GEOMETRÍA EXPLÍCITA DE (ALGUNAS) CURVAS, SUPERFICIES Y SÓLIDOS

Introducción: clasificación birracional de variedes algebraicas

El conjunto de todas las variedades algebraicas es basto. De ahí que intentemos organizarlas en clases de equivalencia donde todas las variedades compartan propiedades bien definidas. El conjunto de dichas clases puede ser complicado, y saber si dos variedades pertenecen a la misma clase es a menudo un reto importante. Si consideramos la equivalencia birracional de variedades y agrupamos a las variedades en clases de equivalencia, entonces el programa del modelo minimal desea hallar un representante "sencillo" en cada una de dichas clases. La equivalencia birracional será un concepto central de este escrito y una definición parcial se incluye abajo.

Definición 0.1. Si X, Y denotan variedades algebraicas suaves, diremos que X y Y son *birracionales* si existen subconjuntos abiertos $U \subset X$ y $V \subset Y$ que sean isomorfos.

Notar que dos variedades birracionales tienen la misma dimensión. Por lo tanto, nuestro estudio sobre variedades, y las clases de equivalencia que éstas forman, comenzarán con este invariante.

En dimensión 1, un representante sencillo de una clase de equivalencia birracional es simplemente una curva suave. En dimensión 2, un representante sencillo es una superficie sin curvas rígidas [Ver ¿?]. En dimensiones más altas hallar uno de estos representantes es un reto importante y la investigación que relatamos aquí se encamina a demostrar que en efecto se puede hacer. Ver recuadro 6.

Describamos algunos detalles del párrafo anterior tratando casos separados según su dificultad.

Curvas. La clasificación birracional de las curvas (variedades algebraicas de dimensión 1) incluye trabajo importante de Bernhard Riemann, Felix Klein y el de una decena más de matemáticos. La conclusión es: toda curva algebraica C es birracional a una curva suave de género g menos un número finito de puntos. En otras palabras, si agrupamos a las curvas algebraicas en clases de equivalencia birracional, entonces en cada clase existe una curva suave. Además, esta curva suave es única dentro de su clase birracional pues una equivalencia birracional entre curvas suaves extiende a un isomorfismo.

La topología de una curva suave está determinada por un número natural — el género— y fijando éste, nos podemos preguntar por el conjunto de clases de equivalencia birracional (i.e., isomorfismo) de curvas suaves de género g. ¡Este conjunto es una variedad algebraica! y se llama espacio moduli de curvas; se denota M_g.

Para géneros pequeños, como $g = 1, 2, 3$, la variedad M_g se entiende relativamente bien, pero en general muchos aspectos de su geometría (birracional) son aún misteriosos. Un caso muy especial es el de curvas racionales, $g = 0$; topológicamente equivalentes a la esfera S^2. La variedad M_0 consiste de un punto. Para géneros más altos ver: [CATÁLOGO de CURVAS]

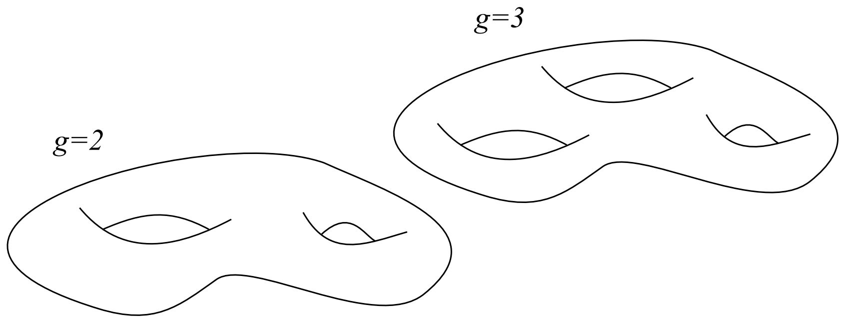


FIGURA 1. Curvas suaves de género 2 y género 3.

Superficies. Concentrémonos, de momento, en una superficie suave S e investigemos su clase de equivalencia birracional. Esta clase contiene superficies suaves no isomorfas a S *e.g.*, la explosión de S en un punto. ¿Existe en esta clase una superficie S' más sencilla en cierto sentido que S? ¿Cómo la encontramos? En otras palabras y citando a S. Mori: "un problema central es cómo encontrar un modelo minimal para una superficie suave S". En este contexto, la palabra "sencilla" quiere decir eliminar las curvas excepcionales o rígidas [Ver ¿?]. A una superficie sin curvas excepcionales le llamaremos *modelo minimal.*

El paso crucial para hallar el modelo minimal de una superficie que no sea reglada, aparece en el artículo *questioni* de Castelnuovo y Enriques [CE01]. Éste consiste en eliminar las curvas excepcionales: "*la possibilita di eliminare le curve eccezionali per ogni superficie che non appartenga alla famiglia delle rigate*". Con este resultado, procedemos a encontrar el modelo minimal de una superficie de la siguiente manera. Empezamos con una superficie suave S, si existe una curva excepcional $C \subset S$, entonces se contrae a un punto de una superficie suave S'. Esta contracción es precisamente la explosión de S' en un punto; ver . Si S' contiene una curva excepcional, entonces repetimos una contracción. De lo contrario, S' es el modelo minimal de S.

En cada contracción del proceso anterior remplazamos una esfera S^2 por un punto. Por lo tanto, el segundo número de Betti, $b_2(S)$, decrece. Como dicho número es positivo para toda superficie proyectiva, entonces el proceso anterior termina en a lo más tantos pasos como $b_2(S)$. Concluimos, que es posible encontrar una superficie S_{min} sin curvas excepcionales

$$S \to S' \to \cdots \to S_{min}.$$

El interés de Castelnuovo y Enriques en el *questioni*, no es únicamente demostrar que las curvas excepcionales se pueden contraer. Los autores buscan también clasificar superficies minimales además de probar que el modelo minimal de una superficie que no sea reglada se encuentra contrayendo un número finito de curvas excepcionales. Resumimos la discusión sobre el modelo minimal en dimensión 2 en el siguiente teorema.

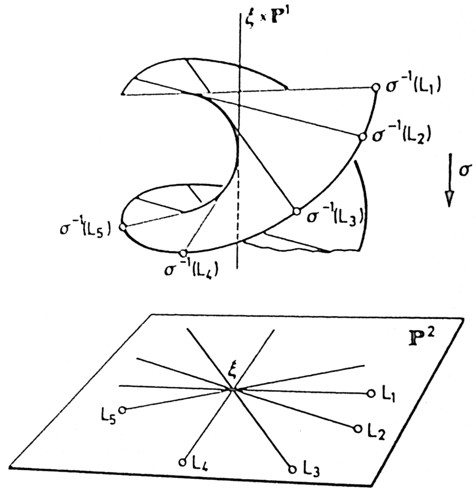


FIGURA 2. Explosión del plano $\mathbb{P}^2$ en un punto.

Teorema 0.2. *Considerar S una superficie algebraica proyectiva suave. Entonces una y solo una de las siguientes afirmaciones es cierta:*

- *existe una única superficie S_{min}, tal que toda equivalencia birracional $S \to S_{min}$ es un isomorfismo (**modelo minimal**),*
- *S es isomorfa al producto $C \times \mathbb{P}^1$ (**superficie reglada**).*
- *$S \cong \mathbb{P}^2$.*

1. Preliminares

¿Cómo ocurren las aplicaciones birracionales entre variedades?

Ejemplo 1: (Explosión de una variedad) Sea $Z \subset X$ donde X es una variedad proyectiva y Z es subvariedad propia de X de codimensión mayor que 1.

Consideramos $Bl_Z X$ la explosión de X a lo largo de Z y tenemos que

$$BL_Z X = Proj_X \left(\oplus_{d \geq 0} I_Z^d \right)$$

donde I_Z corresponde al ideal de Z en la variedad X y $Proj_X$ es la de la F-álgebra finitamente generada.

Esta construcción induce el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & Bl_Z X \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ Z & \longrightarrow & X \end{array}$$

Donde π corresponde a una aplicación birracional y E es una subvariedad de codimensión 1.

Ejemplo 2: (Series Lineales)

Sea L un **haz vectorial de rango 1** tal que $\Gamma(L) \neq 0$ y consideramos $V \subset \Gamma(L)$. Entonces considero la siguiente aplicación

$$\varphi_V : X - - \rightarrow \mathbf{P}(V^*)$$

$$x \longmapsto \{s \in V | s(x) = 0\}$$

2. Clase 26/Agosto/2021

2.1. Divisor canónico de una variedad X.

Existen dos clases de divisores, los divisores de Weil y los divisores de Cartier.

Definición: Un **divisor de Weil** es una suma formal de subvariedades de codimensión 1 en X.

La forma más común de obtener subvariedades de codimensión 1 es una subvariedad definida por agregar una ecuación no redundante a las ecuaciones que definen a X.

Ejemplo: Consideremos $S = \langle x^3 + y^3 + z^3 + w^3 \rangle$ y en $R = \mathbb{F}[x, y, z, w]/S$ consideramos el divisor de Weil

$$D = \langle x + y, z + w \rangle \subset R$$

notemos que D corresponde a una línea en R puesto que está dado por dos ecuaciones y la variedad está contenida en S.

Definición: Un **divisor de Cartier** $I \subset R$ es un R-módulo finitamente generado localmente generado de rango 1.

Ejemplo: Tomamos

$$I = \langle 2, 1+\sqrt{-5}\rangle \subset \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = R$$

este ideal no es principal pero para cada $\mathfrak{p} \subset R$ ideal primo, la localización respecto a $\mathfrak{p}$, denotada por $I_{\mathfrak{p}}$, es principal puesto que

$$\begin{cases} si \quad I \not\subseteq \mathfrak{p} & \Longrightarrow \quad I_{\mathfrak{p}} = R_{\mathfrak{p}} \\ si \quad I \subseteq \mathfrak{p} & \Longrightarrow \quad I_{\mathfrak{p}} = \langle 1+\sqrt{-5}\rangle_{\mathfrak{p}} \cong R_{\mathfrak{p}} \end{cases}$$

los cuales son generados por un solo elemento de donde I es localmente libre de rango 1.

Los divisores de Weil son divisores también divisores de Cartier, de hecho, ambos son los mismos objetos sobre variedades suaves.

Definición: Dado $D = \{(U_i, f_i)\}$ un divisor de Cartier, decimos que D es **efectivo** si $f_i \in \mathcal{O}_x(U_i)$ no es un divisor de cero para toda i.

Dado $D = \sum_i a_i D_i$ un divisor de Weil con D_i subvariedad de codimensión 1 es **efectivo si** $a_i \geq 0$ para todo i.

Consideremos D un divisor de Cartier efectivo en X, defino la "**serie lineal**"

$$\varphi_{|D|} = \varphi_{\Gamma(\mathcal{O}_X(D)}$$

es decir, la aplicación inducida por la serie lineal $\Gamma(\mathcal{O}_X(D)$.

Ejemplo:

1)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^2 &\longrightarrow \mathbb{P}(\Gamma(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)^*)) = \mathbb{P}^5 \\ x &\longmapsto V_x = \{\text{Cónicas que pasan por } x\} \end{aligned}$$

Esta es una serie lineal completa puesto que para todo punto está definida.

2) Sea $V \subset \Gamma(\mathcal{O}(2))$ con

$$\Gamma(\mathcal{O}(2)) = \mathbb{P}\{x^2, y^2, xy, xz, yz\} = \mathbb{P}^4$$

y

$$V = \{\text{ Cónicas que pasan por el punto} q = [0:0:1]\}$$

Esto genera una serie lineal

$$\varphi|_V : \mathbb{P}^2 - - \to \mathbb{P}(V^*)$$

Ésta es una aplicación racional y puesto que no está definido para el punto $q = [0 : 0 : 1]$ decimos que es una serie incompleta.

