

# CATÁLOGO DE CURVAS ALGEBRAICAS

## 1. INTRODUCTION

Una curva abstracta  $C$  de género  $g > 1$  la podemos representar en el espacio proyectivo  $\mathbb{P}^{g-1}$  usando secciones de su haz canónico  $K_C$ . Es decir, el haz  $K_C$  nos ayuda a representar la curva  $C$  mediante ecuaciones en  $\mathbb{P}^{g-1}$  que podemos analizar. En este catálogo analizaremos dichas ecuaciones e interpretaremos sus propiedades en términos geométricos de la curva. [Si las curvas abstractas no son ceros de polinomios ¿qu é son?](#)

Empecemos por generalidades del sistema lineal canónico  $|K_C|$ . Observemos que este sistema lineal no tiene puntos base: supongamos que  $p \in C$  es un punto base de  $|K_C|$ , entonces

$$h^0(K_C - p) = h^0(K_C) = g.$$

El teorema de Riemann-Roch implica que

$$h^0(K_C - p) = g - 2 + h^0(\mathcal{O}_C(p)),$$

de donde concluimos que  $p \in C$  varia en un pincel. Este pincel tendría grado 1 y por tanto  $C$  sería biracional a  $\mathbb{P}^1$ , lo cual contradice  $g(C) > 1$ .

Concluimos que el sistema lineal  $|K_C|$  induce un morfismo  $\phi_{K_C} : C \rightarrow |K_C|$ , definido por

$$p \mapsto [\omega_1(p) : \cdots : \omega_g(p)],$$

con  $\omega_i$  formas meromorfas sobre  $C$ , *i.e.* una base para  $H^0(C, \Omega)$ . La imagen del morfismo  $\phi_{K_C}$  la llamaremos *curva canónica*.

Notemos que  $\phi_{K_C}$  es inyectivo en varios casos...

**Theorem 1.1** (Max Noether). *Si  $C$  es una curva suave, no hiper elíptica, y  $K_C$  denota el divisor canónico de  $C$ , entonces las aplicaciones*

$$\mathrm{Sym}^n H^0(C, K_C) \rightarrow H^0(C, nK_C)$$

*son suprayectivas para toda  $n > 0$ .*

Nos auxiliaremos para calcular las sizigias del siguiente resultado.

**Theorem 1.2** (Green). *Si  $C$  es una curva genérica de género  $g$ , el haz canónico  $K_C$  satisface*

$$k_{p,2}(C, K_C) \cong k_{g-p-2,1}(C, K_C)^\vee.$$

La siguiente versión del teorema de Brill-Noether es burda, sin embargo es suficiente para nuestro estudio de curvas canónicas y sus proyecciones. Recordamos la definición del número de Brill-Noether:

$$\rho(g, r, d) := g - (r + 1)(g - d + r).$$

**Theorem 1.3** (Brill-Noether).

- (1) Si  $\rho(g, r, d) \geq 0$ , entonces toda curva de género  $g$  admite un morfismo no degenerado de grado  $d$  o menos a  $\mathbb{P}^r$ .
- (2) Para una curva general esta cota es precisa; esto es, una curva general de género  $g$  admite un morfismo no degenerado de grado  $d$  o menos a  $\mathbb{P}^r$  si y solo si  $\rho \geq 0$ .

**Proposition 1.4** (Zariski, Caporaso - Harris). *Si  $C$  es una curva general de género  $g$ , entonces la aplicación  $\phi : C \rightarrow \mathbb{P}^2$  inducida por un  $g_d^2$  general es birracional en su imagen con nodos como únicas singularidades.*

La siguiente tabla resume los grados y números de nodos de curvas genéricas de género  $g$  que admiten un  $g_d^2$ . También indica si los nodos están en posición general.

Género	Grado	$\delta$	$\frac{d(d+3)}{2} - 3\delta$	$\rho$
1	3	0	9	1
2	4	1	11	2
3	4	0	14	0
4	5	2	14	1
5	6	5	12	2
6	6	4	15	0
7	7	8	11	1
8	8	13	5	2
9	8	12	8	0
10	9	18	0	1
11	10	25	-10	2
12	10	24	-7	0
13	11	32	-19	1
14	12	41	-33	2
15	12	40	-30	0

Tabla teorema de Brill-Noether

## 2. CONFIGURACIÓN DE NODOS INDUCEN NÚMEROS DE BETTI EN CURVAS CANÓNICAS

Para géneros menores de 11, los modelos planos de curvas genéricas son curvas planas de grado  $d$  con  $\delta$  nodos en posición general. Ver tabla del teorema de Brill-Noether. La siguiente pregunta guiará nuestro estudio sobre familias de curvas:

**Pregunta 2.1.** ¿Cómo depende la tabla de Betti de la curva canónica  $C \subset \mathbb{P}^{g-1}$  de la configuración de los nodos en  $\mathbb{P}^{2[\delta]}$  del modelo plano de  $C$ ?

De la pregunta anterior se deriva lo siguiente: ¿existe una relación entre puntos base de divisores efectivos en  $\mathbb{P}^{2[\delta]}$  y tablas de Betti de las curvas encajadas?

A manera de ejemplo, observar que existen configuraciones especiales de puntos  $\Gamma \in \mathbb{P}^{2[\delta]}$  tal que

$$\phi_D(Bl_\Gamma(\mathbb{P}^2)) \subset |D| = \mathbb{P}^N$$

tiene números de Betti especiales. En este caso, las syzygías de la superficie  $S = \phi_D(Bl_\Gamma(\mathbb{P}^2))$  inducirán syzygías especiales de la curva canónica  $C \subset |D|$ . Listamos algunos ejemplos:

- (1)  $g = 5, \delta = 5$ , una de estas configuraciones son 4 puntos colineales.
- (2)  $g = 6, \delta = 4$ , una de estas configuraciones son 4 puntos colineales.
- (3) Para  $g = 8$ , podemos considerar una curva plana de grado 8 con 13 nodos cuya resolución minimal es de la forma

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(-7) \oplus \mathcal{O}(-5) \rightarrow \mathcal{O}(-4)^3.$$

Una curva canónica obtenida de esta forma tiene tabla de Betti

1						
	15	40	45	24	5	
	5	24	45	40	15	
						1

### 3. CURVAS CANÓNICAS DE GÉNERO 4 (HOMEGENIZAR CON $g = 6$ .)

Consideremos una curva  $C$  de género 4 y su clase canónica  $K_C$ . Notemos que  $|K_C| \cong \mathbb{P}^3$  y además

$$\phi_{K_C} : C \rightarrow \mathbb{P}^3$$

es un encaje, si  $C$  no es hiper elíptica. Esto nos indica los generadores y sizigias del ideal de  $C$ ,

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(-5) \rightarrow \mathcal{O}(-2) \oplus \mathcal{O}(-3) \rightarrow \mathcal{I}_C \rightarrow 0.$$

En efecto,

Curva genérica			
1	-	-	
-	1	-	
-	1	-	
-	-	1	

La familia de estas curvas abstractas, denotada  $\mathcal{M}_4^{gen}$ , tiene dimensión  $\dim \mathcal{M}_4^{gen} = 9$ . En efecto, la curva canónica genérica  $C \subset \mathbb{P}^3$  es una intersección completa de una cuádrica  $Q$  y una cúbica. Esto nos indica que  $C$  es un elemento del sistema lineal  $C \in |\mathcal{O}_Q(3, 3)|$ . Dicho sistema lineal tiene dimensión  $\dim |\mathcal{O}_Q(3, 3)| = 15$ , por lo tanto las ecuaciones de  $C$  dependen de  $15 + 9 = 24$  parámetros, pues el espacio de cuádricas en  $\mathbb{P}^3$  tiene dimensión 9. Por lo tanto, eliminando la elección de una base del espacio  $H^0(C, K_C)$  obtenemos que la familia de curvas abstractas de este tipo tiene dimensión

$$\dim \mathcal{M}_4^{gen} = 24 - 15 = 9.$$

El párrafo anterior sugiere que la familia de curvas abstractas  $\mathcal{M}_4^{gen}$  es birracional al espacio total de un haz proyectivo. A saber, un haz con espacio base  $\mathbb{P}^9$  y fibra  $\mathbb{P}^{15}$ : el espacio base parametriza una cuádrica  $Q$  y un punto en su fibra parametriza una cúbica que no contiene a  $Q$ . Este es en efecto el caso y se demuestra en [Maksym].

