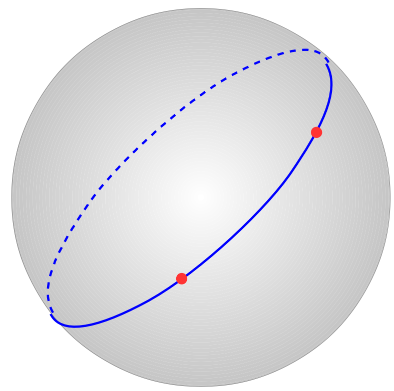
Geometría esférica

La **esfera** unitaria S^2 es el conjunto de puntos de R^3 que estan a distancia 1 del origen:

$S^2 = \{ (x,y,z) \text{ en } R^3 \ / \ x^2+y^2+z^2=1\}$

Cada plano en R3 que cruza a la esfera a la esfera en un circulo
Los planos por el origen intersectan a la esfera en círculos de radio 1, que es el máximo radio de un circulo en la esfera. Estos círculos de radio máximo son las trayectorias que se menos se curvan en la esfera, por lo que les llamaremos **lineas esféricas** Las lineas esféricas tienen propiedades análogas (y otras muy distintas) a las lineas rectas en el plano.

Lema 1. Por dos puntos no antípodas de la esfera pasa exactamente una linea esférica.

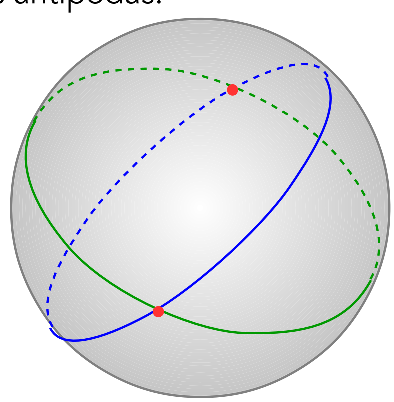


Demostración Si p y q son dos puntos no antípodas en S^2, entonces 0, p y q no estan alineados en R^3, por lo que existe un único plano P que los contiene, y la intersección de P con la esfera es una linea esférica que contiene a p y q. ◙

Observar que por cada par de puntos antípodas pasan una una infinidad de lineas esféricas

Lema 2. Dos lineas lineas esféricas se intersectan en 2 puntos antípodas.

Demostración La intersección de dos planos por el origen es una recta por el origen, que intersecta a S^2 en dos puntos antípodas ◙

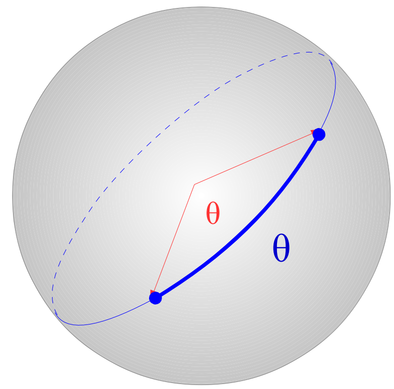


Este lema muestra que no existen lineas esféricas paralelas.

Mas adelante mostraremos que las trayectorias mas cortas en la esfera son arcos de lineas esféricas

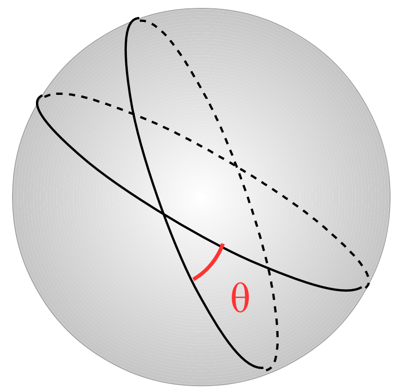
Observaciones.

1. La longitud de las lineas esféricas es 2π.

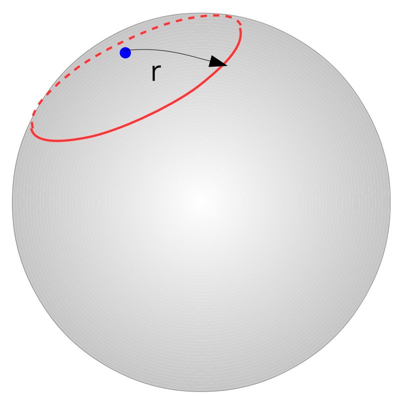


2. La distancia entre 2 puntos de la esfera es el ángulo que forman sus vectores desde el origen (medido en radianes).

3. El ángulo entre 2 lineas esféricas es el ángulo entre los planos por el origen que las definen.



Un **círculo esférico** de radio r con centro en p es el conjunto de puntos en la esfera a distancia r de p (el centro del circulo).