Definición; Definimos los **puntos base** de una variedad V como

$$Bs(V) := \{x \in X | \varphi_V \text{ no está definida en } \}$$

$$\bigcap_{s \in V} Var(s)$$

Un divisor D se dice **amplio** si $\varphi_{||mD||}$ es un encaje $m >> 0$
Un divisor D se dice **muy amplio** si $\varphi_{|D|}$ es un encaje.
Y D se dice **semi-amplio** si $\varphi_{|mD|}$ es un morfismo, i.e., $Bs(|mD|) = \varnothing$.

*Observación; En Ejemplo 1) el divisor es muy amplio y en Ejemplo 2) no es semi-amplio.
Tomando nuevamente el diagrama de Ejemplo 2)

Entonces tenemos que $\tilde{f} = \tilde{\varphi}_{|\tilde{D}|}$ es muy amplio.

3. Clase 31/Agosto/2021

3.1. Divisor canónico. El siguiente teorema será útil en los resultados posteriores:

Teorema:(Hinoraka) Sea X una variedad irreducibke sobre $\mathbb{C}$. Entonces existe una aplicación propia birracional

$$f : \tilde{X} \longrightarrow X$$

donde $\tilde{X}$ es una variedad suave.

Este teorema también es conocido como **Teorema de Resolución de Singularidades**, entonces nuestro objetivos ahora es clasificar variedades suave hasta equivalencia birracional.

Sea X una variedad suave sobre $\mathbb{F}$ con $Char(\mathbb{F}) = 0$, así que podemos s.p.g asumir que $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Puesto que toda variedad diferenciable viene dotada de un haz tangente (el cual es un espacio vectorial) y sus fibras son el espacio tangente T_pX en $p \in X$ los cuales son espacios vectoriales de dimensión igual a $dimX$ por ser una variedad suave.

Si $r = dimX$ entonces definimos al **haz de línea canónico** sobre X

$$\omega_X = \bigwedge^r T_X$$

Si $s \in \Gamma(\omega_X)$ es una sección global, definimos al **divisor canónico** como $Var(s) = K_X$.

Nótese que para $p \in X$, las fibras de T_pX corresponden a

$$\{\partial_1, ..., \partial_r\}|_p \cong \mathbb{C}^r$$

por lo que cada ∂_i es un vector en $\mathbb{C}^r$.

Por otro lado, para $p \in X$ se tiene que las fibras de $(\omega_X)_p$ e

$$\left\langle det\,(\partial_1, ..., \partial_r)\,\Big|_p \right\rangle \cong \mathbb{C}$$

Sin embargo podría suceder que no haya secciones globales y por lo tanto lo anterior no sería útil.

Entonces podemos hacer una construcción similar con herramientas algebraicas.

Tomamos X una variedad algebraica suave sobre $\mathbb{C}$ y consideramos la **gavilla de diferenciales de Kähler** denotada mediante Ω^1_X, observemos que este espacio es localmente libre de rango r y que, de cierto modo, es el equivalente algebraico del espacio tangente.

Definimos nuevamente el **haz de línea** sobre X como $\omega_X = \bigwedge^r \Omega^1_X$ y ahora para $s \in \Gamma(\omega_X)$ podemos definir $Var(s) = K_X$ como el **divisor canónico** de X.

Ejemplo: Consideremos al anillo de polinomios $R = \mathbb{C}[x_0, ..., x_n]$, el cual es un anillo graduado cuya graduación está dada por $R_l = \{f \in R \mid f \text{ homogéneo}, \ deg(f) = l\}$.

En este anillo podemos trasladar la graduación tomando $R(l)_m = R_{l+m}$ y es claro que obtenemos nuevamente una nillo graduado.
Entonces, por ejemplo, $R(1)_0 = R_1$ corresponde a las formas lineales de R y son de grado cero en $R(1)$.
De la misma forma, $R(-1)_1 = R_0$ están dadas por las constante en R aunque en $R(-1)$ tienen grado 1, además son generados por un conjunto de $n+1$ elementos $\{e_0, ..., e_n\}$. Entonces existe un morfismo de módulos

$$\varphi : R(-1)^{n+1} \longrightarrow R$$

$$e_i \longmapsto x_i$$

Este morfismo es de grado cero puesto que la imagen de la constante e_i es $x_i = e_i(\frac{x_i}{e_i})$ que es un elemento de grado cero en R.
Entonces $M = Ker\varphi$ es un R-módulo finitamente generado de rango n y tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow R(-1)^{n+1} \longrightarrow R \longrightarrow 0$$

Luego, gavillificando obtenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \tilde{M} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow 0$$

Enunciaremos el siguiente teorema que nos será de utilidad:

Teorema: $\tilde{M} \cong \Omega^1_{\mathbb{P}^n}/\mathbb{F}$
Usando este resultado se tiene que

$$0 \longrightarrow \Omega^1_{\mathbb{P}^n}/\mathbb{F} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow 0$$

Tomemos $n = 1$, se tiene que $R = \mathbb{F}[x, y]$, entonces

$$0 \longrightarrow \Omega^1_{\mathbb{P}^n}/\mathbb{F} \longrightarrow \mathcal{O}^2(-1) \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow 0$$

Esta es obtenida de gavillificar

$$R(-2) \longrightarrow R(-1) \longrightarrow R$$

Más aún,

$$\begin{aligned} \omega_{\mathbb{P}^n} &= \bigwedge^n \Omega^n_{\mathbb{P}^n}/\mathbb{F} \\ &= \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1) \qquad \text{Gavilla de} R(-n-1) \end{aligned}$$

Además nótese que el divisor $-\omega_{\mathbb{P}^2} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(n+1)$ es muy amplio debido al encaje de Veronese, con $V = |D|$, más bien,

$$V = \Gamma(\mathcal{O}(n+1)) = \{f \in \mathbb{F}[x,y] \mid f \text{ homogéneo}, \ deg(f) = n+1\}$$

Ejemplo: Tomando el ejemplo
Entonces

$$-K_S = Div(e,c) + Div(d,b,a) + 2Div(c,b,a)$$

Es claro que $Div(d,b,a)$ y $Div(c,b,a)$ representan una línea en $\mathbb{P}^4$, de donde $2Div(c,b,a)$ representa una cónica en $\mathbb{P}^4$, y por último, sobre S, $Div(e,c)$ es una cónica en $\mathbb{P}^4$.

Por lo cual,

$$K_{Bl_p\mathbb{P}^2} = \pi^* K_{\mathbb{P}^2} - E = 3H - E$$

es decir,

$$K_{Bl_p\mathbb{P}^2} = -3H + E$$

Ejemplo: Consideremos $p_1, ..., p_6 \in \mathbb{P}^2$ seis puntos con no 3 colineales ni 5 cocónicos y tomamos la explosión de la curva sobre dichos seis puntos.

Denotemos $S = Bl_{p_1,...,p_6}\mathbb{P}^2$ a la explosión de $\mathbb{P}^2$ sobre los P_i. De donde

$$S : \mathbb{P}^2 \underset{\tilde{\varphi}_V}{\longrightarrow} \mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(V)$$

donde V corresponde l conjunto de cúbicas que pasan por los puntos p_i.
De aquí notamos que $-K_S$ es muy amplio (Fano).

Ejemplo: $S^4 \subset \mathbb{P}^3$ es suave de grado 4, entonces $K_{S^4} \equiv 0$ y si $S^5 \subset \mathbb{P}^3$ es suave de grado 5 entonces K_{S^5} es un divisor muy amplio.
Ejemplo: Si $C \subset \mathbb{P}^2$ es una curva suave de grado d, ¿K_C es muy amplio?

4. Clase 2/Septiembre/2021

Panorama del modelo minimal (suave)
En dimensión 1, una variedad corresponde a una curva suave. Es importante recordar que cualquier curva suave irreducible es birracional a una curva suave y que en el caso de curvas, ser birracionalmente equivalentes es igual que ser isomorfos.

Clasificación de curvas

Denotemos $g = dim\Gamma(C, \omega_C)$
Definición:(Anillo Canónico de X)

Para una curva X suave proyectiva sobre $\mathbb{C}$ definimos el anillo canónico $R(K_X)$ como sigue

$$R(K_X) := \bigoplus_{m \geq 0} \Gamma(\omega_X^{\otimes m})$$

donde $A^{\otimes k}$ es el producto tensorial de un espacio consigo mismo k-veces.

Para dimensiones mayores 2 existen variedades suaves proyectivas en la misma clase de equivalencia birracional. Por ejemplo, si S es una variedad suave y $p \in S$ entonces

$$Bl_pS \xrightarrow{\pi} S$$

es un morfismo birracional, i.e., S es birracional a Bl_pS y ambas son variedades suaves.

Ahora necesitamos una forma de revertir el proceso obtenido con la explosión, es decir, una çontracción"de la variedad con la cual contamos en principio.

Programa modelo minimal (superficies)

Supongamos que tenemos una sucesión de contracciones aplicadas a una variedad X

$$X \longrightarrow X_0 \longrightarrow ... \longrightarrow X_{min}$$

de tal manera que la variedad X_{min} no admita contracciones.

¿Qué clase de superfices pueden ser X_{min} ? Por ejemplo, $X_{min} = \mathbb{P}^2$ no admite contracciones a nigún espacio, y de igual forma tomando a X_{min} como una superficie reglada (con un morfismo $X_{min} \to C$ con C una curva).

Definición: Sea X proyectiva suave y D un divisor de Cartier. D se dice **nef (numéricamente efectivo)** si para toda curva C irreducible se satisface que $D \cap C \geq 0$.

(En este caso $D \cap C = deg f^*(\mathcal{O}_x(D))$ con $f : C \hookrightarrow X$).

Entonces X_{min} tiene 2 opciones:

- Ser reglada, en este caso X_{min} admite un morfismo $X_{min} \overset{\pi}{\to} C$, i.e., para todo $p \in X$, $\pi^{-1}(p) \cong \mathbb{P}^1$.
- $K_{X_{min}}$ es nef.

Propiedades de $K_{X_{min}}$

Si X_{min} es reglada, admitiendo $X_{min} \xrightarrow{\pi} C$, se tiene que:

1. $\Gamma(dK_{X_{min}}) = 0$ para $d > 0$
2. $Proj(R(K_{X_{min}})) = \varnothing$
3. Las fibras de π son isomorfas a $\mathbb{P}^1$ ($-K_f$ es amplio)
4. X_{min} no es única

Si $K_{X_{min}}$ es nef.Entonces hacemos uso del siguiente teorema.

Teorema Si $K_{X_{min}}$ es nef entonces es semi-amplio. i.e.,

$$\varphi_{|dK_{X_{min}}|} : X \longrightarrow Y = Proj(R(K_{X_{min}}))$$

es un encaje.

¿Qué variedad es Y? Tiene 3 opciones:

- La dimensión de Y es 2, es decir, Y es una superficie.
- La dimensión de Y es 1, en cuyo caso, Y es una curva.
- La dimensión de Y es 0, esto es, Y es un punto.

Para trabajar esto casos, vamos a etiquetarlos en una definición.

Definición: (Dimensión de Kodaira de X)
Definimos la **dimensión de Kodaira** de X como

$$k(X) = max\{dim\ \varphi_{|dK_{X_{min}}|}(X_{min})|d \geq 0\}$$

Notemos primero que $k(X) \leq dim\ X_{min}$.