**Modelo plano de una curva genérica.** La tabla de Brill-Noether arriba nos indica que la curva genérica de género 4 admite un morfismo a  $\mathbb{P}^2$  de grado 5 *i.e.*, admite un  $g_5^2$ . Por la fórmula de grado & género, sabemos que dicho modelo plano es una curva  $C$  irreducible y reducida de grado 5 con dos nodos en  $p, q \in \mathbb{P}^2$  como únicas singularidades.

El sistema lineal  $|D| = |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2H - p - q)| = \mathbb{P}^3$  induce un morfismo sin puntos fijos

$$\phi_D : Bl_{p,q}(\mathbb{P}^2) \rightarrow \mathbb{P}^3,$$

el cual contrae la línea que une los nodos  $l = \overline{pq}$ . La imagen  $Q := \phi_D(Bl_{p,q}(\mathbb{P}^2))$  es una superficie cuádrica suave  $Q \subset \mathbb{P}^3$  la cual contiene a la desingularización  $\tilde{C}$ ,

$$\phi_D(\tilde{C}) \subset Q \subset \mathbb{P}^3.$$

Es decir, el morfismo  $\phi_D$  restringido a la curva  $\tilde{C}$  es un isomorfismo  $\tilde{C} \cong \phi_D(\tilde{C})$ . Por lo tanto el ideal de la curva  $\tilde{C} \subset \mathbb{P}^3$  está definido por una cuádrica suave  $Q$  y una cúbica que no contenga a  $Q$ .

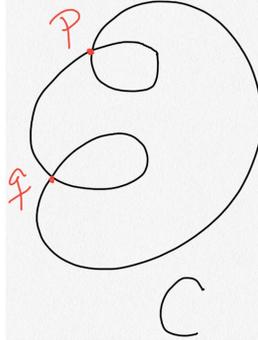


FIGURE 1. Curva de grado 5 y dos nodos.

**Encontrando los  $g_d^1$ 's:** El teorema de Brill-Noether predice un número finito de  $g_3^1$ 's en una curva general de  $C$  género 4. En efecto, las dos reglas de la superficie cuádrlica que contiene a  $C \subset Q \subset \mathbb{P}^3$  son dichos  $g_3^1$ 's. Dado que la cuádrlica que contiene a  $C_{can} \subset \mathbb{P}^3$  es única, entonces el Teorema de Riemann-Roch, implica que estos son los únicos  $g_3^1$  en  $C$ .

**Especializando los nodos.** Los nodos de la curva  $C$  soportados en  $p, q$ , pueden colapsar en uno en el otro. Si este es el caso, el subsquema que esta colisión  $I_0$ , es no reducido de longitud 2. El sistema lineal  $|D|$ , compuesto por cónicas que pasan por  $p$  y  $q$ , por tanto se especializa a  $|D_0|$  sistema (no lineal en  $\mathbb{P}^2$ ) de cónicas que pasan por  $p (= q)$  y que tienen una línea tangente fija, denotada  $L$ . Dicha línea tangente define un punto en el divisor excepcional  $l \in E_p$  y el cual es un punto base del sistema lineal  $\tilde{D}_0$  en  $Bl_p(\mathbb{P}^2)$ .

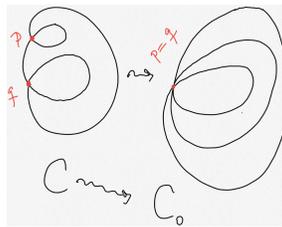


FIGURE 2. Curva  $C_0$  de grado 5 y un tacnodo.

Explotando el punto  $l \in E_p$ , resolvemos el morfismo racional  $\phi_{\tilde{D}_0}$  inducido por  $\tilde{D}_0$ . La imagen de esta resolution

$$\phi : Bl_{p,l}(\mathbb{P}^2) \rightarrow \mathbb{P}^3$$

es una cuádrlica singular. En efecto, el morfismo  $\phi$  contrae una curva de autointersección  $-2$ ; a saber, la transformada estricta del divisor excepcional  $E_p$ .

Observar que cuando la superficie cuádrica que contiene a  $C \subset Q$  es un cono, los dos  $g_3^1$ 's colapsan el uno solo. La familia de curvas abstractas de este tipo forma un divisor en la familia  $\mathcal{M}_4^{gen}$ .

*Ejercicio:* Denotemos por  $\mathfrak{D}_0$  el sistema lineal completo en  $Bl_{p,l}(\mathbb{P}^2)$  inducido por  $\tilde{D}_0$ . Calcular el número de intersección  $\mathfrak{D}_0.E_l$ , donde  $E_l$  es el divisor excepcional sobre el punto  $l \in E_p$ .

*Ejercicio:* Calcular el número de intersección  $\mathfrak{D}_0.\tilde{L}$ , donde  $\tilde{L}$  es la transformada estricta en  $Bl_{p,l}(\mathbb{P}^2)$  de la línea tangente  $L \subset \mathbb{P}^2$ .

CURVAS DE GÉNERO 5

Consideremos una curva  $C$  de género 5 y su clase canónica  $K_C$ . Notemos que  $|K_C| \cong \mathbb{P}^4$  y por tanto el morfismo canónico es

$$\phi_{K_C} : C \rightarrow \mathbb{P}^4.$$

Observemos que

$$H^0(C, 2K_C) = 16 - 5 + 1 = 12,$$

y además que  $h^0(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}(2)) = 15$ . Esto nos indica que la curva canónica  $\phi(C)$  está contenida en 3 cuádricas independientes. El teorema de Enriques & Babbage nos indica que éstas generan el ideal  $I_C$ . Recíprocamente, dadas 3 cuádricas independientes, la fórmula de adjunción aplicada 3 veces, nos dice que la intersección transversal de estas cuádricas es una curva de género 5 y grado 8.

*Ejercicio:* Calcular la resolución minimal del ideal de la curva  $C$ , notar que ésta es pura:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(-5) \rightarrow \mathcal{O}(-3)^3 \rightarrow \mathcal{O}(-2)^3 \rightarrow \mathcal{I}_C \rightarrow 0.$$

¿Qué dimensión tiene el espacio de estas curvas abstractas? La curva  $\phi_{K_C}(C) = C$  está determinada por un subespacio de dimensión 3 en el espacio de cuádricas en  $\mathbb{P}^4$ . Es decir un punto en la Grassmanniana  $\mathbb{G}(2, 14)$  la cual tiene dimensión 36. Eliminando la elección de una base en  $H^0(C, \Omega)$ , obtenemos que  $C$  está determinada por  $36 - 24 = 12$  parámetros.

El comentario de arriba sugiere que el espacio de estas curvas abstractas, denotado  $\mathcal{M}_5$ , es birracional al cociente

$$\mathcal{M}_5 \cong \mathbb{G}(2, 14)^{ss} // SL(5).$$

Este es en efecto el caso y se demuestra en el artículo [Maksym].

**Modelo plano de la curva genérica.** Consideremos una séxtica plana con 5 nodos en posición general  $p_1, \dots, p_5$ . En este caso, el sistema lineal tiene dimensión 4, *i.e.*,  $|3H - p_1 - \dots - p_5| \cong \mathbb{P}^4$ , y además induce un sistema lineal completo  $|\tilde{D}|$  y sin puntos base el la exposición  $Bl_\Gamma(\mathbb{P}^2)$ , *i.e.*, obtenemos un morfismo

$$\phi_{\tilde{D}} : Bl_\Gamma(\mathbb{P}^2) \rightarrow \mathbb{P}^4,$$

donde  $\Gamma$  denota los puntos  $p_1, \dots, p_5$ .

