UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Examen final de geometría algebraica I

22 de junio 2021

Resolver 4 ejercicios de los siguientes 5. Cada ejercicio vale 25 puntos. Asumir que el campo $\mathbb{F}$ es algebraicamente cerrado de característica 0.

EJERCICIO 1

Teorema. *Las funciones regulares de una variedad proyectiva irreducible son constantes.*

EJERCICIO 2

1. Mostrar que la curva $C = \mathrm{Var}(y^4-(x-1)(x-2)) \subset \mathbb{A}^2$ es no singular pero que su cerradura proyectiva $\overline{C} \subset \mathbb{P}^2$ es singular.
2. Si $C_0 \subset \mathbb{A}^2_{(x,y)}$ es la parte afín de $\overline{C}$ que contiene a un punto singular en $(0,0)$, entonces explotar $\mathbb{A}^2_{(x,y)}$ en dicho punto:

$$\phi : \mathbb{A}^2_{(z,w)} \to \mathbb{A}^2_{(x,y)}$$

y escribir la ecuación de la transformada estricta $\tilde{C}_0 \subset \mathbb{A}^2_{(z,w)}$. ¿Es $\tilde{C}_0$ suave?

Ejercicio 3

Teorema. *Todas las cónicas suaves en $\mathbb{P}^2$ son proyectivamente equivalentes.*

Ejercicio 4

Considerar el siguiente morfismo $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^5$ definido como

$$[s:t] \mapsto [t^4 : 2st^3 : s^2t^2 : 3s^2t^2 : 2s^3t : s^4].$$

Mostrar que $f(\mathbb{P}^1) \subset \mathbb{G}(1,3)$. Por lo tanto, si denotamos $f(t) = L_t$, entonces podemos considerar la superficie reglada

$$S := \bigcup_{t \in \mathbb{P}^1} L_t \subset \mathbb{P}^3$$

¿qué grado tiene?
Punto extra: ¿qué ecuación satisface S? ¿es S suave?

Ejercicio 5

Considerar la aplicación racional $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^4$ definida como

$$[x : y, z] \mapsto [xy : xz : y^2 : yz : x^2].$$

Mostrar que f es un encaje de $\mathbb{P}^2 - \{[0:0:1]\}$ en $\mathbb{P}^4$ y que además el complemento su imagen en su cerradura es una curva C. Es decir,

$$\overline{Im(f)} \setminus Im(f) = C.$$