Si $dim\ | - K_{X_{min}}| > 0$ entonces $\varphi_{|dK_{X_{min}}|}$ no existe por lo que denotamos $k(X) = -\infty$ (En ciertos casos, suele definirse como $k(X) = -1$). Esto sucede con las superficies regladas.

¿La dimensión de Kodaira $k(X)$ un invariante birracional?

5. Clase 7 /Sept/2021

Casos de $k(X)$ (X superficie algebraica suave proyectiva)

$\bullet k(X) = 2$
Entonces consideramos una sucesión

$$X \longrightarrow ... \longrightarrow X_{min} \longrightarrow Y = ProjR(K_{X_{min}})$$

El espacio Y, definido como arriba, tiene dimensión 2, además recibe el nombre de **modelo canónico** y se denota X_{can}.
En general, X_{can} es singular diferencia de X_{min} que siempre es suave.

¿Cuándo X_{can} es singular? Veremos que esto se tiene cuando $K_{X_{can}}$ es amplio.

• Si $k(X) = 1$ entonces tomando

$$X \xrightarrow{\rho} ... \longrightarrow X_{min} \xrightarrow{\varphi} Y$$

Con φ una fibración sobre una curva. Este recibe el nombre *fibraciones k-triviales* puesto que $\varphi^{-1}(p)$ es una curva para cada punto $p \in Y$ y su género es 1.

• Si $k(X) = 0$ obtenemos una sucesión de la forma

$$X \xrightarrow{\rho} ... \longrightarrow X_{min} \xrightarrow{\varphi} Y$$

donde Y es un punto. Entonces $dK_{X_{min}}$ es trivial para $d >> 0$, esto también es una fibración k-trivial y decimos que X es una superficie $K3$.

Definición: Sea X una superficie suave proyectiva sobre $\mathbb{C}$.

1) X se dice **de tipo general** si $k(X) = 2$ (es decir, X_{min} es de dimensión máxima).
2) X se dice **k-trivial** si $dK_X \sim_{\mathbb{Q}} 0$ para cada $d > 0$.
3) X se dice **Fano** si $-K_X$ es amplio.

Observación: Estos tres tipos de superficies son los átomos de las clases de equivalencia birracionales de superficies.

Podemos resumir el modelo minimal de superficies en el siguiene teorema.

Teorema: (Programa de modelo minimal para superficies)
Cualquier superficie proyectiva suave X es birracional a una de las siguientes:

- Superficie X_{min} de tipo general ($k(X) = 2$).
- X_{min} fibración k-trivial sobre una curva ($k(X) = 1$).
- Superficie k-trivisl ($k(X) = 0$).
- Fibración Fano ($k(X) = -\infty$).

Si $k(X) \geq 0$, X_{min} es única (es decir, existe un único modelo minimal), sin embargo si $k(X) = -\infty$ entonces X_{min} no es única (en este caso siempre hay una infinidad de modelos que pueden ser tomados).

• Situación esperada en dimensión ≥ 3

1) Entender el análogo de las contracciones $Bl_pS \to S$, en el caso de dimensión 2 solamente podemos explotar la variedad en puntos, sin embargo en variedades de dimensión mayor puedo hacerlo sobre puntos, curvas, etc.

En superficies, tenemos que una sucesión de contracciones que acaba en X_{min}

$$X \xrightarrow{\rho} ... \xrightarrow{\rho} X_{min}$$

y sabemos que si $k(X) \geq 0$ entonces $K_{X_{min}}$ es nef, en cambio si $k(X) = -\infty$, existe una fibración Fano (Mori fiber space)$X_{min} \longrightarrow Z$.

2) Si $k_{x_{min}}$ es nef, consideramos

$$\varphi_{|dK_{X_{min}}|} : X - - \to Z = ProjR(K_{X_{min}})$$

Hay dos casos:
(*) $\varphi_{|dK|}$ es una fibración k-trivial con $0 \leq k(X_{min}) < dim\ X_x$. (**) $\varphi_{|dK|}$ es birracional, i.e., $K_{X_{can}}$ es amplio. Además, la imagen de $\varphi_{|dK|}$ es el modelo minimal.

Detalles importantes

1) Las aplicaciones (racionales) ρ están determinadas por las curvas racionales contenidas en X. [Mori]

a)Modelos minimales X_{min} no son únicos $k(X) \geq 0$ pero son únicos si $k(X) = dimX$.

b) $k(X) = -\infty$, las variedades Fano son *unirregladas* (es decir, existe $\mathbb{P}^1 \times Y - - \to X$ dominante con $dimY \leq dimX$).

Dificultades:

- Los X_i pueden ser "muy"singulares (esto significa que en estas variedades los divisores de Cartier y los divisores de Weil se vuelven distintos y toda la teoría llega a perderse).

- Las aplicaciones ρ ($X \xrightarrow{\rho_1} ... \xrightarrow{\rho_{min}} X_{min}$) podrían ser infinitas (Terminación de flips).
- En dimensiones mayores podría no valerse el resultado: Si $K_{X_{min}}$ es nef entonces es semiamplio. (*Conjetura de abundancia*)
- Clasificar variedades Fano.

Observación: Es importante el pedir que X sea una variedad proyectiva pues existe variedades que no son proyectivas en las cuales la variedad depende del espacio ambiente.
Sabemos que las variedades complejas compactas conexas de dimensión 1 son variedades proyectivas.
Esto no se cumple en variedades de dimensión mayor como se ilustra en el siguiente ejemplo de una variedad compleja compacta conexa de dimensión 2.
Ejemplo: Consideremos $\mathcal{S} = \mathbb{C}^2/\Lambda = \mathbb{R}^4/\langle e_1, ..., e_4\rangle$ con e_i vectores linealmente independientes con coordenadas enteras, este espacio es un grupo.
Afirmamos que si Λ es general entonces $\mathcal{S}$ no tiene subvariedades complejas, por lo tanto $\mathcal{S}$ no puede ser una variedad proyectiva.

Ahora, queremos mostrar que existen

$$X \xrightarrow{\rho_1} ... \xrightarrow{\rho_m} X_{min}$$

donde X_i es suave para todo i, $X_i = Bl_p X_{i-1}$ y X_{min} es mínima.
Más aún tenemos dos opciones:

- $K_{X_{min}}$ es nef $\iff k(X) \geq 0$.
- $K_{X_{min}}$ no es nef entonces X_{min} es fibración Fano $\iff k(X) = -\infty$.

6. Clase 14/Sept/2021

Curvas en superficies (X superficie suave)

Deseamos definir $C.D$ donde C y D son divisores en X. Recordemos que dos curvas son transversales si las ecuaciones locales de C y D generan al ideal maximal $\mathfrak{m}_p \subset \mathcal{O}_{p,X}$.

Teorema:
1) Sean C y D dos curvas suaves que se intersectan transversalmente entonces

$$C.D = \#(C \cap D) \tag{1}$$

2) La ecuación (1) está inducida por un producto

$$Div(X) \times Div(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$(C, D) \longmapsto C.D$$

más aún, este producto solo depende de la clase de equivalencia lineal, i.e., genera un producto

$$Pic(X) \times Pic(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$(C, D) \longmapsto C.D$$

Demostración: Sea C curva irreducible suave en X y sea D curva transversal a ella, mostraremos que

$$\#(C \cap D) = grado_C(\mathcal{O}_X(D) \otimes \mathcal{O}_C$$

En efecto, tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \to \mathcal{O}_X(-D) \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_D \longrightarrow 0$$

Tensorizando con $\mathcal{O}$ obenemos

$$0 \to \mathcal{O}_X(-D) \otimes \mathcal{O}_C \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow \mathcal{O}_{c\cap D} \longrightarrow 0$$

donde $\mathcal{O}_{c\cap D}$ considera la intersección contando con multiplicidad.
Por lo tanto, se obtiene el resultado.

■

Ahora sean C y D divisores en X y H un divisor muy amplio.

Afirmamos que podemos asumir a $C + nH$, $D + nH$ y nH muy amplios para $n >> 0$.
Tomemos líneas $C' \in |C + nH|$, $D' \in |D + nH|$ transversal a C', $E' \in |nH|$ transversal a D' y $F' \in |nH|$ transversal a C' y E'. Entonces $C \sim C' - E'$ y $D \sim D' - F'$, por lo cual $C.D = \#(C' \cap D') - \#(C' \cap F') - \#(E' \cap D') + \#(E' \cap F')$. Notemos que este producto está bien definido.

Observación: Si $D \subset X$ es una curva no singular y C es un divisor. Entonces

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(-D) \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_D \longrightarrow 0$$

Tensorizando con $\mathcal{O}_X(-C)$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(-D - C) \longrightarrow \mathcal{O}_X(-C) \longrightarrow \mathcal{O}_D(-C) \longrightarrow 0$$

Tomando la característica de Euler a ambas sucesiones exactas obtenemos que $\chi(\mathcal{O}_X(-D-C)) + \chi(\mathcal{O}_D(-C)) = \chi(\mathcal{O}_X(-C))$ y $\chi(\mathcal{O}_X(-D)) + \chi(\mathcal{O}_D) = \chi(\mathcal{O}_X)$.
De aquí resulta que

$$\chi(\mathcal{O}_X) + \chi(\mathcal{O}_X(-D-C)) - \chi(\mathcal{O}_D(-C)) - \chi(\mathcal{O}_X(-D)) = \chi(\mathcal{O}_D) - \chi(\mathcal{O}_X(-C))$$

Aplicando Teorema de Riemann-Roch (usando el hecho de que X es no singular)

$$\chi(\mathcal{O}_D) - \chi(\mathcal{O}_X(-C)) = -grado_D(\mathcal{O}(-C)) = grado(\mathcal{O}(C))$$

con $C, D \in Pic(X)$.

7. Clase 17/Sept/2021

Así, tenemos

$$Div(X) \times Div(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$(C, D) \longmapsto C.D$$

Si C y D son dos curvas transverales $C.D = \#|C \cap D|$. Más aún, esta operación no depende de representantes en el grupo de Picard por lo que se extiende a

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : Pic(X) \times Pic(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

Si las curvas no son transversales pero comparten componentes entonces podemos reducir el problema al caso anterior. Sea $C \subset X$ una curva suave y consideramos $C.C$, podemos "moverla" en su serie lineal y obtener otra curva C' de la misma clase de equivalencia que no la intersecta ni comparte componentees y volvemos al caso de antes.

¿Qué ocurre si C y D son curvas no transversales sin componentes en común?
Definimos por ello,

$$(C.D)_p := dim_{\mathbb{K}} \mathcal{O}_{p,X}/f, g$$

donde f y g son ecuaciones locales de los divisores C y D alrededor de $p \in X$.

Proposición:
$$C.D = \sum_{p \in C \cap D} (C.D)_p$$

Si no podemos "mover"la curva entonces tomo

$$C.C = deg_C(\mathcal{O}_X(C) \otimes \mathcal{O}_C) = deg_C(dual(\mathcal{O}_X(-C) \otimes \mathcal{O}_C))$$

donde $I_C = \mathcal{O}_X(-C) \subset \mathcal{O}$ es el ideal de C en X.
Por lo cual,

$$\begin{aligned} C.C &= deg_C(dual(\mathcal{O}_X(-C) \otimes \mathcal{O}_C)) \\ &= deg_C(Hom_X(I_C, \mathcal{O}_X)) \\ &= deg_C(Hom_C(I_C/I_C^2, \mathcal{O}_X)) \\ &= deg_C(N_C/X) \end{aligned}$$

Más aún, definamos el concepto que será útil posteriormente.
Definición: Sean D y D' divisores de X entonces $D \equiv D'$ si y sólo si $D.C = D.C'$ para toda curva $C \subset X$ irreducible, en este caso se dicen **numéricamente equivalentes.**
Definimos el **grupo de Néron-Severi** como

$$N^1(X)_{\mathbb{R}} := Pic(X)/\equiv \otimes \ \mathbb{R}$$

Teorema:(de la base de Severi) Si X es superficie suave compleja entonces

$$dim\ N^1_{\mathbb{R}} < \infty$$

Argumento: Consideramos $\varphi : Pic(X) \longrightarrow N^1(X) \subset H^2(X, \mathbb{Z})$.