Notar que la imagen de  $\phi_{\tilde{D}}$  es una superficie  $S$  de grado 4 en  $\mathbb{P}^4$ ; una superficie del Pezzo.

Más aún, de esta descripción deducimos que la curva  $C \in |\mathcal{O}_S(2)|$ . Es decir  $C$  es la intersección transversal de tres cuádricas en  $\mathbb{P}^4$ .

Observar que las curvas de esta sub sección no admiten 3-secantes. La familia de curvas con trisecantes es el tema de la siguiente sub sección.

Brill-Noether: las superficies del Pezzo que contienen a una curva canónica fija en  $\mathbb{P}^4$  forman una familia de dimensión 2. Es decir, la representación plana de la curva abstracta  $C$  varia en una familia de dimensión 2.

**Cambio de números de Betti: el divisor de Koszul.** Los números de Betti de una curva de género 5 y grado 8 podrían no ser los de párrafo de arriba. Esto sucede, por ejemplo, cuando la intersección de las tres cuádricas arriba dejan de definir una curva. En este caso, dichas cuádricas definen una superficie donde yace la curva  $C$ . Esta superficie es reglada cúbica (cubic scroll) y la denotaremos por

$S_{1,2}$ . Describamos esta superficie  $S_{1,2}$ . Consideremos una línea  $l$  y una cónica  $C_0$  ambas contenidas en  $\mathbb{P}^4$ . La superficie  $S_{1,2}$  es la unión de las líneas  $\overline{xf(x)}$ , donde  $f : l \rightarrow C_0$  es un isomorfismo fijo. Afirmamos que esta superficie es la intersección transversal de tres cuádricas,  $S_{1,2} = Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3$ . Por lo tanto, el ideal de una curva  $C \subset S_{1,2}$  debe tener ecuaciones adicionales a las 3 cuádricas  $Q_1, Q_2, Q_3$ .

Más aún, las curvas  $C \subset S_{1,2}$  satisfacen que las cuádricas en su ideal no generan las cúbicas del mismo. Es decir, el morfismo multiplicación por formas lineales

$$I_2 \otimes H^0(K_C) \rightarrow I_3,$$

no es un isomorfismo.

**Modelo plano de la curva  $C \subset S_{1,2}$ :** una descripción alternativa de la superficie  $S_{1,2}$  es la siguiente. Consideremos el plano  $\mathbb{P}^2$  y el sistema lineal  $|D| = |2H - p|$  de cónicas que pasan por un punto fijo  $p$ . Notar que  $|D| \cong \mathbb{P}^4$  y que además induce un sistema lineal completo  $|\tilde{D}|$  en la explosión  $Bl_p(\mathbb{P}^2)$ . Más aún,  $|\tilde{D}|$  no tiene puntos base y por tanto induce un morfismo

$$\phi_{\tilde{D}} : Bl_p(\mathbb{P}^2) \xrightarrow{\tilde{D}} \mathbb{P}^4.$$

La imagen de este morfismo  $\phi_{\tilde{D}}$  es una superficie cúbica reglada  $S_{1,2}$ .

En efecto, el morfismo  $\phi_{\tilde{D}}$  manda líneas que pasan por  $p$ , denotadas por  $L$ , a las líneas que unen  $l$  y  $C_0$ . Más aún, el divisor excepcional  $E$  es mandado a la *directrix* de  $S_{1,2}$ ; la línea  $l$ . Ver Recuadro 1, [CL2018].

Si denotamos por  $F$  una curva quíntica con un nodo en  $\mathbb{P}^2$ , entonces su transformada estricta tiene clase  $\tilde{F} = 5H - 2E \in \text{Pic}(Bl_p(\mathbb{P}^2))$  y además ésta es una curva suave de género 5. Afirmamos que  $\phi_{\tilde{D}}(\tilde{F}) = C$ .

Dado que la clase del hiperplano de  $S_{1,2}$  es  $\mathcal{O}(1) = 2H - E$ , deducimos que la curva  $C \cup L \in |\mathcal{O}_{S_{1,2}}(3)|$ . Es decir, existe  $Z \subset \mathbb{P}^4$  una hipersuperficie cúbica, tal que

$$S_{1,2} \cap Z = C \cup L.$$

Por lo tanto, ideal  $I_C$  admite un morfismo

$$\mathcal{O}(-2)^3 \oplus \mathcal{O}(-3)^2 \rightarrow I_C \rightarrow 0.$$

Un cálculo de cohomología, nos permite afirmar que estos son todos los generadores del ideal  $I_C$ . Observar that el número de Brill-Noether es

$$\rho(5, 2, 5) = -1.$$

*Ejercicio:* Escribir la resolución minimal libre de  $I_C$ .

**Comentario:** ¿Qué tipo de subvariedad forman las curvas  $C \subset S_{1,2}$  en el espacio móduli  $\mathcal{M}_5$ ?

Estimemos la dimensión de la familia  $\mathcal{T} \subset \mathcal{M}_5$  que parametriza clases de isomorfismo de curvas de género 5 contenidas en superficies regladas cúbicas  $C \subset S_{1,2}$ .

El esquema de Hilbert de superficies  $S_{1,2} \subset \mathbb{P}^4$ , denotado por  $\mathcal{H}$ , tiene dimensión 18. En efecto, dado que  $|\tilde{D}| \cong \mathbb{P}^4$ , entonces el número de opciones para escoger secciones de  $\mathcal{O}(\tilde{D})$  son  $(4 + 1)^2 = 25$ . Dado que  $\dim \text{Aut}(Bl_p(\mathbb{P}^2)) = 6$ , entonces  $\dim \mathcal{H} = 25 - 1 - 6 = 18$ .

Por otro lado, observar que la dimension del sistema lineal  $\dim |\mathcal{O}_S(\tilde{F})| = 17$ . Esto se sigue de Riemann-Roch (¿de qué otra cosa se podría seguir?)

$$\chi(S_{1,2}, \mathcal{O}(\tilde{F})) = \chi(\mathcal{O}) + \frac{1}{2}(5H - 2E)(8H - 3E) = 18,$$

si  $h^1 = 0$ . La dimensión que deseamos estimar es por lo tanto

$$\dim \mathcal{T} = \dim \mathcal{H} + \dim |\tilde{F}| - \dim \text{Aut} \mathbb{P}^4 = 11.$$

Por lo tanto estimamos que esta familia  $\mathcal{T}$  forma un divisor en  $\mathcal{M}_5$ .

En efecto  $\mathcal{T}$  es un divisor en  $\mathcal{M}_5$  que parametriza clases de isomorfismo de *curvas trigonales*. Esto es, dichas curvas cargan un  $g_3^1$ , que en este caso proviene de la regla de  $S_{1,2}$ :

$$C.(\text{regla de } S_{1,2}) = (5H - 2E)(H - E) = 3.$$

Recíprocamente,

**Proposition 3.1** (Enriques, Harris). *La unión de 3-secantes de una curva de género 5 y grado 8,  $C \subset \mathbb{P}^4$ ,*

$$S_{1,2} = \bigcup_{L \in |g_3^1|} L,$$

*es una superficie cúbica  $S_{1,2}$ .*

De lo descrito en esta sección concluimos: *la curva genérica de género 5 en su encaje canónico no tiene 3-secantes. Las curvas que sí admiten 3-secantes forman un divisor en  $\mathcal{M}_5$ . Además, los generadores de la resolución minimal diferencia entre estos dos casos.*

Observar que el modelo plano de una curva genérica se especializa al modelo plano de una curva que tiene una 3-secante de la siguiente manera: en una séxtica con 5 nodos, éstos se especializan a una configuración donde 4 nodos son colineales. En este caso, la superficie del Pezzo

$$Bl_{\Gamma} \mathbb{P}^2 \subset |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3L - p_1 - p_2 - p_3 - p_4 - p_5)| \cong \mathbb{P}^4,$$

se especializa a una superficie cúbica reglada  $S_{1,2}$ . En efecto, cuando 4 puntos son colineales, el sistema lineal  $|3L - p_1 - p_2 - p_3 - p_4 - p_5|$  adquiere una componente fija. Removiendo dicha componente obtenemos el sistema lineal  $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2H - p)| \cong \mathbb{P}^4$ .

