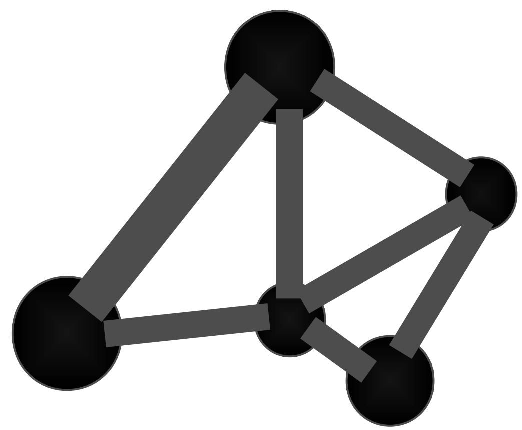
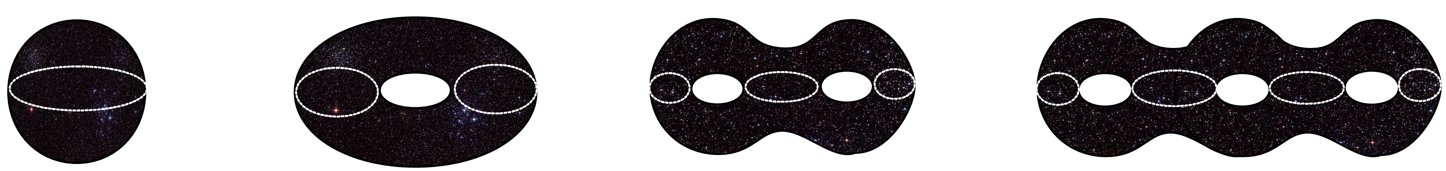
Descomposiciones de Heegaard

Un *cubo con asas* es una variedad con frontera que es homeomorfa a la union de bolas pegadas por discos ajenos:

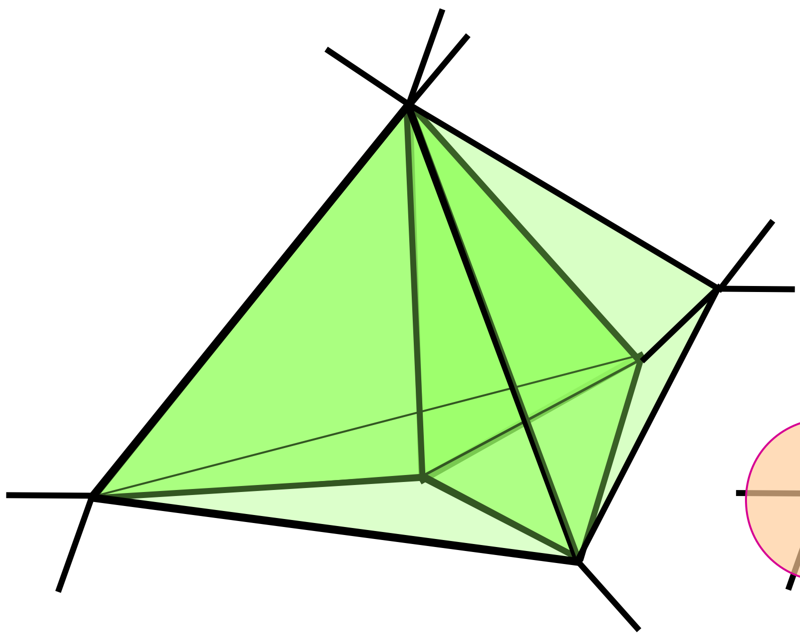


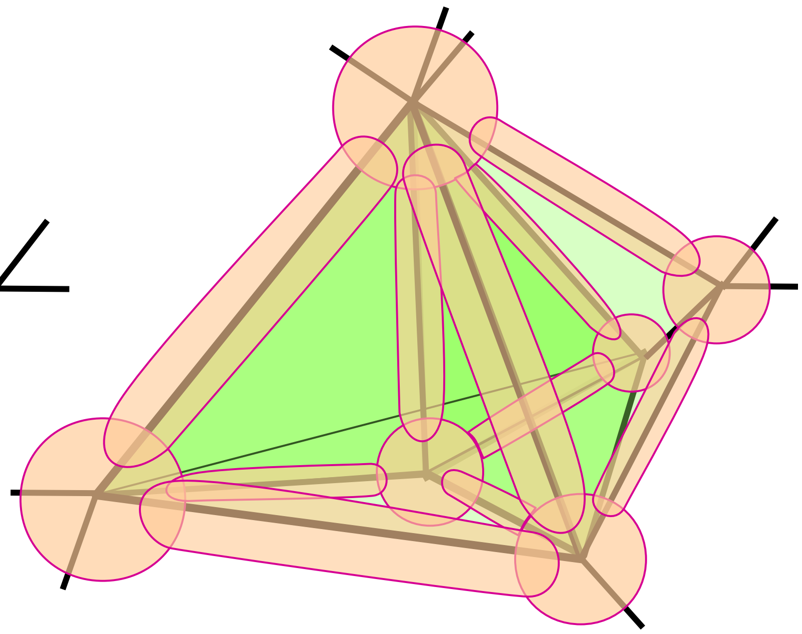


Una variedad M es un cubo con asas si es posible cortar a M con discos para obtener una bola.

Descomposiciones de Heegaard

Teorema: Todas las 3-variedades cerradas pueden descomponerse como la union de dos cubos con asas pegados por la frontera.





Demostracion: La vecindad regular del 1-esqueleto de la triangulacion es un cubo con asas (esta formada por bolas unidas por cilindros solidos).

El complemento de ese cubo con asas es otro cubo con asas (formado por las bolas enmedio de los tetraedros, unidas por las caras de los tetraedros).

Descomposiciones de Heegaard

Ejemplos:

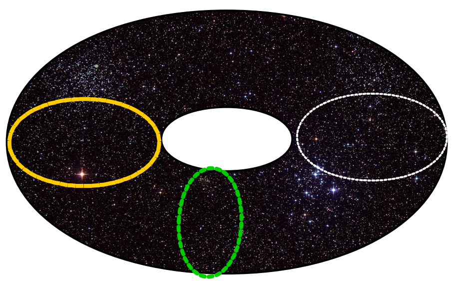
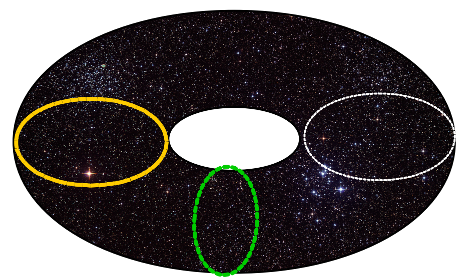
La union de dos cubos con asas pegados por cualquier homeomorfismo de sus fronteras es una 3-variedad cerrada.

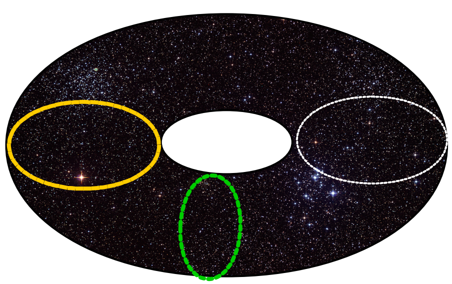
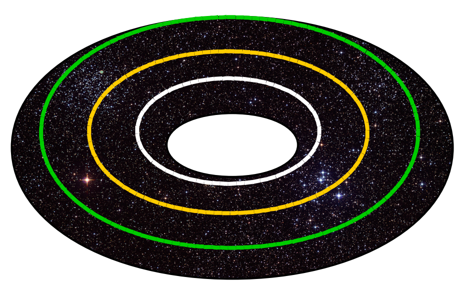
 $\cup$  $= \quad S^3$

La unica variedad que puede obtenerse pegando dos bolas es la esfera

Descomposiciones de Heegaard

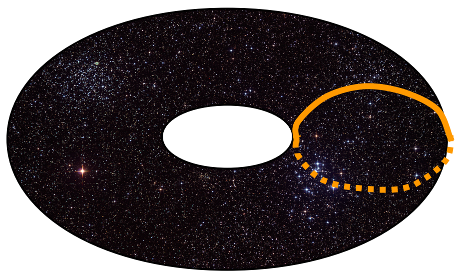
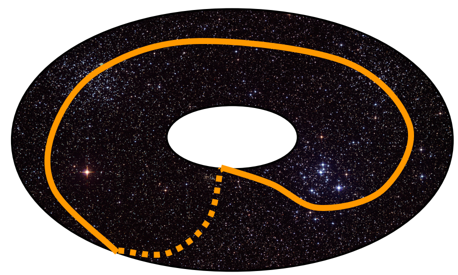
La union de dos cubos con asas pegados por cualquier homeomorfismo de sus fronteras es una 3-variedad cerrada.