Observaciones.

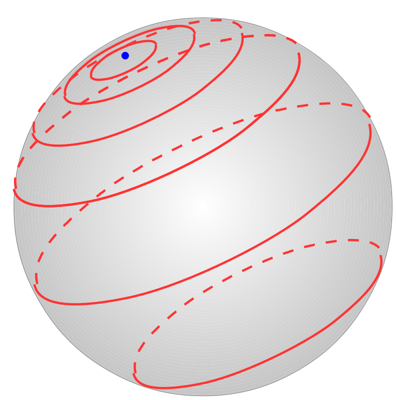
1. Los círculos esféricos son intersecciones de la esfera con planos.

2. Por cada punto de la esfera pasa un circulo esférico de radio r para cada r < π.

3. Cada circulo esférico tiene 2 centros.

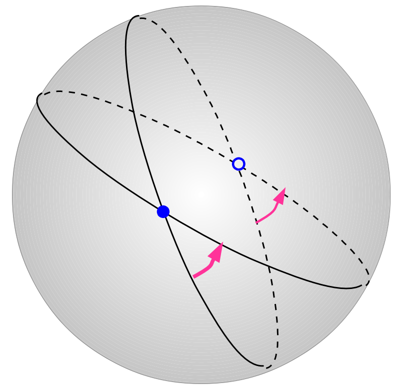
4. Dos círculos esféricos se intersectan en 1 o 2 puntos.

5. Las lineas esféricas son círculos esféricos de radio π/2.

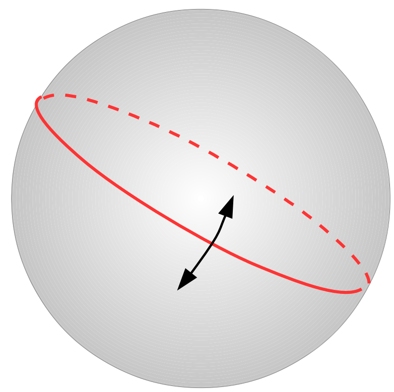


En la esfera hay movimientos rígidos, que preservan las longitudes y los ángulos en la esfera, por ejemplo:

1. Podemos rotar la esfera alrededor de cualquier recta por el origen y con cualquier ángulo. Esta rotación deja dos puntos antípodas de la esfera fijos, diremos que estos son los centros de la rotación

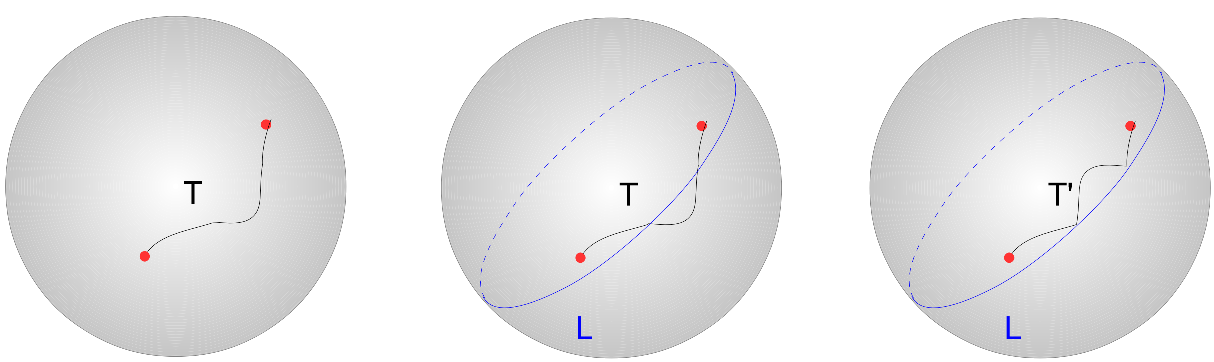


2. Podemos reflejar la esfera en cualquier plano P por el origen (como esta reflexión deja fija a la linea esférica determinada por el plano, diremos que es una reflexión de la esfera en esa linea esférica.