Entonces para curvas tenemos los siguientes espacios

Equivalencia lineal	Equivalencia Numérica	Homología
$Pic(X)$	$N^1(X)$	$H^2(X, \mathbb{Z})$

Dada una curva $C \subset X$ podemos moverla en su respectiva clase de equivalencia.

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{exp} \mathcal{O}_X^* \longrightarrow 0$$

Tomando cohomología

$$H^1(\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(\mathcal{O}_X) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}^*) = Pic(X) \xrightarrow{Chern} H^2(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(X, \mathcal{O}_X)$$

Teorema:(Lefschetz) $Im(Chern) = N^1(X)$ es finitamente generado sobre $\mathbb{Z}$ y $dim\ N^1(X)_{\mathbb{R}} \leq b_2(X) = dim\ H^2(X, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{K} < \infty$ donde $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.

Ejemplo:

$$0 \longrightarrow ToroC_x \longrightarrow Pic(X) \longrightarrow N^1(X) \longrightarrow 0$$

Si $h^1(\mathcal{O}_x) = q$ (la irregularidad de X) y $h^2(\mathcal{O}_x) = P_g$ (el género geométrico de X) son nulos

$$Pic(X) \cong N^1(X) \cong H^2(X, \mathbb{Z})$$

(Esto no depende de la dimensión de la curva X ($dim\ X = 2$) sino de los rangos de los espacios.)

7.1. Ejemplos.

1) $N^1(\mathbb{P}^n) \cong Pic(\mathbb{P}^n) \cong H^2(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$

Esto viene del hecho de que si D es un divisor en $\mathbb{P}^n$ y el grado de D es positivo entonces D es amplio.

2) $N^1(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m) \cong Pic(\mathbb{P}^n) \times Pic(\mathbb{P}^m) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}$

En este caso solo hay que notar que si π_1, π_2 son las proyecciones de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ a $\mathbb{P}^n$ y $\mathbb{P}^m$, respectivamente, entonces

$$Pic(\mathbb{P}^n) = \pi_1^* Pic(\mathbb{P}^n) \qquad \text{y} \qquad Pic(\mathbb{P}^m) = \pi_2^* Pic(\mathbb{P}^m)$$

Suponiendo que $n = m = 1$ podemos ver el cono efectivo como sigue

3) Si $X = Bl_p\mathbb{P}^2$, la explosión de $\mathbb{P}^2$ en el punto p y $\pi : Bl_p\mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$. Entonces

$$N^1(X) \cong Pic(X) \cong Pic(\mathbb{P}^2) \oplus \mathbb{Z} \cdot E \cong \pi^*\ell \oplus \mathbb{Z} \cdot E$$

Si tomamos una recta ℓ en $\mathbb{P}^2$

8. El Cono de curvas de Mori

Definición 8.1. (Cono de curvas de Mori) Consideremos X un superficie suave, se define el *cono de curvas de Mori* como la cerradura del cono que generan las curvas efectivas:

$$\overline{\mathrm{NE}}(X) := \overline{\{\sum a_i[C_i] \mid a_i \geq 0,\ C_i \text{ curva irreducible }\}} \subset N^1(X).$$

Este cono puede ser arbitrariamente complicado, incluso para superficies suaves bien conocidas. Ver ¿? para un ejemplo donde $\overline{\mathrm{NE}}$ no es cerrado y ver ¿? para un ejemplo donde el dicho cono posee una infinidad de rayos extremales. No obstante ejemplos de este tipo, el punto más alto de este texto ilustrará que dicho cono, dentro de su enorme complejidad, posee estructura que captura la geometría birracional de X.

Observar que el producto de intersección $\langle\cdot,\cdot\rangle : N^1(X) \times N^1(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$ nos da una noción de dualidad. En efecto, el espacio dual de un divisor C es el subspacio de clases de divisores D tales que $\langle C, D\rangle = 0$.

8.1. Ejemplos de conos.

9. Criterios de amplitud

A continuación estudiaremos el dual del cono de curvas $\overline{\mathrm{NE}}(X)^\vee = \mathrm{Nef}(X)$.

Teorema 9.1. *(Nakai-Moishenzon) Consideremos una superficie suave X y D un divisor de Cartier de X. Entonces, D es un divisor amplio si y sólo si $D^2 > 0$ y $D.C > 0$ para toda curva irreducible $C \subset X$.*

Demostración. Supongamos que el divisor D es amplio. Entonces, para $m \gg 0$, el siguiente morfismo es un encaje

$$\varphi = \varphi_{|mD|} : X \longrightarrow \mathbb{P}^N.$$

Se sigue que el grado de la imagen de φ es igual a $\mathrm{grado}(\varphi(X)) = m^2D^2 > 0$. Similarmente, dada una curva $C \subset X$, tenemos que el grado de su imagen bajo φ en $\mathbb{P}^N$, es igual a $mD.C = \mathrm{grado}(C) > 0$.

Recíprocamente, asumamos ahora que $D^2 > 0$ además de $C.D > 0$, para toda curva $C \subset X$. Recordemos que si H denota un divisor amplio, entonces mH es la clase de una curva en X, si $m \gg 0$.

Supongamos $h^0(K_X - mD) > 0$, lo cual implica que $K_X - mD$ representa una curva. Por lo tanto, tenemos $(K_X - mD).H > 0$ de donde sigue que $K_X.H > D.mH > 0$ lo cual es una contradicción para $m \gg 0$. Concluimos que $h^2(mD) = h^0(K_X - mD) = 0$.

El párrafo de arriba implica que el Teorema de Riemann- Roch ($\mathfrak{RR}$) se escribe así:

$$\begin{aligned} h^0(mD) - h^1(mD) &= 1 - q + P_g + \tfrac{1}{2}m^2D^2 - \tfrac{1}{2}mD.K \\ &= 1 + P_a + \tfrac{1}{2}m^2D^2 - \tfrac{m}{2}D.K, \end{aligned}$$

donde $h^0(mD) \geq 1 + P_a + \frac{1}{2}m^2D^2 - \frac{1}{2}mD.K \geq 0$ si $m \gg 0$. Concluimos que mD es efectivo para $m \gg 0$. Se sigue que en lo subsecuente, podemos asumir que D es efectivo; aun que posiblemente podría ser reducible, no reducido y/o singular.

Asumamos D efectivo y además irreducible, reducido y no singular. Los detalles sobre cómo eliminar estas últimas 3 propiedades se pueden ver en [Hart, pág. 365].

Observar $\mathcal{O}_X(D)|_D$ es amplio en D pues $D^2 > 0$, y entonces $\mathcal{O}_X(mD)$ está generado por secciones globales. En efecto, si consideramos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(-D) \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_D \longrightarrow 0,$$

la cual, tensorizando con $\mathcal{O}_X(mD)$, se escribe:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X((m-1)D) \longrightarrow \mathcal{O}_X(mD) \longrightarrow \mathcal{O}_D(mD) \longrightarrow 0.$$

Así, la sucesión exacta larga inducida en cohomología se escribe así:

$$0 \longrightarrow H^1(X, (m-1)D) \longrightarrow H^1(X, mD) \longrightarrow H^1(D, mD) \longrightarrow 0.$$

Dado que D restringe a un divisor amplio en D, entonces si $m \gg 0$ se tiene que $H^1(D, mD) = 0$, lo cual implica que $H^1(X, (m-1)D) \longrightarrow H^1(X, mD)$ es suprayectiva; es decir, $h^1(X, (m-1)D) \geq h^1(X, mD)$. Asumiendo $m \gg 0$, tenemos por tanto que $h^1(X, (m-1)D) = h^1(X, mD)$. De esto y nuevamente de la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X((m-1)D) \longrightarrow \mathcal{O}_X(mD) \longrightarrow \mathcal{O}_D(mD) \longrightarrow 0,$$

tomando cohomología, deducimos que

$$H^0(X, mD) \longrightarrow H^0(D, mD)$$

es suprayectiva para $m \gg 0$.

Observemos que $\mathcal{O}_X(mD)|_D$ es generado por secciones globales por ser amplio. Dichas secciones levantan a secciones de $H^0(X, mD)$ y sólo tienen ceros en D. Éstas secciones en $H^0(X, mD)$ generan los tallos sobre y fuera de D, además de tener sus ceros en D. Por lo tanto, $\varphi = \varphi_{|mD|} : X \to \mathbb{P}^N$ es un morfismo. Este morfismo tiene fibras finitas, pues de lo contrario existiría una curva $E \subset X$ tal que $\varphi(E) = \{q\}$. Si consideramos H muy amplio tal que $q \notin H \cap \varphi(X)$, entonces $\varphi^*(H) \cap E = 0$. Esto implica que $mD \cdot E = 0$, lo cual es una contradicción. Concluimos que φ tiene fibras finitas, y por lo tanto es finito (Stein factorization). Se sigue que $\varphi^*(H) = mD$ es amplio (!). Esto finaliza la prueba del teorema. □

Una consecuencia del teorema anterior y que es importante en los fundamentos de la teoría de Mori es la siguiente:

Proposición 9.2. *(Teorema débil de Kleiman) Si un divisor D en una superficie suave es nef, entonces $D^2 \geq 0$ y además $D + \epsilon H$ es amplio para todo $\epsilon > 0$ con H amplio.*

Demostración. Mostremos que $D^2 > 0$. Para ello, notemos que $P(t) = (D + tH)^2$ es continua y creciente para $t \in \mathbb{Q}^+$ y además tenemos que $P(t) > 0$ para $t >> 0$. Más aún, si $t \in \mathbb{Q}^+$ y $P(t) > 0$, entonces $P(t/2) > 0$. Esta última desogualdad se cumle por la siguiente razón. La desigualdad $H(D + tH) > 0$ se sigue de que H es amplio, y ahora si $(D + tH)^2 > 0$ entonces $n(D + tH)$ es efectivo para $n >> 0$ por el teorema de Riemann-Roch[1] ($\mathfrak{RR}$). Como D es nef entonces $D(D + tH) \geq 0$, por lo que

$$(D + \tfrac{t}{2}H)^2 = D(D + tH) + \tfrac{t^2}{4}H^2 \geq 0.$$

Con esto concluimos que $D^2 \geq 0$.

Para mostrar que $D + \epsilon H$ es amplio, basta notar que $(D + \epsilon H) \cdot C > 0$ para toda curva C y además $(D + \epsilon H)^2 > 0$. Entonces por el Teorema 9.1 (Nakai-Moishezon) tenemos que $D + \epsilon H$ es amplio. □

Si H es un divisor amplio en X ¿qué sucede con los divisores de X tal que $H \cdot D = 0$?

Corolario 9.3. *(Teorema del índice de Hodge) Si H es amplio con $H \cdot D = 0$, entoces $D^2 \leq 0$. En el caso $D^2 = 0$, entonces $D \equiv 0$.*

Demostración. Si $D^2 > 0$ entonces nD es efectivo para $n >> 0$, lo cual es un contradicción a $H \cdot D = 0$. □

El siguiente criterio indica que la amplitud de un divisor es una propiedad numérica.