*Ejercicio:* Calcular los invariantes del haz  $E$  sobre  $\mathbb{P}^1$  tal que  $S_{1,2} = \mathbb{P}(E)$ .

*Ejercicio:* ¿Existen curvas elípticas de género 5 y grado 8 en  $\mathbb{P}^4$  que sean límites de curvas genéricas?

*Ejercicio:* Calcular la clase del divisor  $\mathcal{T}$  en  $\text{Pic}(\overline{\mathcal{M}}_5)$ . ¿Esta clase coincide con la clase de del siguiente divisor

$$\mathcal{M}_{5,3}^1 = \{C \in \mathcal{M}_5 \mid I_2(K_C) \otimes H^0(K_C) \neq I_3(K_C)\}?$$

**Pregunta 3.2.** La superficie reglada  $S_{1,2} \subset \mathbb{P}^4$  induce una curva de grado 3 en la Grassmanniana  $\mathbb{G} := \mathbb{G}(1,4)$ . Es decir, un elemento del espacio móduli de Kontsevich  $\mathcal{M}_{0,0}(\mathbb{G},3)$ . Observar que la dimensión de este espacio  $\dim \mathcal{M}_{0,0}(\mathbb{G},3) = 6 + 15 - 3 = 18$ . Por tanto, existe una aplicación biracional del esquema de Hilbert de regladas cúbicas  $\mathcal{H}$  al espacio móduli de Kontsevich

$$\phi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{M}_{0,0}(\mathbb{G},3).$$

¿Qué tipo de aplicación es  $\phi$  exactamente?

**Pregunta 3.3.** Si  $C \subset \mathbb{P}^4$  es una curva canónica de género 5, la proyección de  $C$  a un plano general es una curva  $C' \subset \mathbb{P}^2$  de grado 8 con 16 nodos. ¿Cuál es la familia  $K_5 \subset \mathbb{P}^{2[16]}$  que parametriza los 16 nodos de estas curvas  $C'$ ?

**Proposition 3.4.** *Los 16 nodos de la proyección  $C'$  están contenidos en una curva de grado 4.*

**Comentario:** La familia de configuraciones de 16 puntos contenidas en una curva de grado 4 tiene dimensión  $\binom{4+2}{2} - 1 + 16 = 30$ . Sin embargo, 16 puntos sobre una cuártica no son, en general, los nodos de una curva plana de grado 8. La familia de 16 puntos sobre una cuártica que sí son nodos de una curva de grado 8 tiene dimensión 28.

El rayo extremal no trivial del cono efectivo de  $\mathbb{P}^{2[16]}$  está generado por el divisor de Brill-Noether de un haz  $E$  que admite las siguientes sucesiones exactas cortas:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(2)^3 \rightarrow \mathcal{O}(3)^4 \oplus \mathcal{O}(4)^6 \rightarrow E \rightarrow 0 \quad (1)$$

$$0 \rightarrow E \rightarrow \mathcal{O}(5)^{12} \rightarrow \mathcal{O}(6)^5 \rightarrow 0. \quad (2)$$

Asimismo, un elemento general  $Z \in K_5$  admite una resolución minimal de la forma

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(-7)^2 \rightarrow \mathcal{O}(-5)^2 \oplus \mathcal{O}(-4) \rightarrow \mathcal{I}_Z \rightarrow 0. \quad (3)$$

Si consideramos la ecuación (3), hacemos producto tensorial con  $E$  y tomamos cohomología, obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(\mathbb{P}^2, E(-7))^2 &\rightarrow H^0(\mathbb{P}^2, E(-5))^2 \oplus H^0(\mathbb{P}^2, E(-4)) \\ &\rightarrow H^0(\mathbb{P}^2, E \otimes \mathcal{I}_Z) \rightarrow H^1(\mathbb{P}^2, E(-7))^2. \end{aligned}$$

De la resolución (1) sigue que

$$h^0(\mathbb{P}^2, E(-5)) = 0, h^0(\mathbb{P}^2, E(-4)) = 6.$$

Similarmente, de la resolución (2) sigue que

$$h^0(\mathbb{P}^2, E(-7)) = h^1(\mathbb{P}^2, E(-7)) = 0.$$

Concluimos que

$$h^0(\mathbb{P}^2, E \otimes \mathcal{I}_Z) = 6$$

y por lo tanto,  $K_5$  está contenido en el lugar base estable del divisor  $D_E$ . En efecto, el lugar base de la clase  $D_E$  es... (?)

De hecho, la configuración de 16 puntos sobre una cuártica general pertenece al lugar base estable de  $D_\mu := \mu H - \frac{\Delta}{2}$  para valores  $\mu \in [30/7, 9/2)$ . El elemento general de  $K_5$  cumple la misma propiedad. Es decir, dada una configuración de 16 puntos sobre una cuártica, no podemos determinar si ésta pertenece a  $K_5$  en términos de interpolación respecto a algún haz vectorial. Esto lo podemos interpretar como sigue: la configuración general de  $K_5$  y la de  $C(4, 16)$ , imponen condiciones idénticas en secciones globales de haces en  $\mathbb{P}^2$ .

**Pregunta 3.5.** ¿La construcción de arriba define un morfismo del esquema de Hilbert  $\mathcal{H}_{8,5}$  en el espacio móduli de curvas de género 3,

$$\mathcal{H}_{8,5} \rightarrow \mathcal{M}_3?$$

**La variedad de Prym.** Consideremos  $C \subset \mathbb{P}^2$  la proyección genérica a un plano de una curva canónica general de género 5. Dicha curva  $C$  es irreducible de grado 8 y tiene 16 nodos como únicas singularidades. Estos nodos  $\Gamma_C$ , tienen la siguiente resolución minimal

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(-7)^2 \rightarrow \mathcal{O}(-5)^2 \oplus \mathcal{O}(-4) \rightarrow \mathcal{I}_{\Gamma_C} \rightarrow 0,$$

en particular viven en una cuártica  $C_0$ . Por lo tanto, existen dos curvas de grado 8 que son nodales en  $\Gamma_C$ ; a saber  $C$  y  $C_0^2$ . El espacio total del pincel generado por estas dos cuárticas, denotado  $P$ , nos arroja una familia (¿trivial?) de curvas de género geométrico 5 y con fibra central  $C_0^2$ .

**Proposition 3.6.** *La superficie  $P$  es singular a lo largo de  $C_0$  y su normalización  $\tilde{P}$  tiene una fibra central sobre  $\mathbb{P}^1$  una curva  $T$  de género 5 la cual es una cubierta étale de  $C_0$ ,*

$$\phi : T \xrightarrow{2:1} C_0.$$

La aplicación étale  $\phi$  induce una aplicación entre las jacobianas

$$Jac(T) \longrightarrow Jac(C_0),$$

cuyo kernel  $ker^*(\phi) := Prym(T, C_0)$  es una variedad abeliana de diemension 2; a saber la variedad de Prym de la cubierta  $\phi$ .

La construcción de arriba nos arroja una aplicación entre el espacio móduli  $\mathcal{R}_3$ , el cual es una cubierta finita de  $\mathcal{M}_3$ , y el espacio móduli de superficies abelianas,

$$Prym_3 : \mathcal{R}_3 \longrightarrow \mathcal{A}_2 \cong \mathcal{M}_2,$$

definida por  $[T \rightarrow C_0] \mapsto Prym(T, C_0)$ .

