UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Segundo examen parcial de geometría algebraica I

7 de mayo 2021

Resolver todos los ejercicios. Cada ejercicio vale 25 puntos. Asumir que el campo $\mathbb{F}$ es algebraicamente cerrado de característica 0.

EJERCICIO 1

Teorema. *Una variedad afín irreducible es genéricamente suave.*

EJERCICIO 2

Denotemos como V a la imagen del morfismo $\mathbb{A}^2_{(s,t)} \to \mathbb{A}^5_{x_1,\ldots,x_5}$ definido como

$$(s,t) \mapsto (s^2, t^2, st, s, t).$$

Mostrar que la variedad secante de V:

$$Sec(V) := \bigcup_{q,p \in V} \overline{pq},$$

donde $\overline{pq}$ denota la línea que une a los puntos p y q, es una hipersuperficie en $\mathbb{A}^5$ y calcular la ecuación que satisface.

La intersección de $Sec(V)$ con un $\mathbb{A}^3$ genérico en $\mathbb{A}^5$ es una superficie cúbica $S \subset \mathbb{A}^3$

$$S := Sec(V) \cap \mathbb{A}^3.$$

Mostrar que S es singular exactamente en 4 puntos.

Ejercicio 3

Si $f : V \to W$ es un morfismo dominante entre variedades afines irreducibles, entonces

$$\dim W \leq \dim V.$$

Ejercicio 4

Considerar la familia de polinomios mónicos de grado 3 en una variable:

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c,$$

donde $a, b, c \in \mathbb{F}$. Observar que esta familia es $\mathbb{A}^3_{a,b,c}$; pues para cada P obtenemos una terna $(a, b, c) \in \mathbb{A}^3$ y vice versa. Escribir la ecuación de la *variedad discriminante* Δ:

$$\Delta := \{P \in \mathbb{A}^3 \mid P \text{ tiene al menos una raíz de multiplicidad } 2\} \subset \mathbb{A}^3_{a,b,c}.$$

Describir el lugar singular de Δ. Mostrar que Δ es una superficie reglada.