Teorema 9.4. *(Criterio de amplitud de Kleiman,* [Kleiman]*) Considerar L un haz de línea sobre S. Entonces L es amplio si y sólo si $L \cdot C > 0$ para todo $C \in \overline{\mathrm{NE}}(S)$.*

[1] Si $D^2 > 0$, entonces $h^0(nD) \neq 0$ ó bien $h^0(-nD) \neq 0$. Cada caso está determinado por el signo de la intersección $H.D$.

Demostración. Asumamos que D es amplio. Entonces, $D \cdot Z \geq 0$ para todo $Z \in \overline{\mathrm{NE}}(X)$. Más aún, la amplitud de D implica que $D + tE$ es amplio si $t > 0$ es suficientemente pequeño y E es cualquier haz de línea en S.

Supongamos que $D \cdot Z = 0$ para algún $Z \neq 0$. Por el teorema del índice de Hodge (corolario 9.3) tenemos que $Z^2 < 0$. Esto implica que para cualquier $t > 0$, tenemos $(D + tZ) \cdot Z < 0$. Esta última desigualdad impide que $D + tZ$ sea amplio; lo cual contradice que D sea amplio. Por lo tanto, $D \cdot Z > 0$ para todo $Z \in \overline{\mathrm{NE}}(X)$.

Recíprocamente, supongamos que $D \cdot Z > 0$ para todo $Z \in \overline{\mathrm{NE}}(X)$. Consideremos la norma euclidiana $\| \cdot \|$ en el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $N^1(X)_{\mathbb{R}}$. Consideremos

$$K := \{z \in \overline{\mathrm{NE}}(X) \ : \ \|z\| = 1\},$$

y notemos que este conjunto es compacto por ser cerrado y acotado. El funcional $z \mapsto D \cdot z$ es positivo en K y está acotado inferiormente por $a \in \mathbb{Q}^+$. Si H es amplio en X, el funcional $z \mapsto H \cdot z$ sobre K está acotado superiormente por $b \in \mathbb{Q}^+$. Se sigue de esto que $D - \frac{a}{b}H$ es no negativo en K y por tanto en $\overline{\mathrm{NE}}(X)$. Esto es, $D - \frac{a}{b}H$ es nef y como la suma de un divisor nef con un amplio resulta en un divisor amplio, tenemos que $D = (D - \frac{a}{b}H) + \frac{a}{b}H$ es amplio. $\square$

Observemos que si L es amplio, entonces $L \cdot C > 0$ para todo $C \in \mathrm{NE}(S)$. Sin embargo, si $L \cdot C > 0$ para toda $C \in \mathrm{NE}(S)$, esto no implica que L sea amplio. Ver ejemplo ¿?. En otras palabras:

$$L \text{ amplio } => \ L > 0 \text{ en } \ \mathrm{NE}(S)$$

$$L \text{ amplio } <= \ \textit{no} \ L > 0 \text{ en } \ \mathrm{NE}(S)$$

10. El criterio de contracción de Castelnuovo

En esta sección S denotará siempre una superficie suave y proyectiva [homogenizar notación en secciones anteriores]. Demostraremos el criterio de contraccíon de Castelnuovo el cual es importante para encontrar el modelo minimal de una superficie suave.

Definición 10.1. Una curva $E \subset S$ es una **curva (-1)** si satisface: $E \cong \mathbb{P}^1$ y además $E^2 = -1$.

El ejemplo más importante de una curva **(-1)** es el divisor excepcional E de la explosión de en un punto suave: $E \subset Bl_pS \xrightarrow{\pi} S$. Es decir, dada una superficie suave S, podemos construir otra superficie $S' = Bl_pS$ birracional a ella con una curva (-1). El siguiente teorema nos indica cómo llevar a cabo el inverso de esta construcción. Más importante, exhibe la importancia que tienen las curvas racionales en la geometría birracional de una variedad algebraica.

Castelnuovo y Enriques demostraron el criterio de contracción en 1910 [CE01]. La siguiente demostración sigue de cerca la presentada por Hartshorne [Hart].

Teorema 10.2. *(Criterio de contracción de Castelnuovo) Si E es una curva (-1) en una superficie S, entonces existe un morfismo $f : S \to S_0$ a una superficie proyectiva suave S_0 tal que S es isomorfa la explosión con centro en un punto $p \in S_0$, con E la curva excepcional.*

Demostración. Con esta hipótesis, exhibiremos a S como la explosión en un punto de una superficie suave S_0. Comenzaremos, construyendo un morfismo, inducido por un sistema lineal, de $S \to S_0$ donde S_0 es una superficie. Al final mostraremos que S_0 es suave y que $S = Bl_pS_0$.

Construyamos primero dicho morfismo $S \to S_0$. Denotemos por H a un divisor muy amplio en S tal que $H^1(S, \mathcal{O}_S(H)) = 0$. Este divisor existe por el Teorema Serre-Grothendieck [Hart, III, Teorema 5.2, pág.228]. El entero $k = (H \cdot E)$, satisface $k > 0$, por teorema de Nakai-Moishezon (Teorema 9.1). Más aún, podemos asumir $k \geq 2$. Ahora, definamos $\mathscr{M} := \mathcal{O}_S(H + kE)$.

Procederemos ahora en varios pasos:

Paso 1: Primero probaremos por inducción sobre i que $H^1(S, \mathcal{O}_S(H + iE)) = 0$ para toda $i \in \{0, 1, \ldots k\}$. Sabemos que esto es cierto para $i = 0$. Así, supongamos que es cierto para $i - 1$ y demostremos que es cierto para i. Empecemos por considerar la siguiente sucesión exacta

$$0 \to \mathcal{O}_S(-E) \to \mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_E \to 0,$$

de la cual obtenemos:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{O}_S(-E) \otimes \mathcal{O}_S(H+iE) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{O}_S \otimes \mathcal{O}_S(H+iE) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{O}_E \otimes \mathcal{O}_S(H+iE) \arrow[r] & 0 \\ & \mathcal{O}_S(H+(i-1)E) & \mathcal{O}_S(H+iE) & & \end{tikzcd}$$

Como $E \cong \mathbb{P}^1$ y además $((H+iE)\cdot E) = (H\cdot E) + i(E\cdot E) = k-i$, entonces $\mathcal{O}_E \otimes \mathcal{O}_S(H+iE) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k-i)$. Se sigue que la sucesión exacta larga en cohomología se escribe así:

$$\cdots \to H^1(S, \mathcal{O}_S(H+(i-1)E)) \to H^1(S, \mathcal{O}_S(H+iE)) \to H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k-i)) \to \cdots$$

Por hipótesis de inducción podemos asumir $H^1(S, \mathcal{O}_S(H+(i-1)E)) = 0$. Dado que para $i \leqslant k$ se tiene $H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k-i)) = 0$, concluimos que $H^1(S, \mathcal{O}_S(H+iE)) = 0$.

Paso 2: Mostraremos que el haz de línea $\mathscr{M}$ está generado por secciones globales.

Dado que H es muy amplio, el sistema lineal $|H+kE|$ no tiene puntos base en el complemento de E. Se sigue que es suficiente mostrar que $\mathscr{M}$ es generado por secciones globales en los puntos de E. Notar que $\mathscr{M} \otimes \mathscr{I}_E \cong \mathcal{O}_S(H+(k-1)E)$ y además $H^1(S, \mathcal{O}_S(H+(k-1)E)) = 0$ por el paso 1. Se sigue que la siguiente aplicación restricción es suprayectiva

$$H^0(S, \mathscr{M}) \to H^0(E, \mathscr{M} \otimes \mathcal{O}_E) \to 0.$$

Además $((H+kE)\cdot E) = (H\cdot E) + k(E\cdot E) = k-k = 0$ de donde se sigue que $\mathscr{M} \otimes \mathcal{O}_E \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ que es generado por la sección global 1. Levantando esta sección a $H^0(S, \mathscr{M})$ y usando el Lema de Nakayama tenemos que $\mathscr{M}$ es generado por secciones globales en todo punto de E.

Aquí voy.

Paso 3: Probaremos que $\mathscr{M}$ determina un morfismo de S en un espacio proyectivo que es un isomorfismo entre $S-E$ y su imagen menos un punto.

El paso anterior implica que $|H+kE|$ es libre de puntos base y por lo tanto determina un morfismo $f_1 : S \to \mathbb{P}^N$. Sea S_1 la imagen de S bajo este morfismo. Dado que $f_1^*\mathcal{O}(1) \cong \mathscr{M}$ y el grado de $\mathscr{M} \otimes \mathcal{O}_E$ es 0, f_1 contrae a E a un punto $p_1 \in S_1$. Por otro lado, H es muy amplio, por lo que $|H+kE|$ separa puntos y separa puntos infinitamente cerca (lejos de E), además separa los puntos de E de puntos que no están en E, por [Hart, II, Proposición 7.3, pág.152] se tiene que f_1 es un isomorfismo de $S-E$ en $S_1 - \{p_1\}$.

Paso 4: Determinaremos a S_0 y al morfismo $f : S \to S_0$ del Teorema.

Sea S_0 la normalización de S_1 y $g : S_0 \to S_1$ el morfismo que cumple la propiedad universal de la normalización. Como S es suave y por lo tanto normal, la propiedad universal de la normalización nos dice que el morfismo f_1 se factoriza como

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f_1"'] & S_0 \arrow[d, "g"] \\ & S_1 \end{tikzcd}$$

Dado que E es irreducible, se tiene que $f(E)$ se contrae en un punto $p \in S_0$, además $S_1 - \{p_1\}$ es no singular, lo que implica que f es un isomorfismo entre $S-E$ y $S_0 - \{p\}$.

Paso 5: Probaremos que S_0 es no singular en p.

Dado que S es normal y f birracional, tenemos que $f_*\mathcal{O}_S \cong \mathcal{O}_{S_0}$ y por lo tanto, podemos aplicar el teorema sobre funciones formales [Hart, III, Teorema 11.1, pág. 277] y concluir que la completación del anillo $\mathcal{O}_p$ es:

$$\widehat{\mathcal{O}_p} \cong \lim_{\leftarrow} H^0(E_n, \mathcal{O}_{E_n})$$

donde E_n es un subesquema cerrado de S definido por $\mathfrak{M}_p^n \mathcal{O}_S$, como $f^{-1}(p) = E$, esta sucesión de ideales es cofinal con la sucesión de ideales $\mathscr{I}_E^n$, donde $\mathscr{I}_E$ es el ideal de E, por [Hart, II, Observación 9.3.1, pág. 194] podemos considerar estos ideales en lugar de los de la definición de E_n. Probaremos por inducción que para cada $n > 0$, $H^0(E_n, \mathcal{O}_{E_n})$ es isomorfo al anillo de series de potencias truncado $A_n := k[[x, y]]/(x, y)^n$. Si $n = 1$, por hipótesis $E \cong \mathbb{P}^1$ y $E^2 = -1$ de donde concluimos que $H^0(E, \mathcal{O}_E) = k$ y $\mathscr{I}_E/\mathscr{I}_E^2 \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$. Por [Hart, II, Teorema 8.21, pág. 184] se tiene que $\mathscr{I}_E^n/\mathscr{I}_E^{n+1} \cong S^n(\mathscr{I}_E/\mathscr{I}_E^2) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$. Considerando la sucesión exacta:

$$0 \to \mathscr{I}_E^n/\mathscr{I}_E^{n+1} \to \mathcal{O}_{E_{n+1}} \to \mathcal{O}_{E_n} \to 0$$

al pasar a cohomología sabemos que $H^i(E, \mathcal{O}_{P^1}(n)) = 0$ para toda $i > 0$ y $n > 0$ lo que nos da las siguientes sucesiones exactas:

$$0 \to H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)) \to H^0(\mathcal{O}_{E_{n+1}}) \to H^0(\mathcal{O}_{E_n}) \to 0$$

para $n = 1$, $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))$ es un k-espacio vectorial de dimensión 2. Tomando una base x, y se tiene que $H^0(\mathcal{O}_{E_2})$ contiene a k y es isomorfo a A_2. Inductivamente, si $H^0(\mathcal{O}_{E_n})$ es isomorfo a A_n, levantando los elementos x, y en $H^0(\mathcal{O}_{E_{n+1}})$. Como $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n))$ es un espacio vectorial con base $x^n, x^{n-1}y, \ldots, y^n$ se tiene que $H^0(\mathcal{O}_{E_{n+1}}) \cong A_{n+1}$ lo que prueba la afirmación. De esta manera, se tiene que:

$$\widehat{\mathcal{O}_p} \cong \lim_{\leftarrow} H^0(E_n, \mathcal{O}_{E_n}) \cong \lim_{\leftarrow} A_n = k[[x, y]]$$

el cual es un anillo local y por lo tanto regular, por [AM78, 10, Proposición 10.15, pág.121] se tiene que $\mathcal{O}_p$ es un anillo regular, por lo tanto, p es un punto no singular.