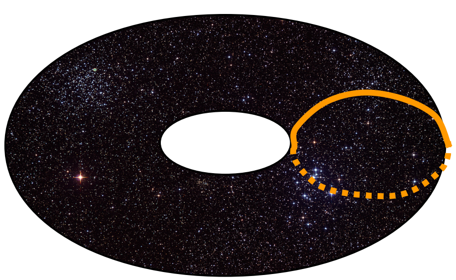
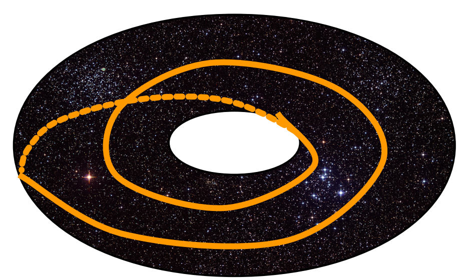
 $\cup$  $= S^2 \times S^1$

 $\cup$  $= S^3$

Descomposiciones de Heegaard

La union de dos cubos con asas pegados por cualquier homeomorfismo de sus fronteras es una 3-variedad cerrada.

 $\cup$  $= S^3$

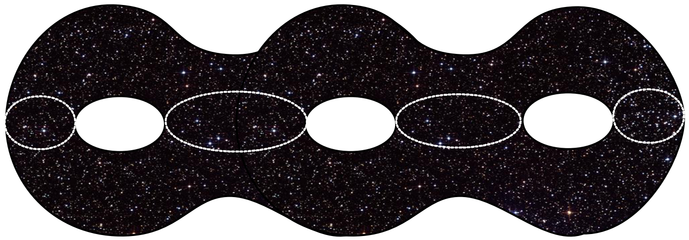
 $\cup$  $= L(1,2)$

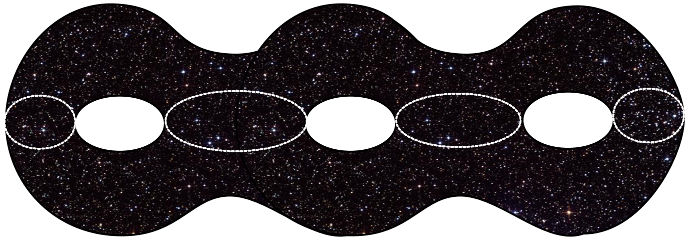
Pegando dos toros solidos se obtienen una infinidad de variedades distintas, llamadas *espacios lente*.

Descomposiciones de Heegaard

Teorema: Todas las 3-variedades cerradas pueden descomponerse como la union de dos cubos con asas pegados por la frontera.

Corolario: El grupo fundamental de una 3-variedad cerrada es finitamente presentado (si M es union de dos cubos con asas de genero g, su grupo tiene una presentacion con g generadores y g relaciones)