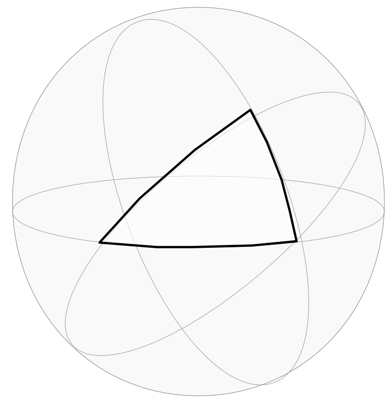
Teorema. Las trayectorias mas cortas entre 2 puntos son arcos de lineas esféricas

Idea de la demostración. Sea T la trayectoria T mas corta entre 2 puntos p y q de S^2.
Si T no es parte de una linea esférica, entonces hay una linea esférica L que cruza a T en 2 puntos. Reflejemos T en L entre esos puntos para obtener una trayectoria T' de la misma longitud que T que quede de un lado de L. Pero T' tiene esquinas que podemos recortar para obtener una trayectoria aun mas corta entre p y q.



Triángulos esféricos

Los **triángulos esféricos** son figuras formadas por 3 segmentos de lineas esféricas de longitud menor que π (para que los lados de los triangulos sean los caminos mas cortos entre los vertices)



No es difícil ver que cualesquiera 3 puntos no alineados en la esfera son los vértices de un único triángulo esférico.

Dos triángulos esféricos son *congruentes* si tienen lados y ángulos correspondientes iguales.

Teorema. Dos triángulos esféricos son congruentes si cumplen alguna de estas condiciones:

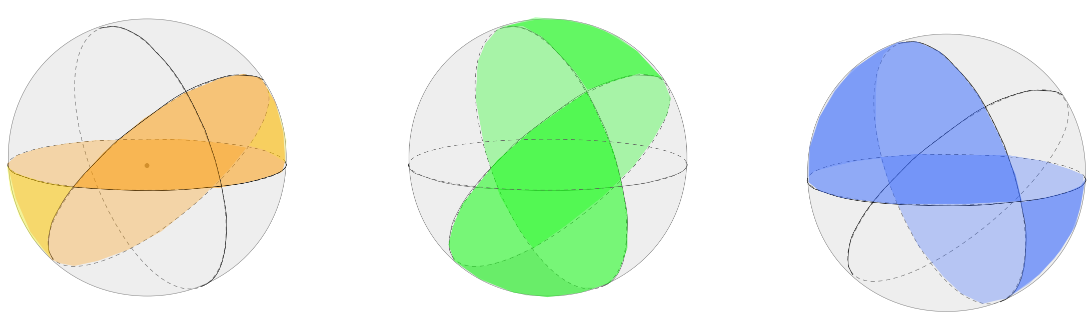
1. (LLL) Tienen 3 lados iguales.
2. (LAL) Tienen 2 lados y el ángulo entre ellos iguales.
3. (ALA) Tienen 2 ángulos y el lado entre ellos iguales.

Demostración. Igual que en el plano, suponiendo que en la esfera hay movimientos rígidos.

Teorema (Girard, 1632) Los ángulos internos de un triángulo esférico Δ suman π + Area Δ.

Demostración. El área de la esfera es 4π, por lo tanto el área de cada gajo de la esfera determinado por un ángulo (medido en radianes) es 2 veces el ángulo.

Los dos gajos con ángulo A, los dos gajos con ángulo B y dos gajos con ángulo C juntos cubren a toda la esfera, cubriendo al triángulo Δ y a su antípoda 3 veces.



