nodos de una curva de grado 8 tiene dimensión 28.

El rayo extremal no trivial del cono efectivo de $\mathbb{P}^{2[16]}$ está generado por el divisor de Brill-Noether de un haz E que admite las siguientes sucesiones exactas cortas:

$$0 \to \mathcal{O}(2)^3 \to \mathcal{O}(3)^4 \oplus \mathcal{O}(4)^6 \to E \to 0 \tag{1}$$

$$0 \to E \to \mathcal{O}(5)^{12} \to \mathcal{O}(6)^5 \to 0. \tag{2}$$

Asimismo, un elemento general $Z \in K_5$ admite una resolución minimal de la forma

$$0 \to \mathcal{O}(-7)^2 \to \mathcal{O}(-5)^2 \oplus \mathcal{O}(-4) \to \mathcal{I}_Z \to 0. \tag{3}$$

Si consideramos la ecuación (3), hacemos producto tensorial con E y tomamos cohomología, obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$\begin{aligned} 0 \to H^0(\mathbb{P}^2, E(-7))^2 &\to H^0(\mathbb{P}^2, E(-5))^2 \oplus H^0(\mathbb{P}^2, E(-4)) \\ &\to H^0(\mathbb{P}^2, E \otimes \mathcal{I}_Z) \to H^1(\mathbb{P}^2, E(-7))^2. \end{aligned}$$

De la resolución (1) sigue que

$$h^0(\mathbb{P}^2, E(-5)) = 0, h^0(\mathbb{P}^2, E(-4)) = 6.$$

Similarmente, de la resolución (2) sigue que

$$h^0(\mathbb{P}^2, E(-7)) = h^1(\mathbb{P}^2, E(-7)) = 0.$$

Concluimos que

$$h^0(\mathbb{P}^2, E \otimes \mathcal{I}_Z) = 6$$

y por lo tanto, K_5 está contenido en el lugar base estable del divisor D_E. En efecto, el lugar base de la clase D_E es... (?)

De hecho, la configuración de 16 puntos sobre una cuártica general pertenece al lugar base estable de $D_\mu := \mu H - \frac{\Delta}{2}$ para valores $\mu \in [30/7, 9/2)$. El elemento general de K_5 cumple la misma propiedad. Es decir, dada una configuración de 16 puntos sobre una cuártica, no podemos determinar si ésta pertenece a K_5 en términos de interpolación respecto a algún haz vectorial. Esto lo podemos interpretar como sigue: la configuración general de K_5 y la de $C(4, 16)$, imponen condiciones identicas en secciones globales de haces en $\mathbb{P}^2$.

Pregunta 3.5. ¿La construcción de arriba define un morfismo del esquema de Hilbert $\mathcal{H}_{8,5}$ en el espacio móduli de curvas de género 3,

$$\mathcal{H}_{8,5} \to \mathcal{M}_3?$$

La variedad de Prym. Lo siguiente es lo que puedo concluir de nuestra discusión del jueves pasado. Consideremos $C \subset \mathbb{P}^2$ la proyección genérica a un plano de una curva canónica general de género 5. Dicha curva C es irreducible de grado 8 y tiene 16 nodos como únicas singularidades. Estos nodos Γ_C, tienen la siguiente resolución minimal

$$0 \to \mathcal{O}(-7)^2 \to \mathcal{O}(-5)^2 \oplus \mathcal{O}(-4) \to \mathcal{I}_{\Gamma_C} \to 0,$$

en particular viven en una cuártica C_0. Por lo tanto, existen dos curvas de grado 8 que son nodales en Γ_C; a saber C y C_0^2. El espacio total del pincel generado por estas dos cuárticas, denotado P, nos arroja una familia (¿trivial?) de curvas de género geométrico 5 y con fibra central C_0^2.

Proposition 3.6. *La superficie P es singular a lo largo de C_0 y su normalización $\tilde{P}$ tiene una fibra central sobre $\mathbb{P}^1$ una curva T de género 5 la cual es una cubierta étale de C_0,*

$$\phi : T \xrightarrow{2:1} C_0.$$

La aplicación étale ϕ induce una aplicación entre las jacobianas

$$Jac(T) \longrightarrow Jac(C_0),$$

cuyo kernel $ker^*(\phi) := \mathrm{Prym}(T, C_0)$ es una variedad abeliana de diemension 2; a saber la variedad de Prym de la cubierta ϕ.