[¿La geometría de los 16 nodos de  \$C\$  nos dicen algo sobre la aplicaión  \$Prym\_3\$ ?](#)

**Curvas canónicas contenidas en superficies K3.** La intersección completa genérica de tres cuádras  $S = Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3 \subset \mathbb{P}^5$  es una superficie K3. Un elemento del sistema lineal  $|\mathcal{O}_S(1)|$  es una curva de género aritmético 5 y grado 8. Concluimos que el sistema lineal canónico de la curva  $C$  está dado por su autointersección en la superficie  $S$ ,  $|K_C| = |\mathcal{O}_S(C)|_C$ .

Los diagramas de Betti de las curvas estudiadas en esta sección son:

Curva general de género 5	$\exists! g_3^1$	$\exists! g_2^1?$
1 - - -	1 - - -	
- 3 - -	- 3 2 -	
- - 3 -	- 2 3 -	
- - - 1	- - - 1	

#### 4. CURVAS DE GÉNERO 6

Una curva suave de género 6 puede ser una de las siguientes: hyper elíptica, trigonal, bielítica, una quíntica plana, una sección cuadrática de una superficie del Pezzo  $S_5$  la cual ha sido encajada en  $\mathbb{P}^5$  con la serie lineal anti canónica  $|-K_{S_5}|$ . Las curvas generales aparecen este último caso *i.e.*, contenidas en  $S_5$ , donde esta superficie es suave.

Consideremos una curva abstracta  $C$  de género 6 que no sea hiperelíptica. En este caso, la serie lineal canónica  $|K_C|$  la realiza como una curva de grado 10 en  $\mathbb{P}^5$

$$\phi_{K_C} : C \rightarrow C_{can} \subset \mathbb{P}^5.$$

A continuación, calcularemos las posibles resoluciones minimales libres del ideal de la curva canónica  $C_{can}$ . Además, compararemos éstas con las opciones de  $C$  listadas en el párrafo anterior.

**4.1. Curvas genéricas.** Consideremos una curva de género 6 que no es hiper elíptica,  $C$ . El sistema lineal canónico realiza la curva  $C$  como curva de grado 10,

$$\phi_{K_C} : C \rightarrow C_{can} \subset \mathbb{P}^5.$$

Por el teorema de Noether, sabemos el morfismo  $\text{Sym}^2 H^0(C, K_C) \rightarrow H^0(C, 2K_C)$  es suprayectivo. Por tanto el teorema de Riemann-Roch implica que el espacio de cuádricas que contienen a la curva  $C_{can}$ , es el kernel

$$K_{1,1} := \ker (\text{Sym}^2 H^0(C, K_C) \rightarrow H^0(C, 2K_C)),$$

el cual tiene dimensión  $k_{1,1} = 21 - 15 = 6$ .

Por otro lado, el teorema de Enriques & Babbage garantiza que sólo necesitamos cuádricas para generar el ideal de una curva genérica. Esto implica que las cuádricas en el ideal  $I_{C_{can}}$ , donde  $C_{can}$  es genérica, generan las cúbricas en él y por tanto el morfismo multiplicación

$$\mu_1 : (I_{C_{can}})_2 \otimes H^0(C, K_C) \rightarrow (I_{C_{can}})_3,$$

es un isomorfismo; en particular,  $\dim (I_{C_{can}})_3 = 36$ . De estas cúbricas, algunas son syzygias entre las cuádricas; estimemos cuántas son.

Podemos calcular cuántas hiper superficies cúbricas contienen a la curva  $C_{can}$  de la siguiente sucesión exacta

$$0 \rightarrow I_{C_{can}}(3) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(3) \rightarrow \mathcal{O}_{C_{can}}(3) \rightarrow 0.$$

De nuevo, por el teorema de Noether y el teorema de Riemann-Roch, tenemos que  $h^0(I_{C_{can}}(3)) = 56 - 30 + 6 - 1 = 31$ . Dado que hay 36 cúbricas en  $(I_C)_3$ , y éstas son la imagen del morfismo multiplicación  $\mu_1$ , entonces existen 5 cúbricas que son syzygias lineales de las cuádricas generadoras. Es decir, el espacio de 1-syzygias entre las cuádricas es el kernel del morfismo multiplicación

$$K_{2,1} := \ker (I_C(2) \otimes H^0(C, K_C) \rightarrow I_C(3)),$$

donde  $I_C(k)$  denota el espacio de hiper superficies de grado  $k$  que contienen a la curva  $C$ , el cual tiene dimension  $k_{2,1} = 5$ .

El espacio de 2-sizigias entre las cuádricas tiene dimensión  $k_{2,2} = 5$ , por el teorema de Green. De la misma forma, el teorema de Green nos dice que la resolución minimal del ideal de  $C_{can} \subset \mathbb{P}^5$  se escribe se escribe:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(-7) \rightarrow \mathcal{O}(-5)^6 \rightarrow \mathcal{O}(-4)^5 \oplus \mathcal{O}(-3)^5 \rightarrow \mathcal{O}(-2)^6 \rightarrow \mathcal{I}_{C_{can}} \rightarrow 0.$$

La tabla de Betti de esta resolución se escribe:

Curva genérica de género 6				
0	1	2	3	4
1	6	5	-	-
2	-	5	6	-
3	-	-	-	1

**4.2. Modelo plano de curvas genéricas.** Una curva  $C$  admite un modelo plano como una séxtica con 4 nodos  $\Gamma$ . Si los puntos  $\Gamma$  están en posición general, entonces la curva canónica  $C_{can}$  está contenida en  $S_5$  una superficie del Pezzo de grado 5. En efecto, el sistema lineal canónico de la séxtica nodal está definido por la restricción de las curvas en  $|D| = |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3H - \Gamma)|$ . Este sistema lineal, induce un encaje de la explosión del plano en  $\Gamma$  en el espacio  $\mathbb{P}^5$ ,

$$\phi_D : Bl_{\Gamma}\mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^5.$$

La imagen  $\phi_D(Bl_{\Gamma}\mathbb{P}^2) = S_5$ , es la superficie del Pezzo de grado 5 en  $\mathbb{P}^5$ .

Observar que la familia de superficies del Pezzo de grado 5 abstractas es un punto. Es decir, la superficie del Pezzo  $S_5 \subset \mathbb{P}^5$  es única, hasta por isomorfismo. En efecto, el esquema de Hilbert de estas superficies, denotado por  $\mathcal{H}_{S_5}(\mathbb{P}^5)$ , tiene una componente de dimension 35. Esto se sigue de la ecuación

$$\dim \mathcal{H}_{S_5}(\mathbb{P}^5) = 36 - 1 - \dim \text{Aut}(S_5),$$

y de la siguiente proposición.

**Proposition 4.1.** *El grupo de automorfismos  $\text{Aut}(S_5)$  de una superficie del Pezzo de grado 5 en  $\mathbb{P}^5$  es finito.*

*borrador de la prueba:* Los automorfismos de  $S_5$  no inducen automorfismos triviales en el sistema de raíces  $A_5$ . El grupo de autormorfismos de éste es finito.  $\square$

La discusión de arriba implica que la familia de curvas abstractas que yacen en una superficie del Pezzo  $S_5$ , la denotaremos  $\mathcal{M}_6^{gen}$ , es birracional al cociente

$$\mathcal{M}_6^{gen} \cong |\mathcal{O}_{S_5}(2)|/\text{Aut}(S_5).$$

En particular, tiene dimensión  $\dim \mathcal{M}_6^{gen} = 15$ . Ah ja! En este caso no es posible estimar la dimensión de  $\mathcal{M}_6^{gen}$  de la misma manera que en género 5 pues  $C_{can}$  no es intersección completa.

4.3. **Especializando los nodos: divisor de Petri.** La familia de curvas abstractas tal que  $C_{can} \subset S_5 \subset \mathbb{P}^5$ , donde  $S_5$  tiene un único punto doble, forman un divisor en  $\mathcal{M}_6^{gen}$ .