Por lo tanto la suma de las áreas de los 6 gajos determinados por el triángulo da el área de la esfera mas cuatro veces el área del triángulo:

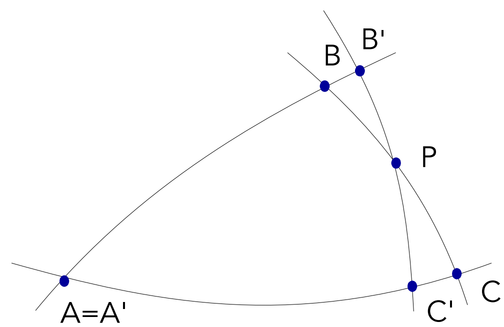
$$4A + 4B + 4C = 4\pi + 4 \text{ Area } \Delta. \qquad \blacksquare$$

Ejemplo. Si un triángulo esférico tiene ángulos de 50°, 70° y 90°, su area es

$$^{5}/_{18}\,\pi + {}^{7}/_{18}\,\pi + {}^{9}/_{18}\,\pi - \pi = {}^{\pi}/_{6}\,.$$

En el plano existen triángulos con los mismos ángulos pero con lados distintos. Esto no puede ocurrir en la esfera.

Corolario. Dos triángulos esféricos con los mismos ángulos son congruentes.

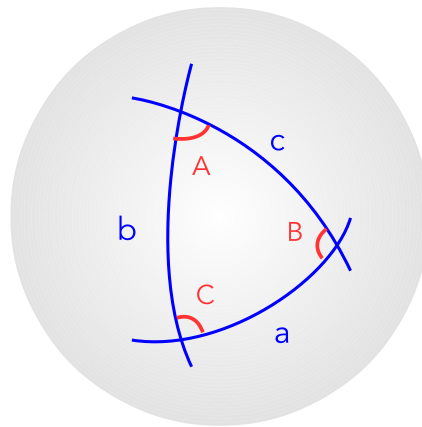


Demostración. Sean ABC y A'B'C' dos triángulos esféricos con ángulos iguales. Por el Teorema de Girard los triángulos tienen áreas iguales. Haciendo movimientos rígidos podemos colocar los triángulos de modo que el ángulo A coincida con A', los lados b y b' estén alineados y los lados c y c' también estén alineados.

Si B y C no coinciden con B' y C' entonces la linea BC debe intersectar a la linea B'C' (de otro modo un triángulo estaría dentro de otro y su área seria menor) Sea P el punto de intersección.

Dos lineas esféricas que cruzan a otra con el mismo ángulo deben intersectarse en un punto a distancia $\pi/2$ de los puntos de intersección de las lineas, asi que P es el punto medio de los segmentos BC y B'C', y estos segmentos tienen longitud π. Pero entonces C y C' son los antípodas de B y B' y por lo tanto estan sobre la linea BB', de modo que el ángulo A es degenerado. ■

Trigonometría esférica.



Consideremos un triángulo esférico con lados

a, b, c y vértices opuestos A, B, C.

Ley esférica de los senos:

$$\operatorname{sen} A / \operatorname{sen} a = \operatorname{sen} B / \operatorname{sen} b = \operatorname{sen} C / \operatorname{sen} c$$

Ley esférica de los cosenos:

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c \cdot \cos A$$

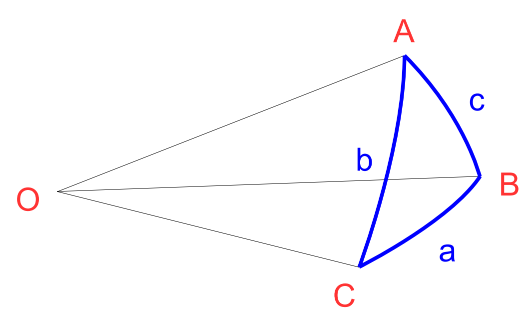
Observar que la ley esférica de los senos se parece mucho a la ley plana de los senos, pero la ley de cosenos se ve muy distinta.