La construcción de arriba nos arroja una aplicación entre el espacio móduli $\mathcal{R}_3$, el cual es una cubierta finita de $\mathcal{M}_3$, y el espacio móduli de superficies abelianas,

$$\mathrm{Prym}_3 : \mathcal{R}_3 \longrightarrow \mathcal{A}_2 \cong \mathcal{M}_2,$$

definida por $[T \to C_0] \mapsto \mathrm{Prym}(T, C_0)$.

** ¿La geometría de los 16 nodos de C nos dicen algo sobre la aplicaión Prym_3?

Curvas canónicas contenidas en superficies K3. La intersección completa genérica de tres cuádricas $S = Q_1 \cap Q_2 \cap Q_2 \subset \mathbb{P}^5$ es una superficie K3. Un elemento del sistema lineal $|\mathcal{O}_S(1)|$ es una curva de género aritmético 5 y grado 8. Concluimos que el sistema lineal canónico de la curva C está dado por su autointersección en la superficie S, $|K_C| = |\mathcal{O}_S(C)_{|C}|$.

Los diagramas de Betti de las curvas estudiadas en esta sección son:

Curva general de género 5	$\exists!\ g^1_3$	¿g^1_2?
1 - - -	1 - - -	
- 3 - -	- 3 2 -	
- - 3 -	- 2 3 -	
- - - 1	- - - 1	

4. Curvas de género 6

La curva general tiene resolución minimal

$$0 \to \mathcal{O}(-7) \to \mathcal{O}(-5)^6 \to \mathcal{O}(-4)^5 \oplus \mathcal{O}(-3)^5 \to \mathcal{O}(-2)^6 \to \mathcal{I}_C \to 0.$$

Definition 4.1. Una curva suave de genero 6 se dice que es especial si es hipereliptica, trigonal, bieliptica o isomorfa a una curva plana suave de grado 5.

Cualquier curva suave C de genero 6 tiene un divisor especial D de grado 6 y $h^0(C, D) = 3$. Consideremos el morfismo asociado a este divisor:

$$\varphi_D : C \to \mathbb{P}^2$$

Proposition 4.2. *Sea C una curva suave de genero 6, entonces se cumple alguna de las siguientes afirmaciones:*

- *φ_D es birracional y $\varphi_D(C)$ es una sextica plana irreducible con unicamente puntos dobles*
- *C es especial*

Proposition 4.3. *Una curva C de genero 6 es especial si y sólo si $\dim W^2_6(C) > 0$.*

- Si C es trigonal, entonces tiene dos tipos de g^2_6:
  $$D = 2g^1_3 \qquad y \qquad D(p) = K_C - g^1_3 - p, \qquad p \in C$$
  Por lo que $W^2_6(C)$ tiene dimension uno y dos componentes irreducibles. El modelo plano φ_D es una cónica triple $\varphi_{D(p)}$ es una sextica plana con un punto triple y un nodo.
- Si C es isomorfa a una quintica plana, entonces cualquier g^2_6 en C es del tipo $D(p) = g^2_5 + p, \quad p \in C$. Por lo que $W^2_6(C) \cong C$. El modelo plano de C es una quintica plana.
- Si C es bi-eliptica, es decir, existe un morfismo $\pi : C \to E$ con E curva eliptica, entonces, cualquier g^2_6 se corresponde con $\phi \circ \pi$ con ϕ un g^1_2 en E. El modelo plano de C es una cubica doble.

Encontrando los g^1_d's: El teorema de Brill-Noether predice un número finito de g^1_4's en una curva general de C género 6. ¿Cuáles son?

Si pensamos en C como la normalización de una curva plana de grado 6 con 4 nodos obtenemos cinco g^1_4's: cuatro de ellos provienen del pincel de rectas con base en uno de los cuatro nodos y uno del pincel de cónicas que contienen a los cuatro nodos. ¿Son estos todos los g^1_4?