Voy aquí.=====

**Definition 4.2.** Una curva suave de genero 6 se dice que es especial si es hipere-liptica, trigonal, bieliptica o isomorfa a una curva plana suave de grado 5.

Cualquier curva suave  $C$  de genero 6 tiene un divisor especial  $D$  de grado 6 y  $h^0(C, D) = 3$ . Consideremos el morfismo asociado a este divisor:

$$\varphi_D : C \rightarrow \mathbb{P}^2$$

**Proposition 4.3.** Sea  $C$  una curva suave de genero 6, entonces se cumple alguna de las siguientes afirmaciones:

- $\varphi_D$  es birracional y  $\varphi_D(C)$  es una sextica plana irreducible con unicamente puntos dobles
- $C$  es especial

**Theorem 4.4** (Enriques-Petri). El ideal de una curva canónica no hiperelíptica  $C$  de genero  $g > 3$  está generado por formas cuadráticas, con la excepción de dos casos:

- Cuando  $C$  vive en una superficie reglada no singular de grado  $g-2$  en  $\mathbb{P}^{g-1}$ , en cuyo caso  $C$  es trigonal.
- Cuando  $g = 6$  y  $C$  está contenida en la superficie de Veronese de  $\mathbb{P}^5$ .

Por Brill-Noether, el primer caso de la proposición 4.3 se corresponde con las curvas generales, de donde concluimos que su modelo plano, está representado por una séxtica plana con 4 nodos que al explotarlos se tiene una superficie del Pezzo  $S$  de grado 5 y la curva resulta ser un elemento del sistema lineal  $|-2K_S|$ . Además, por el teorema de Enriques-Petri (4.4), su ideal está generado por cuadráticas, por lo que su tabla de Betti es la siguiente:

Curva general de género 6				
1	-	-	-	-
-	6	5	-	-
-	-	5	6	-
-	-	-	-	1

Por lo tanto, para saber que otras tablas de Betti pueden aparecer, basta con analizar los casos especiales:

- [Esta es la especialización de 4 nodos colineales.](#) Si  $C$  es isomorfa a una quintica plana, entonces cualquier  $g_6^2$  en  $C$  es del tipo  $D(p) = g_5^2 + p$ ,  $p \in C$ . El modelo plano de  $C$  es una quintica plana. En este caso, la curva  $C$  está contenida en la superficie de Veronese de  $\mathbb{P}^5$  y su tabla de Betti es:

Curva isomorfa a una quintica plana				
1	-	-	-	-
-	6	8	3	-
-	3	8	6	-
-	-	-	-	1

- Esta es la especialización de 3 nodos colapsan. Si  $C$  es trigonal, entonces vive en una superficie reglada de grado 4 y tiene dos tipos de  $g_6^2$ :

$$D = 2g_3^1 \quad y \quad D(p) = K_C - g_3^1 - p, \quad p \in C$$

El modelo plano  $\varphi_D$  es una cónica triple y el de  $\varphi_{D(p)}$  es una sextica plana con un punto triple y un nodo. Sospecho que la tabla de Betti de este caso es idéntica a la de arriba (ambas están contenidas en superficies de grado 4 biregladas!!) pero no sé si ese argumento es suficiente.

- Si  $C$  es bi-elíptica, es decir, existe un morfismo  $\pi : C \rightarrow E$  con  $E$  curva elíptica, entonces, cualquier  $g_6^2$  se corresponde con  $\phi \circ \pi$  con  $\phi$  un  $g_2^1$  en  $E$ . El modelo plano de  $C$  es una cubica doble. ¿Admite  $C$  más de una estructura bi-elíptica?

**Encontrando los  $g_4^1$ 's:** El teorema de Brill-Noether predice un número finito de  $g_4^1$ 's en una curva general de  $C$  género 6. ¿Cuáles son?

**Proposition 4.5.** *Una curva genérica de género 6 admite exactamente cinco  $g_4^1$ .*

*Proof.* Si consideramos una curva general de género 6 como la normalización de una curva plana de grado 6 con 4 nodos, entonces los cinco  $g_4^1$ 's son: cuatro de ellos provienen del pincel de rectas con base en uno de los cuatro nodos y un quinto del pincel de cónicas que contienen a los cuatro nodos.

Mostremos que estos son todos los  $g_4^1$ 's que admite la curva  $C$ . Denotemos por  $D$  un  $g_4^1$  en  $C$ . Entonces, aplicando el teorema de Riemann-Roch obtenemos

$$h^0(D) - h^0(K_C - D) = 4 - 6 + 1.$$

Dado que el sistema lineal  $|K_C - D| = |3H - \Gamma - D|$  es generado por cúbicas planas que contienen los nodos  $\Gamma$  y los puntos en  $|D|$ , deducimos que los puntos en  $\Gamma + D$  fallan en imponer condiciones independientes en cúbicas  $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3)|$ . Por lo tanto, los 8 puntos  $\Gamma + D$  tienen dos opciones: 5 puntos son colineales ó los 8 están contenidos en una cónica. Esto concluye la proposición.  $\square$

**4.4. Modelo de Mukai en género 6.** Denotemos por  $\mathbb{G}(1, 4)$  a la Grassmanniana de líneas en  $\mathbb{P}^4$ . La dimensión  $\dim \mathbb{G}(1, 4) = 6$ , y su encaje de Plücker la realiza como una variedad de grado 5,

$$\mathbb{G}(1, 4) \rightarrow \mathbb{P}^9$$

donde su ideal lo generan las cuádricas de Plücker. Dichas cuádricas son las relaciones que guardan los menores  $2 \times 2$  de una matriz  $2 \times 5$ . No es difícil mostrar que la intersección transversal suave de  $\mathbb{G}(1, 4)$  con un espacio lineal  $\mathbb{P}^5$  tiene dimensión 2 y es isomorfa a una superficie del Pezzo de grado 5

$$S_5 \subset \mathbb{P}^5.$$

Es decir, las cuádricas de Plücker restringidas a un sub espacio lineal  $\mathbb{P}^5 \subset \mathbb{P}^9$ , coinciden con el ideal de  $S_5$ . Se sigue que una sección cuádrica  $X \subset \mathbb{P}^{10}$  en  $S_5 \subset \mathbb{P}^5$  es una curva canónica de grado 10 y género 6. En este caso,  $C$  es la intersección de cuádricas, por lo tanto no es trigonal, ni plana.

¿Qué curvas de género 6 se obtienen con la construcción del párrafo de arriba? La respuesta a esta pregunta es parte del contenido del siguiente teorema.

**Theorem 4.6** (Mukai). *Consideremos  $C$  una curva de género 6 que no es trigonal ni plana. Entonces*

- (1) Si  $E$  varía entre todos los haces estables de rango 2 sobre  $C$  con determinante canónico, el máximo  $h^0(E)$  es igual a 5. Además, dicho haz maximal  $E_{max}$  con  $h^0(E_{max}) = 5$  es único hasta por isomorfismo y generado por sus secciones.
- (2) Existe una biyección entre el conjunto de  $g_4^1$ 's y la intersección

$$H_\lambda \cap G(2, H^0(E_{max}))$$

## 5. CURVAS DE GÉNERO 7

5.1. **Especializando los nodos: 5 nodos colineales.** El modelo plano de género 7 genérica es una curva de grado 7 con 8 nodos. En el caso donde 5 nodos son colineales, la curva nodal es reducible: una línea y una curva de grado 6 con tres nodos. por tanto, analizaremos en esta subsección curvas de grado 6 con tres nodos  $\Gamma$ .