Paso 6: Probaremos que S es la explosión de S_0 en p.

Como S_0 es una superficie suave y por construcción f contrae unicamente a E y por [Hart, V, corolario 5.4, pág.411], $f : S \to S_0$ es la composición de exactamente un blow-up con un isomorfismo, lo cual prueba el teorema.

□

Le hacemos notar al lector que las propiedades que definen a las curvas -1 son justas. Es decir, existen curvas racionales suaves en superficies que no satisfacen $C^2 = -1$ y de igual manera, existen curvas irreducibles, reducidas que satisfacen $C^2 = -1$ y que no son racionales y en ambos casos dichas curvas no pueden contraerse. Ver ejemplos de ambos casos en **??**.

Observación 1. Notemos que si suponemos que $E^2 = -2$ en el paso 5 del teorema 10.2 obtendríamos las siguientes sucesiones exactas:

$$0 \to H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2n)) \to H^0(\mathcal{O}_{E_{n+1}}) \to H^0(\mathcal{O}_{E_n}) \to 0$$

De donde concluimos para el caso $n = 1$ que $dim H^0(\mathcal{O}_{E_2}) = 4$, por lo que $H^0(\mathcal{O}_{E_2})$ no es isomorfo a A_m para toda m, inductivamente concluimos que para toda $n > 1$,

$H^0(\mathcal{O}_{E_n})$ no es isomorfo a A_m para toda m, y por lo tanto:

$$\widehat{\mathcal{O}_p} \ncong \lim_{\leftarrow} A_n = k[[x,y]]$$

lo cual prueba que p es un punto singular de la superficie S_0.

M: listo, aquí termina lo que tenía que agregar, además agregue la observación, de arriba a la cual espero sus comentarios de cualquier error.

Programa de Modelo Minimal para superficies (versión preliminar)

Definición: Una superficie S se dice **minimal** si no contiene $(-1)-curvas$.
Observación: Sea E una curva irreducible y reducida. Entonces E es una $(-1)-curva$ si y sólo si $K_S \cdot E < 0$ y $E^2 < 0$.
Demostración: Antes de realizar la demostración, notemos lo siguiente: Considerando la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S(-E) \longrightarrow \mathcal{O}_S \longrightarrow \mathcal{O}_E \longrightarrow 0$$

y tomamos característica de Euler se tiene que

$$\xi(\mathcal{O})_E = \xi(\mathcal{O}_S) - \xi(\mathcal{O}(-E))$$

Además por el Teorema de Riemann-Roch tenemos que

$$\xi(\mathcal{O}(-E)) = \tfrac{1}{2}(K_S + E) \cdot E + \xi(\mathcal{O}_S)$$

entonces

$$\xi(\mathcal{O})_E = -\tfrac{1}{2}(K_S + E) \cdot E$$

Por otro lado, como

$$\xi(\mathcal{O}_E) = h^0(E, \mathcal{O}_E) - h^1(E, \mathcal{O}_E))$$

y puesto que E es irreducible y reducida tenemos que $h^0(E, \mathcal{O}_E) = 1$, entonces

$$\xi(\mathcal{O}_E) = 1 - g(E)$$

Es decir,

$$1 - g(E) = -\tfrac{1}{2}(K_S + E) \cdot E$$

de donde podemos concluir que

$$h^1(E, \mathcal{O}_E) = g(E) = \tfrac{1}{2}(K_S + E) \cdot E + 1$$

Ahora procedemos a la demostración:
$\Leftarrow$] Supongamos que E es una (-1)-curva entonces $E \cong \mathbb{P}^1$ y $E^2 = -1$, entonces

$$0 = h^1(E, \mathcal{O}_E) = \tfrac{1}{2}(K_S + E) \cdot E + 1$$

por lo cual $K_S \cdot E + E^2 = -2$ y como $E^2 = -1$, tenemos que $K_S \cdot E = -1$. Por lo que tenemos que $K_S \cdot E < 0$ y $E^2 < 0$.
$\Rightarrow$] Puesto que $0 \leq h^1(E, \mathcal{O}_E) = \frac{1}{2}(K_S + E) \cdot E + 1$ y como sabemos que $K_S \cdot E < 0$ y $E^2 < 0$, entonces $E^2 = -1$, $K_S \cdot E = -1$ y $h^0(E, \mathcal{O}_E) = 0$. Esto último implica que $E \cong \mathbb{P}^1$. De donde tenemos que E es una $(-1)-curva$.

11. Clase 12/Oct/2021

La idea de Mori es saber si es posible reemplazar la pregunta ¿existe una (-1)-curva en la superficie S? por ¿el divisor canónico K_S es nef? Es decir, cambiar un concepto geométrico por un concepto meramente numérico.

Entonces tenemos el siguiente teorema de $Mori$, en que nos permite saber que si el divisor canónico no es nef entonces existe una contracción extremal, esto es, existe una superficie minimal a la cual puede contraerse la superficie.

Teorema: (Contracción extremal) Si K_S no es nef entonces existe un morfismo $\varphi : S \to W$(llamado contracción) tal que:

1) φ no es un isomorfismo.
2) Si $C \subset S$ es una curva que se contrae, i.e., $\varphi(C) = p$ con $p \in W$ entonces $K_S \cdot C < 0$.
3) Las curvas contraídas por φ a un mismo punto (es decir $C, C' \subset S$ curvas tales que $\varphi(C) = q = \varphi(C')$ para algún $q \in W$) son numéricamente equivalentes.
4) φ tiene fibras conexas y W es un espacio normal.

Demostración: Si K_S no es nef entonces existe una curva $E \subset S$ con $K_S \cdot E < 0$. Sea H un divisor amplio en S, luego existe $r \in \mathbb{Q}^+$ tal que $L := H + rK_S$ que es nef pero no amplio.
Consideremos $\varphi_{|kL|} : S \to S'$, el morfismo inducido

12. Clase 19/Octubre /2021

Teorema (de Amplitud de Kleiman) Sea X una variedad suave proyectiva. Un divisor D en X es amplio si y sólo si $D \cdot Z > 0$ para todo $Z \in \overline{NE}(X)$.

Ahora presentaremos el Teorema de libertad de puntos base, pero antes de dar la demostración que fue la primera en ser presentada pero presentaba un error en el final de su argumento, sin embargo es importante porque arreglando este argumento es la forma en que se busca demostrar posibles generalizaciones de este teorema en dimensiones superiores. Posteriormente presentaremos la demostración correcta del teorema.
Aquí usaremos dos resultados que enunciamos a continuación.

Teorema (Extinción de Kodaira): Si X es una variedad suave proyectiva y A es divisor amplio, entonces

$$H^i(X, A + K_X) = 0 \text{ para todo } i > 0$$

Demostración: [-Referencia-]

Teorema (Kawamata-Viehweg): Si X es una variedad $\mathbb{Q}$-factorial entonces

$$H_i(X, \pi^*(K_S + A + E - F + G)) = 0 \text{ para todo } i > 0$$

Demostración: [-Referencia-]

Teorema (de libertad de puntos base) Sea L un divisor de Cartier en S (S suave de dimensión 2) tal que L es de la forma $L = A + rK_S$ con $r\mathbb{Q}^*$ y A amplio en S. Si L es nef entonces $|\ell L|$ no tiene puntos base.

Demostración (falsa): Supongamos que $p \in S$ es un punto base de $|\ell L|$. Consideremos $Bl_p S = \tilde{S} \xrightarrow{\pi} S$ y $E = \pi^{-1}(p)$.

Tomemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\tilde{S}}(\pi^*\ell L - E) \longrightarrow \mathcal{O}_{\tilde{S}}(\pi^*\ell L) \longrightarrow \mathcal{O}_E(\pi^*\ell L) = \mathcal{O}_E \longrightarrow 0$$

Tomando cohomología tenemos que

$$H^0(\mathcal{O}_{\tilde{S}}(\pi^*\ell)) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_E) \longrightarrow H^1(\mathcal{O}_{\tilde{S}}(\pi^*\ell L - E))$$

Si $H^1(\mathcal{O}_{\tilde{S}}(\pi^*\ell L - E)) = 0$ entonces la sección constante en $H^0(\mathcal{O}_E)$ levantaría a $H^0(\mathcal{O}_{\tilde{S}}(\pi^*\ell L)) = H^0(\mathcal{O}_{\tilde{S}}(\ell L))$ y no se anularía en E, por lo que no se anularía en p, lo que no es posible porque p es punto base de $|\ell L|$.

Para terminar la prueba basta mostrar que $H^1(\mathcal{O}_{\tilde{S}}(\pi^*\ell L - E)) = 0$, pero notando que $\pi^*K_S = K_{\tilde{S}} + E$, mostraremos que

$$H^1(\mathcal{O}_{\tilde{S}}(\pi^*(\ell L - K_S) - 2E + K_{\tilde{S}})) = 0$$

Observemos que $\ell L - K_{\tilde{S}}$ es amplio, esto debido a que podemos expresar $\ell L - K_{\tilde{S}} = \frac{1}{r}A + \frac{\ell r - 1}{r}L$, el cual es amplio aplicando el Teorema débil de Kleiman. Por otro lado, $-2E$ es π-amplio, es decir, es amplio en las fibras de π porque las fibras de π son puntos y el divisor excepcional, entonces $deg(\mathcal{O}_E(-2E)) = -2E \cdot E = 2$, es decir, $-2E$ es amplio.
(*)Luego, como $\ell L - K_{\tilde{S}}$ y $-2E$ son amplios, entonces $\pi^*(\ell L - K_S) - 2E$ es amplio.

Por el Teorema de Kodaira, $H^1(\mathcal{O}_{\tilde{S}}(\pi^*(\ell L - K_S) - 2E + K_{\tilde{S}})) = 0$, lo que concluye la prueba.

■

El error en esta demostración es el argumento(*), el cual es falso.

13. Clase 21/Octubre/2021

Demostración del Teorema de Libertad de puntos base:
Notemos que $L^2 \geq 0$. De hecho,

$$L^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(nL + A)^2$$

Por el Teorema de Kleiman débil, $nL + A$ es amplio, de donde $(nL + A) > 0$, lo cual implica que $L^2 \geq 0$.

$\cdot$) Caso $L^2 > 0$:
Primero tenemos que $L \cdot C > 0$ para toda curva C pues L es nef.
Como suponemos $L^2 > 0$, por Nakai-Moishezon se sigue que L es amplio, lo cual termina el argumento.