5. Curvas de género 8

Consideremos una curva de género 8 que no es hiper elíptica, C. El sistema lineal canónico

$$C \to |K_C| = \mathbb{P}^7,$$

realiza la curva C como curva de grado 14. Por el teorema de Noether, sabemos el morfismo $\mathrm{Sym}^2 H^0(C, K_C) \to H^0(C, 2K_C)$ es suprayectivo. Por tanto el teorema de Riemann-Roch implica que el espacio de cuádricas que contienen a la curva C, es el kernel

$$k_{1,1} := \ker\left(\mathrm{Sym}^2 H^0(C, K_C) \to H^0(C, 2K_C)\right),$$

el cual tiene dimension dim $k_{1,1} = 36 - 28 + 8 - 1 = 15$.

Por otro lado, el teorema de Enriques & Babbage garantiza que sólo necesitamos cuádricas para generar el ideal de una curva genérica. Esto implica que las cuádricas en el ideal I_C, deonde C es genérica, generan las cúbicas en él y por tanto el morfismo multiplicación

$$(I_C)_2 \otimes H^0(C, K_C) \to (I_C)_3,$$

es un isomorfismo. De estas cúbicas, algunas son syzygias entre las cuádricas; estimemos cuántas son.

Podemos calcular cuántas hiper superficies cúbicas contienen a la curva C de la siguiente sucesión exacta

$$0 \to I_C(3) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(3) \to \mathcal{O}_C(3) \to 0.$$

De nuevo, por el teorema de Noether y el teorema de Riemann-Roch, tenemos que $h^0(I_C(3)) = 120 - 42 + 8 - 1 = 85$. Dado que hay 120 cúbicas en $(I_C)_3$, y éstas con la imagen del morfismo multiplicación μ_1, entonces existen 35 cúbicas que son syzygias lineales de las cuádricas generadoras. Es decir, el espacio de syzygias es el kernel del morfismo multiplicación

$$k_{2,1} := \ker\left(I_C(2) \otimes H^0(C, K_C) \to I_C(3)\right),$$

donde $I_C(k)$ denota el espacio de hiper superficies de grado k que contienen a la curva C. Esto nos da la dimensión de generadores y primeras syzygias entre ellos.

Theorem 5.1 (Green)**.** *Si C es una curva genérica de género g, el haz canónico K_C satisface*

$$k_{p,2}(C, K_C) \cong k_{g-p-2,1}(C, K_C)^\vee.$$

Curva general de género 8						
1	-	-	-	-	-	-
-	15	35	21	-	-	-
-	-	-	21	35	15	-
-	-	-	-	-	-	1

Curvas trigonales. Supongamos que C es una curva irreducible de grado 8 nodal justo en el sub esquema Γ, cuyo ideal tiene la siguiente resolución minimal

$$0 \to \mathcal{O}(-7) \oplus \mathcal{O}(-5) \xrightarrow{f} \mathcal{O}(-4)^3 \to \mathcal{I}_\Gamma \to 0,$$

con f es general. Dichas cuárticas forman un sistema lineal en $\mathbb{P}^2$

$$|L| = |4l - \sum_i^{13} p_i| \cong \mathbb{P}^2$$

cuyo grado es $L^2 = 16 - 13 = 3$. Dado que este sistema lineal restringido a C es de grado 6, esto nos indica que L induce una cubierta $3:1$ sobre una cónica

$$\phi_L : C \xrightarrow{3:1} \mathbb{P}^1 \subset |L|.$$

Denotemos como $D = \phi_L^{-1}(t)$ al divisor de grado 3 en C tal que $|D| = g_3^1$. Mostraremos que tres puntos $p, q, r \in |D|$ en la curva encajada

$$C \subset \mathbb{P}^7$$

generan una linea.

Justo, interpretando $H^0(K_C - D)$ como el espacio de hiper planos en $\mathbb{P}^7$ que contienen D, entonces el teorema de Riemann-Roch indica lo siguiente

$$h^0(D) = d - (g - 1 - h^0(K - D)).$$

Es decir, la dimensión $h^0(D) = 2$ es igual al grado del divisor grado$(D) = 3$ menos la dimensión del espacio lineal generado por los puntos de D en $\mathbb{P}^7$; cuya dimensión en este caso es 1.