Nos interesa investigar la geometría del encaje canónico de  $C$ ,

$$C_{can} := \phi_{K_C}(C) \subset \mathbb{P}^6,$$

donde esta curva es birracional a una séxtica con tres nodos. En particular, nos interesa estudiar la relación entre la geometría de  $C_{can}$  y la de los nodos  $\Gamma$ . Si los 3 nodos son genéricos o colineales, la tabla de Betti del ideal de  $\phi_{K_C}(C)$  es la siguiente

Curva con un $g_6^2$					
1	-	-	-	-	-
-	10	16	9	-	-
-	-	9	16	10	-
-	-	-	-	-	1

Observar que la imagen de la explosión  $\phi : Bl_{\Gamma}\mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^7$ , contiene a  $C_{can}$  y puede ser suave o singular dependiendo de la posición de los nodos  $\Gamma$ .

## 6. CURVAS DE GÉNERO 8

Consideremos una curva de género 8 que no es hiper elíptica,  $C$ . El sistema lineal canónico

$$C \rightarrow |K_C| = \mathbb{P}^7,$$

realiza la curva  $C$  como curva de grado 14. Por el teorema de Noether, sabemos el morfismo  $\text{Sym}^2 H^0(C, K_C) \rightarrow H^0(C, 2K_C)$  es suprayectivo. Por tanto el teorema de Riemann-Roch implica que el espacio de cuádricas que contienen a la curva  $C$ , es el kernel

$$k_{1,1} := \ker (\text{Sym}^2 H^0(C, K_C) \rightarrow H^0(C, 2K_C)),$$

el cual tiene dimension  $\dim k_{1,1} = 36 - 28 + 8 - 1 = 15$ .

Por otro lado, el teorema de Enriques & Babbage garantiza que sólo necesitamos cuádricas para generar el ideal de una curva genérica. Esto implica que las cuádricas en el ideal  $I_C$ , deonde  $C$  es genérica, generan las cúbicas en él y por tanto el morfismo multiplicación

$$(I_C)_2 \otimes H^0(C, K_C) \rightarrow (I_C)_3,$$

es un isomorfismo. De estas cúbicas, algunas son syzygias entre las cuádricas; estimemos cuántas son.

Podemos calcular cuántas hiper superficies cúbicas contienen a la curva  $C$  de la siguiente sucesión exacta

$$0 \rightarrow I_C(3) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3) \rightarrow \mathcal{O}_C(3) \rightarrow 0.$$

De nuevo, por el teorema de Noether y el teorema de Riemann-Roch, tenemos que  $h^0(I_C(3)) = 120 - 42 + 8 - 1 = 85$ . Dado que hay 120 cúbicas en  $(I_C)_3$ , y éstas con la imagen del morfismo multiplicación  $\mu_1$ , entonces existen 35 cúbicas que son syzygias lineales de las cuádricas generadoras. Es decir, el espacio de 1-syzygias es el kernel del morfismo multiplicación

$$k_{2,1} := \ker (I_C(2) \otimes H^0(C, K_C) \rightarrow I_C(3)),$$

donde  $I_C(k)$  denota el espacio de hiper superficies de grado  $k$  que contienen a la curva  $C$ , el cual tiene dimension  $k_{2,1} = 35$ .

Con estos dos números  $k_{1,1}$  y  $k_{2,1}$  y el siguiente teorema, deducimos (parcialmente) la resolución minimal de la curva canónica genérica  $C_{can} \subset \mathbb{P}^7$ :

Curva general de género 8						
1	-	-	-	-	-	-
-	15	35	?	-	-	-
-	-	-	?	35	15	-
-	-	-	-	-	-	1

**Curvas tetragonales.** Sea  $\Gamma$  una colección general de 13 puntos en el plano. El ideal  $\mathcal{I}_\Gamma$  contiene dos ecuaciones cuárticas distintas, las cuales se intersectan en 16 puntos  $\Gamma \cup \{x_0, x_1, x_2\}$ . Consideremos una curva  $C$  de grado 8 con nodos en  $\Gamma$  y que pase por  $x_0$  y  $x_1$ . Las curvas de grado 4 que pasan por  $\Gamma$  inducen un pincel de grado 6 en la normalización de  $C$ , el cual tiene a  $x_0$  y  $x_1$  por puntos base. Por lo tanto, la normalización de  $C$  es una curva de género 8 tetragonal. El diagrama de Betti de esta curva es el siguiente:

Curva tetragonal de género 8						
1	-	-	-	-	-	-
-	15	35	25	4	-	-
-	-	4	25	35	15	-
-	-	-	-	-	-	1

**Curvas planas de grado 6 (i.e., con un  $g_6^2$ ).** Consideremos ahora una curva plana  $C$  de grado 8 con 11 nodos sobre una cónica y 2 nodos generales. El teorema de Bézout implica que la cónica que pasa por 11 de sus nodos está contenida en el lugar base del sistema canónico de  $C$ . Esta curva tiene diagrama de Betti como sigue

Curva de género 8 con dos $g_4^1$ 's						
1	-	-	-	-	-	-
-	15	35	35	14	-	-
-	-	14	35	35	15	-
-	-	-	-	-	-	1

Al degenerar 13 generales de una curva de grado 8 a 13 nodos con 11 en una cónica, la curva de grado 8 se parte en 2: la cónica, y una séxtica con 2 nodos (esto, de nuevo, por el teorema de Bézout). Por lo tanto, la curva canónica cuya tabla de Betti es la anterior tiene por modelo plano una séxtica con 2 nodos. En particular, esta curva cuenta con dos  $g_4^1$ 's.

**Curvas trigonales.** Supongamos que  $C$  es una curva irreducible de grado 8 nodal justo en el sub esquema  $\Gamma$ , cuyo ideal tiene la siguiente resolución minimal

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(-7) \oplus \mathcal{O}(-5) \xrightarrow{f} \mathcal{O}(-4)^3 \rightarrow \mathcal{I}_\Gamma \rightarrow 0,$$

con  $f$  es general. Dichas cuárticas forman un sistema lineal en  $\mathbb{P}^2$

$$|L| = |4l - \sum_i^{13} p_i| \cong \mathbb{P}^2$$

cuyo grado es  $L^2 = 16 - 13 = 3$ . Dado que este sistema lineal restringido a  $C$  es de grado 6, esto nos indica que  $L$  induce una cubierta 3 : 1 sobre una cónica

$$\phi_L : C \xrightarrow{3:1} \mathbb{P}^1 \subset |L|.$$

Denotemos como  $D = \phi_L^{-1}(t)$  al divisor de grado 3 en  $C$  tal que  $|D| = g_3^1$ . Mostraremos que tres puntos  $p, q, r \in |D|$  en la curva encajada

$$C \subset \mathbb{P}^7$$

generan una línea.

Justo, interpretando  $H^0(K_C - D)$  como el espacio de hiper planos en  $\mathbb{P}^7$  que contienen  $D$ , entonces el teorema de Riemann-Roch indica lo siguiente

$$h^0(D) = d - (g - 1 - h^0(K - D)).$$

Es decir, la dimensión  $h^0(D) = 2$  es igual al grado del divisor  $\text{grado}(D) = 3$  menos la dimensión del espacio lineal generado por los puntos de  $D$  en  $\mathbb{P}^7$ ; cuya dimensión en este caso es 1.

El párrafo de arriba nos permite afirmar que el  $g_3^1$  genera una superficie

$$S := \bigcup_{L \in g_3^1} L \subset \mathbb{P}^7$$

la cual es reglada, contiene a la curva  $C$  y está contenida en todas las cuádricas del ideal de  $C$ . Esto es, el ideal de  $C$  no está generado por cuádricas. Por lo tanto, los números de Betti de  $C$  son distintos a los números de Betti de la curva genérica.

A continuación listamos en encaje canónico de una curva de este tipo.

Curva con nodos especiales							
1	-	-	-	-	-	-	-
-	15	40	45	24	5	-	-
-	5	24	45	40	15	-	-
-	-	-	-	-	-	-	1

**Encontrando los  $g_d^1$ 's:** El teorema de Brill-Noether predice un número finito de  $g_5^1$ 's en una curva general de  $C$  género 8. [¿Cuáles son?](#)

**Divisor de Brill-Noether:** Notar que una curva  $C$  que admite una representación como curva plana de grado 7 con 7 nodos en posición general tiene número de Brill-Noether

$$\rho(C) = -1.$$

Esto nos da una pista (que resulta ser cierta), que dicha familia de curvas abstractas forman el divisor en el espacio móduli  $\mathcal{M}_8$ ; llamado divisor de Brill-Noether.