Por el contrario, asumamos que existe una curva $E \subset S$ tal que $L \cdot E = 0$ entonces $K_S \cdot E < 0$ y $E^2 < 0$ por el Teorema del índice de Hodge. Entonces E es una (-1)-curva.

Entonces al aplicar el criterio de Castelnouvo obtenemos $\mu : S \longrightarrow S'$ contracción de E, que satisfacen:
1) $L' = \mu^* L$ con L' nef en S'.
2) $L' = \mu^* L = \mu^* A + rK_{S'}$ donde $\mu^* A$ es amplio en S'.

Repetimos el análisis reemplazando L en S con L' en S'. Eventualmente estaremos en el caso $L^2 > 0$ sin curvas que anulen su producto con L. Lo cual también concluye el argumento.

·) Caso $L^2 = 0, L \not\equiv 0$:
Puesto que $L \not\equiv 0$, existe una curva $D \subset S$ tal que $L \cdot D > 0$.

Afirmamos que $L \cdot K_S < 0$.
En efecto, puesto que

$$0 = L^2 = (A + rK_S) \cdot L = A \cdot L + rK_S \cdot L$$

Entonces $rK_S \cdot L = -A \cdot L$ y tenemos que $A \cdot L > 0$, debido a que A es amplio y $L \in \overline{NE(S)}$.

Observemos que por el Teorema de Kleiman débil, $\ell L - K_S = \frac{1}{r}A + \frac{\ell r - 1}{r}L$ es amplio.
Entonces aplicando el Teorema de Riemann-Roch,

$$\chi(\mathcal{O}_S(\ell L)) = \tfrac{1}{2}(\ell L - K_S) \cdot \ell L + \chi(\mathcal{O}_S) = -\tfrac{1}{2} L \cdot K_S + \chi(\mathcal{O}_S)$$

Dado que $\ell L - K_S$ es amplio, por el Teorema de Kodaira $H^i(S, \mathcal{O}_S(\ell L - K_S + K_S)) = 0$ para todo $i > 0$.
Por lo cual, $\chi(S, \mathcal{O}_S(\ell L)) = h^0(\mathcal{O}(\ell L))$.
Entonces $|\ell L| = |F| + |M|$, donde F es fijo y $|M|$ no tiene componentes fijas, de donde M es nef.

Además, se tiene que $0 \leq M^2 \leq M \cdot (M + F) = M \cdot \ell L \leq \ell^2 L^2 = 0$, de donde $M^2 = 0$ y por tanto no tiene puntos base.

Consideremos su morfismo $\Phi_{|M|} : S \longrightarrow V'$ y tomemos su factoriazación de Stein (podemos asumir que V es normal)

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\Phi} & V \\ & \searrow_{\Phi_{|M|}} & \downarrow \psi \\ & & V' \end{array}$$

Como $M \cdot F = 0$ entonces las fibras de Φ contienen a F, y puesto que $F^2 = 0$ entonces $F = \Phi^*(\sum a_i P_i)$ con $a_i \in \mathbb{Q}, P_i \in V'$. Por lo que

$$|\ell' \ell L| = |\ell' \Phi^*(\psi^* \mathcal{O}_{V'}(1) + \sum a_i P_i)$$

el cual es libre de puntos base para $\ell' > 0$ divisible. Es decir, ℓL es libre de puntos base.

Esto termina el caso $L^2 = 0, L \not\equiv 0$.

$\cdot$) Caso $L^2 = 0, L \equiv 0$:

Basta probar que $h^0(\ell L) = 0$ para $\ell > 0$ divisible. Notemos que $\ell L - K_S \equiv -K_S \equiv \frac{1}{r}A$ el cual es amplio para $\ell \in \mathbb{Z}$. Entonces

$$h^0(S, \mathcal{O}_S(\ell L)) = \chi(\mathcal{O}_S(\ell L)) = h^0 - h^1 + h^2(S, \mathcal{O}_S(K_S - \ell L))$$

$$h^0(S, \mathcal{O}_S(K_S - \ell L)) = \tfrac{1}{2}(\ell L - K_S) \cdot \ell L + \chi(\mathcal{O}_S) = \chi(\mathcal{O}_S)$$

$$= h^0(\mathcal{O}_S) - h^1(\mathcal{O}_S) + h^2(\mathcal{O}_S) = h^0(\mathcal{O}_S) + P_a \geq 0$$

Basta observar que es estrictamente positivo. Por dualidad de Serre, $h^2(\mathcal{O}_S) = h^0(K_S) = 0$ porque $-K_S$ es amplio y por tanto no tiene secciones.

Ahora, $h^1(\mathcal{O}_S) = h^1(K_S) = H^1(S, K_S + (-K_S)) = 0$, esta última igualdad se obtiene de aplicar el Teorema de Kodaira tomando al divisor amplio $-K_S$.

Entonces $\chi(S, \mathcal{O}(\ell L)) = h^0(\mathcal{O}_S) = 1$.

$\blacksquare$

14. Clases 28/Octubre/2021 - 4/Nov/2021

Teorema (de racionalidad): Sea S superficie proyectiva suave tal que el divisor canónico K_S no es nef y sea A divisor amplio. Si definimos

$$r = \sup\{t \in \mathbb{R} \mid A + tK_S \text{ es nef }\}$$

entonces r es un número racional.
Demostración: *Caso 1:* Supongamos que $|kK_S| \neq \varnothing$ para algún $k \in \mathbb{N}$.
Entonces $\sum d_i D_i \in |kK_S|$, con $\{D_1, ..D_m\}$ base racional de $N_1(S)_{\mathbb{R}}$.
Por lo que tenemos que

$$A + tK_S \text{ es nef } \iff (A + tK_S) \cdot C \geq 0 \text{ para toda curva } C \subset S$$

$$\iff (A + t(\tfrac{\sum d_i D_i}{k})) \cdot C \text{ para toda curva } C \subset S$$

$$\iff (A + \tfrac{t}{k}(\sum d_i D_i)) \cdot D_j \text{ para todo } 1 \leq j \leq m$$

Tomemos $r := \min\{t_j | (A + t_j(\frac{1}{k}\sum d_i D_i)) \cdot D_j = 0\}$ y asumamos que $r \notin \mathbb{Q}$.
En este momento usaremos el siguiente lema:

Lema: Supongamos que existe un racional $r_0 > r$ (con r definido como antes), tal que, para algún $k \in \mathbb{N}$,

$$\mid k(A + r_0 K_S) \mid \neq \varnothing$$

entonces $r \in \mathbb{Q}$.

Escribamos $P(x, y) := \chi(\mathcal{O}(xA + yK_S))$, por el teorema de Riemann-Roch $P(x, y)$ es un polinomio cuadrático en (x, y).
Como $r \notin \mathbb{Q}$, existe una cantidad infinita de parejas $(u, v) \in \mathbb{Z}^2_{>0}$ tales que $0 < \frac{v}{u} - r < \frac{1}{3u}$. Para cualesquiera de estos pares, $P(ku, kv)$ es cuadrático en k y además tenemos que (como polinomio en k)

$$P(ku, kv) = 0 \iff P(x, y) \text{ es divisible por } xv - yu$$

Fijemos (u_0, v_0) tal que $0 < \frac{v_0}{u_0} - r < \frac{1}{3u_0}$ y $(xv_0 - yu_0) \nmid P(x,y)$, entonces como polinomio en k se tiene que $P(ku_0, kv_0) \neq 0$. Para $k = 1, 2, 3$ debemos tener que

$0 \neq P(ku_0, kv_0) = \chi(S, \mathcal{O}_S(ku_0A + kv_0K_S)) = (h^0 - h^1 + h^2)(\mathcal{O}_S(ku_0A + kv_0K_S)$

Observemos que $ku_0A + kv_0K_S = K_S + ku_0(A + \frac{kv_0-1}{kv_0}K_S)$ donde $ku_0(A + \frac{kv_0-1}{kv_0}K_S)$ es amplio pues $0 \leq \frac{kv_0-1}{kv_0} < r$.
Por Kodaira, $h^i(S, \mathcal{O}_S(ku_0A+kv_0K_S)) = 0$ para $i = 1, 2$ entonces $+h^0(\mathcal{O}_S(ku_0A+kv_0K_S) = P(ku_0, kv_0) \neq 0$. Se sigue que $r_0 = \frac{ku_0}{kv_0} < r$ y $|ku_0(A + r_0K_S)| \neq \varnothing$. Por el Lema, $r \in \mathbb{Q}$.

■

15. Clases 18-25/Noviembre /2021

Teorema del Cono: Sea S una superficie proyectiva sobre $\mathbb{C}$. Entonces

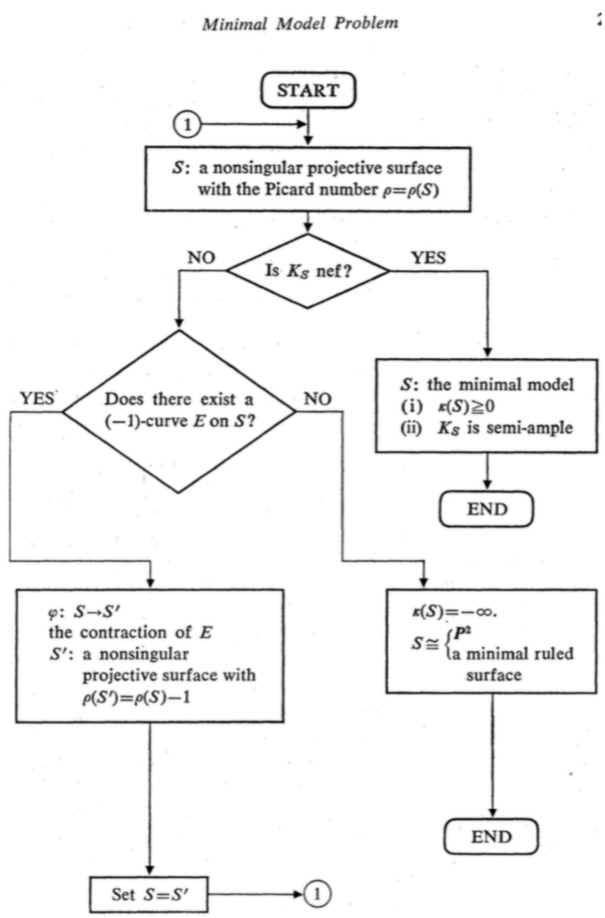
$$\overline{NE}(S) = \overline{NE}(S)_{K_S \geq 0} + \sum_{\ell \in \Omega}$$

donde

1) Ω es numerable.
2) R_i son rayos contenidos en $\overline{NE}(S)_{K_S<0}$ de la forma
$$R_i = \overline{NE}(S) \cap L^{\perp}$$
con L divisor nef (donde $L^{\perp}$ denota el ortogonal de L).
3) $\{R_i\}$ es discreta en $NE(S)_{K_S<0}$.
4) $R_i = [C_i]$ con C_i curva racional.

Demostración:

16. Clase 7/Diciembre /2021



17. Clase 10/Marzo/2022

Lema 17.1 (VI.1, (b)). *Si S es una superficie minimal con $K_S^2 < 0$ entonces $P_g = 0$ y $q \geqslant 1$.*

Demostración.

- Si $P_g \neq 0$, entonces existe un divisor efectivo $D \in |K_S|$, $D = \Sigma n_i C_i$ con $n_i > 0$, como $K_S \cdot D < 0$ existe C_i tal que $K_S \cdot C_i < 0$, pero $C_i \cdot C_j \geqslant 0$ para $i \neq j$ por lo que $C_i^2 < 0$ lo cual implica que C_i es una curva excepcional, lo cual contradice la minimalidad de S.
- Si $q = 0$ por el criterio de racionalidad de Castelnuovo S es racional, lo cual implica que $K_S^2 \in \{8, 9\}$.