El párrafo de arriba nos permite afirmar que el g_3^1 genera una superficie

$$S := \bigcup_{L \in g_3^1} L \subset \mathbb{P}^7$$

la cual es reglada, contiene a la curva C y está contenida en todas las cuádricas del ideal de C. Esto es, el ideal de C no está generado por cuádricas. Por lo tanto, los números de Betti de C son distintos a los números de Betti de la curva genérica.

Encontrando los g_d^1's: El teorema de Brill-Noether predice un número finito de g_5^1's en una curva general de C género 8. ¿Cuáles son?

Proyectando una curva de género 8 a un plano: si la curva es genérica, entocnes la proyección de ésta a un plano será una curva de grado 14 con 70 nodos. Denotemos dichos nodos con Γ y obervememos que tienen la siguiente resolución minimal

$$0 \to \mathcal{O}(-13)^5 \to \mathcal{O}(-11)^5 \oplus \mathcal{O}(-10) \to \mathcal{I}_\Gamma \to 0.$$

En particular viven en una única curva de grado 10.

6. Proyección de curvas canónicas a un plano

Al proyectar de manera general una curva canónica de género g a un plano obtendremos una curva plana de grado $2g-2$ con

$$\frac{(2g-3)(2g-4)}{2} - g = 2(g-1)(g-3)$$

nodos simples. La siguiente proposición describe parcialmente la geometría de estos nodos.

Proposition 6.1. *Sea $C \subset \mathbb{P}^{g-1}$ una curva canónica de género $g \geq 3$ y sea $\pi : C \to C' \subset \mathbb{P}^2$ la proyección a un plano. Supongamos que C' tiene únicamente nodos simples por singularidades. Entonces el conjunto Γ de nodos de C' está contenido en una curva de grado $2g-6$.*

Recíprocamente, si $\Gamma \subset \mathbb{P}^2$ es una colección de $2(g-1)(g-3)$ puntos contenidos en una curva de grado $2g-6$ que además son nodos de una curva C' de grado $2g-2$, entonces C' es la proyección de una curva canónica de género g.

Proof. Para probar la primera parte, consideremos una recta general $H' \subset \mathbb{P}^2$, la cual intersecta a C' en $2g-2$ puntos distintos $D' = p'_1 + \ldots + p'_{2g-2}$, ninguno de ellos un nodo de C'. Estos puntos son la preimagen bajo la proyección π de $2g-2$ puntos $p_1, \ldots, p_{2g-2} \in C$ contenidos en un hiperplano $H \subset \mathbb{P}^{g-1}$ (la preimagen de H'). Sigue que $D := p_1 + \ldots + p_{2g-2}$ es la clase del hiperplano en C; es decir, la clase canónica K_C.

El sistema canónico de C corresponde al inducido por las curvas planas de grado $2g-5$ que contienen a Γ. Por lo tanto, existe una curva $F \subset \mathbb{P}^2$ que contiene a Γ y a D'. Por el teorema de Bézout, dado que F contiene $2g-2 > deg(F)$ puntos colineales, se tiene que F contiene a la recta H' como una componente. Por lo tanto, $G := F - H'$ es una curva de grado $2g-6$ que contiene a Γ.

Recíprocamente, sea $\Gamma \subset \mathbb{P}^2$ un conjunto de $2(g-1)(g-3)$ puntos contenidos en una curva G de grado $2g-6$ que además son los nodos de una curva C' de grado $2g-2$. Si $H' \subset \mathbb{P}^2$ es una recta general entonces $G + H'$ representa a la clase canónica de la normalización C de C'. Esto nos da un plano distinguido dentro del sistema lineal $|K_C|$ de modo que C' es la proyección de C a este plano. $\square$

References

[V] A. Verra, The fiber of the Prym map in genus 3.

[CH] L. Caporaso and J. Harris, "Counting plane curves of any genus". Invent. Math (1998).

[E] Eisenbud, D: The Geometry of Syzygies.

[CL2018] Lozano Huerta, C: Tres medallas de la geometría birracional. Motivos Matemáticos, 2018.

[F2014] Farkas, Syzygies of curves and the Green conjecture.