Por otro lado, la tabla de Betti de estas curvas es igual a la tabla de Betti de una curva canónica genérica de género 8. Es decir, el encaje canónico y sus syzygias no detectan este divisor de Brill-Noether.

**Pregunta:** [¿Detectan las matrices de la resolución genérica a este divisor?](#)

Notar que una curva genérica en esta familia tiene siete  $g_5^1$ 's. [Desearíamos afirmar que esto implica que el número de  \$g\_5^1\$ 's en la curva genérica de género 8 es un múltiplo de siete.](#)

## 7. GEOMETRÍA DE LOS NODOS DE UNA CURVA PLANA.

La variedad de Severi  $V_{8,15} \subset \mathbb{P}^{44}$  parametriza genéricamente curvas irreducibles de grado 8 con 15 nodos. Dicha variedad es irreducible y de dimensión  $\dim V_{8,15} = 29$  [JOE]. La aplicación olvidadiza, que manda una curva nodal al sub esquema suportado en sus nodos,  $\phi : V_{8,15} \rightarrow \mathbb{P}^{2[15]}$  es birracional en su imagen [Cesar]. Esto implica que la cerradura de la imagen

$$\text{Sev}(15) := \overline{\phi(V_{8,15})} \subset \mathbb{P}^{2[15]}$$

es un divisor en el esquema de Hilbert  $\mathbb{P}^{2[15]}$ ; que llamaremos *divisor de Severi*.

**Problema:** Describir explícitamente los sub esquemas  $\Gamma \in \text{Sev}(15)$ .

**Proposition 7.1.** *La clase del divisor  $D$  que parametriza los nodos de curvas de grado 8 irreducibles (no necesariamente reducidas) en  $\text{Pic}(\mathbb{P}^{2[15]})$  es la siguiente  $D = 21H - \frac{5}{2}B$ . Se sigue que la clase del divisor de Severi es*

$$\text{Sev}(15) = 17H - 2B.$$

*Proof.* Del cálculo de la clase  $D = 21H - \frac{5}{2}B$ , se sigue que  $D = J + \text{Sev}(15)$  [Cesar]. Dado que  $J = 4H - \frac{1}{2}B$ , el resultado se sigue.  $\square$

Se sigue de la proposición anterior que los siguientes estratos de Betti están contenidos en el divisor de Severi pues están contenidos en el lugar base  $\text{Sev}(15)$

$$C(1, 6) \cup C(2, 10) \cup C(3, 13) \subset \mathbf{B}(\text{Sev}(15)).$$

Arriba,  $C(d, k)$  denota la familia de  $k$  puntos sobre una curva de grado  $d$ . Esto resuelve parcialmente el problema inicial.

El problema de describir un punto genérico en  $\text{Sev}(15)$  es más sutil.

**Proposition 7.2.** *Consideremos el haz vectorial  $E$  que satisface*

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(2)^5 \rightarrow \mathcal{O}(3)^9 \rightarrow E \rightarrow 0.$$

*Entonces, la clase en  $\text{Pic}(\mathbb{P}^{2[15]})$  del divisor de Brill-Noether asociado a  $E$  es*

$$D_E = 17H - 2B.$$

La proposición anterior sugiere la existencia de un haz  $E \in M(\text{ch}(E))$  tal que  $D_E = \text{Sev}(15)$  como divisores efectivos. En dado caso, un elemento genérico de  $\text{Sev}(15)$  estaría contenido en los ceros de una sección global de  $E$ . [¿Qué tan explícitamente se puede describir dicho conjunto de ceros?](#)

## 8. PROYECCIÓN DE CURVAS CANÓNICAS A UN PLANO

Al proyectar de manera general una curva canónica de género  $g$  a un plano obtendremos una curva plana de grado  $2g - 2$  con

$$\frac{(2g-3)(2g-4)}{2} - g = 2(g-1)(g-3)$$

nodos simples. La siguiente proposición describe parcialmente la geometría de estos nodos.

**Proposition 8.1.** *Sea  $C \subset \mathbb{P}^{g-1}$  una curva canónica de género  $g \geq 3$  y sea  $\pi : C \rightarrow C' \subset \mathbb{P}^2$  la proyección a un plano. Supongamos que  $C'$  tiene únicamente nodos simples por singularidades. Entonces el conjunto  $\Gamma$  de nodos de  $C'$  está contenido en una curva de grado  $2g - 6$ .*

*Recíprocamente, si  $\Gamma \subset \mathbb{P}^2$  es una colección de  $2(g-1)(g-3)$  puntos contenidos en una curva de grado  $2g - 6$  que además son nodos de una curva  $C'$  de grado  $2g - 2$ , entonces  $C'$  es la proyección de una curva canónica de género  $g$ .*

*Proof.* Para probar la primera parte, consideremos una recta general  $H' \subset \mathbb{P}^2$ , la cual intersecta a  $C'$  en  $2g - 2$  puntos distintos  $D' = p'_1 + \dots + p'_{2g-2}$ , ninguno de ellos un nodo de  $C'$ . Estos puntos son la preimagen bajo la proyección  $\pi$  de  $2g - 2$  puntos  $p_1, \dots, p_{2g-2} \in C$  contenidos en un hiperplano  $H \subset \mathbb{P}^{g-1}$  (la preimagen de  $H'$ ). Sigue que  $D := p_1 + \dots + p_{2g-2}$  es la clase del hiperplano en  $C$ ; es decir, la clase canónica  $K_C$ .

El sistema canónico de  $C$  corresponde al inducido por las curvas planas de grado  $2g - 5$  que contienen a  $\Gamma$ . Por lo tanto, existe una curva  $F \subset \mathbb{P}^2$  que contiene a  $\Gamma$  y a  $D'$ . Por el teorema de Bézout, dado que  $F$  contiene  $2g - 2 > \deg(F)$  puntos colineales, se tiene que  $F$  contiene a la recta  $H'$  como una componente. Por lo tanto,  $G := F - H'$  es una curva de grado  $2g - 6$  que contiene a  $\Gamma$ .

Recíprocamente, sea  $\Gamma \subset \mathbb{P}^2$  un conjunto de  $2(g-1)(g-3)$  puntos contenidos en una curva  $G$  de grado  $2g - 6$  que además son los nodos de una curva  $C'$  de grado  $2g - 2$ . Si  $H' \subset \mathbb{P}^2$  es una recta general entonces  $G + H'$  representa a la clase canónica de la normalización  $C$  de  $C'$ . Esto nos da un plano distinguido dentro del sistema lineal  $|K_C|$  de modo que  $C'$  es la proyección de  $C$  a este plano.  $\square$

**Ejemplo: proyectando una curva de género 8 a un plano:** si la curva es genérica, entonces la proyección de ésta a un plano será una curva de grado 14 con 70 nodos. Denotemos dichos nodos con  $\Gamma$  y observemos que tienen la siguiente resolución minimal

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(-13)^5 \rightarrow \mathcal{O}(-11)^5 \oplus \mathcal{O}(-10) \rightarrow \mathcal{I}_\Gamma \rightarrow 0.$$

En particular viven en una única curva de grado 10.

#### REFERENCES

- [V] A. Verra, The fiber of the Prym map in genus 3.
- [M1] Fedorchuk, M.; Minimal Log Program for  $\bar{M}_4$
- [CH] L. Caporaso and J. Harris, "Counting plane curves of any genus". Invent. Math (1998).
- [E] Eisenbud, D: The Geometry of Syzygies.
- [CL2018] Lozano Huerta, C: Tres medallas de la geometría birracional. Motivos Matemáticos, 2018.
- [F2014] Farkas, Syzygies of curves and the Green conjecture.