□

Lema 17.2 (V.18). *Sea S una superficie con $P_g = 0$, $q \geqslant 1$ y $\alpha : S \to Alb(S)$ su mapeo de Albanesse, entonces $\alpha(S)$ es una curva.*

Demostración. [Be96, V.18, pag. 64] □

Proposición 17.3 (V.15). *Sea S una superficie y $\alpha : S \to Alb(S)$ su mapeo de Albanesse, si $\alpha(S)$ es una curva B, entonces B es suave de género q y α tiene fibras conexas.*

Demostración. [Be96, V.18, pag. 63] □

Proposición 17.4 (VI.2). *Sea S una superficie minimal con $K_S^2 < 0$, entonces S es una superficie reglada.*

Demostración.
Por el lema 17.1 se tiene que $P_g = 0$ y $q \geqslant 1$, que son las hipótesis del lema 17.2, por lo que la imagen del mapeo de Albanesse $\alpha : S \to Alb(S)$ es una Curva B y por la proposición 17.3 esta es suave y α tiene fibras conexas.

Supongamos que S no es una superficie reglada. La prueba de divide en 3 pasos:

Paso 1: Sea $C \subseteq S$ una curva irreducible con $K_S \cdot C < 0$ y $|K_S + C| = \emptyset$, entonces:

$$\alpha|_C = \begin{cases} \text{es étale} & \text{si } q = 1 \\ \text{es un isomorfismo} & \text{si } q \geqslant 2 \end{cases}$$

por lo tanto $g(C) = q$.

Aplicando R-R a $K_S + C$ tenemos que:

$$0 = h^0(K_S + C) \geqslant \chi(\mathscr{O}_S) + \frac{1}{2}(C^2 + K_S \cdot C) = 1 - q + g(C) - 1$$

Por lo que $q \geqslant g(C)$. Como S es minimal y $C^2 \geqslant 0$, el lema [Be96, III.9, pag. 29] implica que C no puede vivir en una fibra reducible de α.
Si C es una fibra de α, entonces $C^2 = 0$ y por lo tanto $K_S \cdot C = -2$ y $g(C) = 0$ y por el [Be96, Noether-Enriques, pag. 26], S es una superficie reglada, lo cual es una contradicción.
De todo lo anterior, concluimos que $\alpha(C) = B$. Sea $\tilde{C}$ la normalización de

C, entonces α define una cubierta ramificada $\tilde{C} \to B$ de grado d y por $R-H$ tenemos que:

$$g(\tilde{C}) = 1 + d(g(B) - 1) + \frac{r}{2}$$

con r el numero de puntos de ramificación contados con multiplicidad. De donde obtenemos las siguientes desigualdades:

$$q \geqslant g(C) \geqslant g(\tilde{C}) \geqslant 1 + d(q-1)$$

Por lo tanto, las únicas opciones son $d = 1$ ó $q = 1$ y ambas implican que $g(c) = g(\tilde{C})$ lo que demuestra que $C = \tilde{C}$ y por lo tanto se sigue la afirmación.

Paso 2: Existe una curva irreducible C en S con $|K_S + C| = \emptyset$ y $K_S \cdot C < -1$. Por el Lema [Be96, V.8, pag. 56] existe un divisor efectivo $D = \sum_{i=1}^{r} n_i C_i$ $n_i > 0$ tal que $K_S \cdot D < -1$ y $|K_S + D| = \emptyset$. Si es necesario, removemos las curvas C_i tales que $K_S \cdot C_i > 0$, probaremos que D es irreducible:

a) Suponemos que $n_i \geqslant 2$ para algún i con $|K_S + 2C_i| = \emptyset$, por R-R tenemos que:

$$\begin{aligned} 0 = h^0(2C_i + K_S) &\geqslant 1 - q + 2C_i + K_S \cdot C_i \\ &= 1 - q + 2(C_i^2 + K_S \cdot C_i) - K_S \cdot C_i \end{aligned}$$

Por el paso 1 tenemos que $C_i^2 + K_S \cdot C_i = 2(q-1)$ lo cual implica que $0 > 3(q-1) \geqslant 0$ que es una contradicción.

b) Ahora suponemos que $r \geqslant 2$, con $|K_S + C_1 + C_2| = \emptyset$. Nuevamente, por R-R tenemos que:

$$\begin{aligned} 0 &= h^0(C_1 + C_2 + K_S) = h^1(K_S + C_1 + C_2) + 1 - q \\ &+ \frac{1}{2}(C_1^2 + K_S \cdot C_1) + \frac{1}{2}(C_2^2 + K_S \cdot C_2) + C_1 \cdot C_2 \\ &= h^1(K_S + C_1 + C_2) - (q-1) + \frac{1}{2}(2(q-1)) \\ &+ \frac{1}{2}(2(q-1)) + C_1 \cdot C_2 \\ &= h^1(K_S + C_1 + C_2) + (1-q) + C_1 \cdot C_2 \end{aligned}$$

Pero esto no puede pasar a menos que cada uno de los términos de la última igualdad sean cero, pero si $C_1 \cdot C_2 = 0$ entonces $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ y por lo tanto se tiene la siguiente sucesión exacta:

$$0 \to \mathscr{O}_S(-C_1 - C_2) \to \mathscr{O}_S \to \mathscr{O}_{C_1} \oplus \mathscr{O}_{C_2} \to 0$$

Pasando a cohomologia, se tiene lo siguiente:

$$\ldots \to H^0(\mathscr{O}_{C_1} \oplus \mathscr{O}_{C_2}) \to H^1(\mathscr{O}_S(-C_1 - C_2)) \to H^1(\mathscr{O}_S) \to\to \ldots$$

Por lo que $0 \neq h^1(\mathscr{O}_S(-C_1 - C_2)) = h^1(K_S + C_1 + C_2)$ lo cual es una contradicción.

Paso 3: Conseguimos una contradicción.
Sea C una curva irreducible en S con $K_S \cdot C < -1$ y $|K_S + C| = \emptyset$.

$q \geqslant 2$ Por R-R tenemos que:

$$\begin{aligned} h^0(C) &\geqslant 1 - q + \frac{1}{2}(C^2 - K_S \cdot C) \\ &= 1 - q + \frac{1}{2}(C^2 + K_S \cdot C) - K_S \cdot C \\ &= 1 - q + \frac{1}{2}(2(q-1)) - K_S \cdot C - K_S \cdot C = -K_S \cdot C \geqslant 2 \end{aligned}$$

De esta desigualdad se deduce que C se mueve en su clase de equivalencia lineal y por lo tanto, si F es fibra genérica F de α, el punto $C \cap F$ se mueve linealmente en F por lo que F tiene que ser racional y por lo tanto S es una superficie reglada.

q=1 Por el paso 1, $\alpha|_C$ es étale y por lo tanto la inclusión $i : C \to S$ define una sección $e : C \to S \times_B C$. Sea S' la componente conexa de $S \times_B C$ que contiene a $e(C) = C'$. Entonces, la proyección $\pi : S' \to S$ es étale y tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} S' \arrow[r, "\pi"] \arrow[d] & S \arrow[d, "\alpha"] \\ C \arrow[u, bend left, "e"] \arrow[ur, hook, "i"] \arrow[r, "\alpha|_C"'] & B \end{tikzcd}$$

De los morfismos anteriores conseguimos las siguientes relaciones:

$$\Omega^1_{S'} \cong \pi^*\Omega^1_S \qquad \text{y} \qquad K_{S'} \equiv \pi^* K_S$$

Por lo que:

$$K_{S'} \cdot C' = grad_{C'}(e^* K_S) = grad_C(i^* K_S) = K_S \cdot C < -1$$

como $\chi(\mathscr{O}_{S'}) = grad(\pi)\chi(\mathscr{O}_S) = 0$ tenemos que:

$$h^0(C') \geqslant \chi(\mathscr{O}_{S'}) - 1 + g(C') - K_{S'} \cdot C' \geqslant 2$$

Y al igual que en el caso $q \geqslant 2$ esto implica que S es una superficie reglada, lo cual es una contradicción.

$\square$

Referencias

[KKM] Kawamata, Y. and K. Matsuda and K. Matsuki: Introduction to the minimal model problem. Adv. Studies in Pure Math 10, 1987.

[KM] J. Kóllar and S. Mori: Birational geometry of algebraic varieites. Cambrige University Press, 1998.

[Pagoda] M. Reid: Minimal Models of canonical 3-folds. Adv. in Pure Math 1, 1983.

[Canonical] M. Reid: Canonical 3-folds. Journées de géometrie algébrique d'angers. 1979.

[Matsuki] K. Matsuki: Introduction to the minimal model program. Springer-Verlag, 2002. (Buena lectura, pero el curso no seguirá este libro pies puntillas a diferencial de los de arriba)

[AM78] M. F. Atiyah/ I. G. Macdonald, Introducción al Álgebra Conmutativa, Reverté, Barcelona, 1978.

[CE01] G. Castelnuovo and F. Enriques: Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche. *Ann. di Mat pura ed app.*, 3^a **6** 1901.

[EH87] D. Eisenbud and J. Harris, The Kodaira dimension of the moduli space of curves of genus ≥ 23. Inventiones Mathematicae, 1987.

[Se28] B. Segre, Sui moduli delle curve poligonali e sopra un complemento al teorema di esistenza di Riemann. Math. Ann. 100, 537-551 (1928)

[H2] R. Hartshorne, The Zeuthen Problem.

[Hart] R. Hartshorne: Algebraic geometry. Springer-Verlag, 1977.

[Ca89] Ricerche di geometria sulle curve algebriche.(1889)

[V] A. Verra, The fiber of the Prym map in genus 3.

[Do81] Donagi, D.: The tetragonal construction, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 4 (1981), 181–185. MR0001219

[M1] Fedorchuk, M.; Mimimal Log Program for $\overline{M}_4$

[CH] L. Caporaso and J. Harris, "Counting plane curves of any genus". Invent. Math (1998).

[E] Eisenbud, D: The Geometry of Syzygies.

[M] Mikai, S.: Curves and Grassmannians.

[Mu74] Mumford, D.: Prym varieties I. Contributions to Analysis (a collection of papers dedicated to Lipman Bers), 1974, pp. 325–350. MR0379510.

[FP05] Farkas, G. and Popa, M.: effective divisors on M_g, curves on $K3$ surfaces, and the slope conjecture. 2015

[CL2018] Lozano Huerta, C: Tres medallas de la geometría birracional. Motivos Matemáticos, 2018.

[F2014] Farkas, Syzygies of curves and the Green conjecture.

[Kleiman] S. Kleiman, Criterio de amplitud. Annals of Math.

[BK2013] Bogmolov F. and S. Kulikov V.: On the irreducibility of Hilbert scheme of surfaces of minimal degree. Cent.Eur.J.Math., 2013.

[GH] Griffiths P., Harris J., Principles of Algebraic Geometry, Pure Appl. Math. (N.Y.), Wiley Classics Library, New York, 1994.

[DI2009] Dolgachev I.V., Iskovskikh V.A., Finite subgroups of the plane Cremona group, In: Algebra, Arithmetic, and Geometry: in honor of Yu. I, Manin, I, Progr. Math., 269, Birkhäuser, Boston, 2009, 443.548

[Be77] Beauville, A.: Vari´et´es de Prym et jacobiennes interm´ediaires, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) ´ 10 (1977), 309–391. MR0472843

[Be96] Beauville, A.: Complex Algebraic surfaces. *London Mathematical Society*, Student Text 34. cambridge University Press, 1996.