Demostración de la ley de los cosenos:

Sea O el centro de la esfera. En el plano que pasa por O, B y C, y en el plano tangente a la esfera por el punto A, considerar los triángulos ODE y ADE. Por la ley de los cosenos:

$$DE^2 = AE^2 + AD^2 - 2AE{\cdot}AD \cos A \qquad (1)$$

$$DE^2 = OE^2 + OD^2 - 2OD{\cdot}OE \cos a \qquad (2)$$



Como los triángulos OAE y OAD son rectángulos

$OE^2 = OA^2 + AE^2$ y $OD^2 = OA^2 + AD^2$,

sustituyendo en la ecuación (2) queda

$$DE^2 = 2OA^2 + AE^2 + AD^2 - 2OD{\cdot}OE \cos a \qquad (3)$$

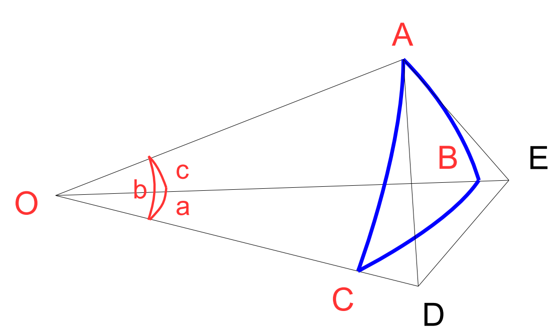
Igualando las ecuaciones (1) y (3) obtenemos

$$2OA^2 - 2OE{\cdot}OD \cos a = -2AE{\cdot}AD \cos A$$

$$\Rightarrow OE{\cdot}OD \cos a = OA^2 + AE{\cdot}AD \cos A$$

$$\Rightarrow \cos a = OA/OE \cdot OA/OD + AE/OE \cdot AD/OD \cos A$$

$$\Rightarrow \cos a = \cos b \; \cos c + \operatorname{sen} b \; \operatorname{sen} c \; \cos A$$



∎

Ejemplo. Si 2 un triángulo esférico tiene un ángulo $\pi/_3$ y los lados adyacentes tienen longitud 1 ¿cuanto mide el tercer lado? Si b=1, c=2, A= $\pi/_3$ entonces por la ley de los cosenos

$cos\ a\ =\ cos\ 1 \cdot cos\ 2\ +\ sen\ 1 \cdot sen\ 2 \cdot cos\ \pi/_3$ de donde

$cos\ a \approx (0.5403) \cdot (-0.4161) + (0.8415) \cdot (0.9093) \cdot {}^1/_2 \approx 0.5068$ asi que $a \approx cos^{-1}(0.5068) \approx 1.0393.$

Cuando el ángulo A es $\pi/_2$, la Ley de los cosenos da siguiente:

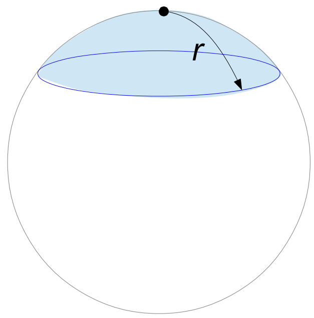
Teorema de Pitagoras esférico En un triángulo rectangulo esférico $\cos a = \cos b\ \cos c$

Este resultado se ve muy distinto que el teorema de Pitagoras en el plano, pero el teorema clásico es un limite del teorema en la esfera cuando los triángulos se hacen cada vez mas pequeños.

No es dificil ver que las bicectrices, las mediatrices, las medianas y las alturas de los triangulos esfericos son concurrentes. Los Teoremas de incidencia (Ceva, Menelao, Desargues) tambien tienen análogos en la esfera. Estos pueden obtenerse proyectando los triángulos y lineas esféricas desde el centro de la esfera a un plano para obtener triángulos y lineas planas.

Problemas.

1. ¿Cuanto mide la circunferencia de un círculo esférico de radio r?
¿Cual es el área de un círculo esférico de radio r?



2. ¿Cuanto suman los ángulos internos de un polígono esférico de n lados?

3. ¿Cual es el área de un triángulo en S^2 cuyos ángulos internos miden $\pi/2$, $\pi/3$ y $\pi/4$?

4. Muestra que el área de cada triángulo esférico es menor que 2π.

5. Si los lados de un triángulo esférico tienen longitud 1 ¿cuanto miden sus ángulos?
`¿Y si tienen longitud 2?

6. ¿Si un cuadrado esférico tiene área 1 ¿Cuanto miden sus ángulos? ¿Cuanto miden sus lados? (se vale usar calculadora)

7. Muestra que en la esfera existen triángulos rectángulos equiláteros, y que todos son congruentes. Dibuja uno.

8. ¿Cual es la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectangulo en la esfera cuyos catetos tienen longitud 3?