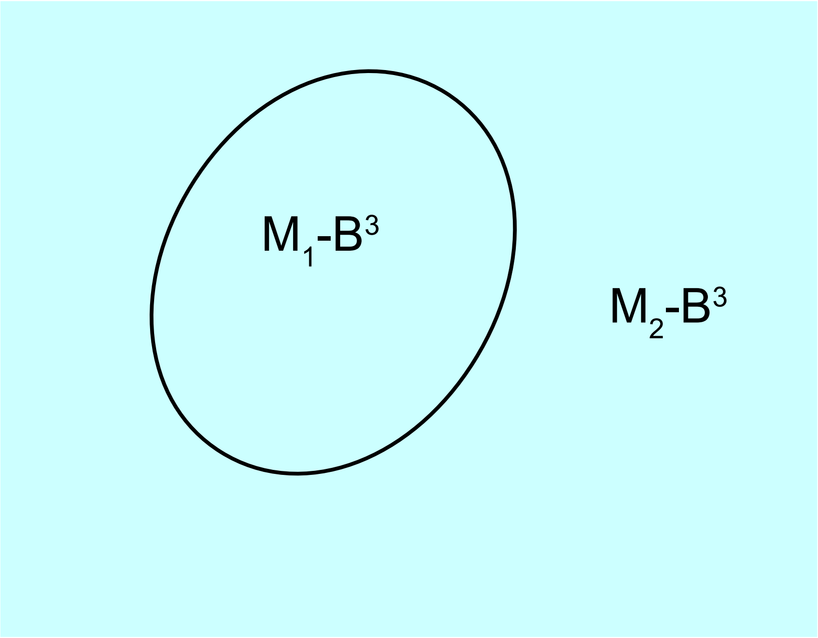
Demostracion: Si M = H1 U H2 entonces M puede armarse pegandole a H1 los discos que cortan a H2 en una bola, y pegando despues la bola. Entonces el grupo fundamental de M tiene un generador por cada asa de H1 y una relacion por cada disco de H2.

Descomposicion prima

Recordar que la suma conexa de 3-variedades es una operacion conmutativa y asociativa, y que S^3 actua como unidad de esta operacion.

Una 3-variedad M es *prima* si $M = M_1 + M_2$ implica que $M_1 = S^3$ o $M_2 = S^3$.

M es prima ↔ existe una esfera S que la divide en dos pedazos que no son bolas



Descomposicion prima

Recordar que la suma conexa de 3-variedades es una operacion conmutativa y asociativa, y que S^3 actua como unidad de esta operacion.

Una 3-variedad M es *prima* si $M = M_1 + M_2$ implica que $M_1 = S^3$ o $M_2 = S^3$.

Teorema (Alexander) S^3 es una variedad prima.

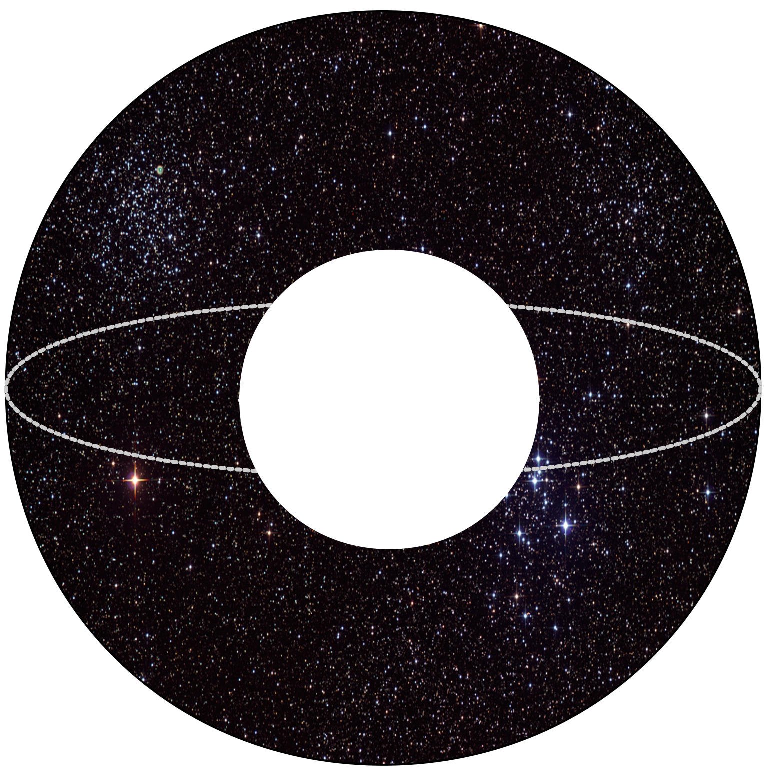
Para mostrar esto basta ver que cualquier esfera encajada en S^3 divide a S^3 en dos bolas solidas:

Afirmacion Toda esfera encajada suavemente en R^3 bordea una bola.

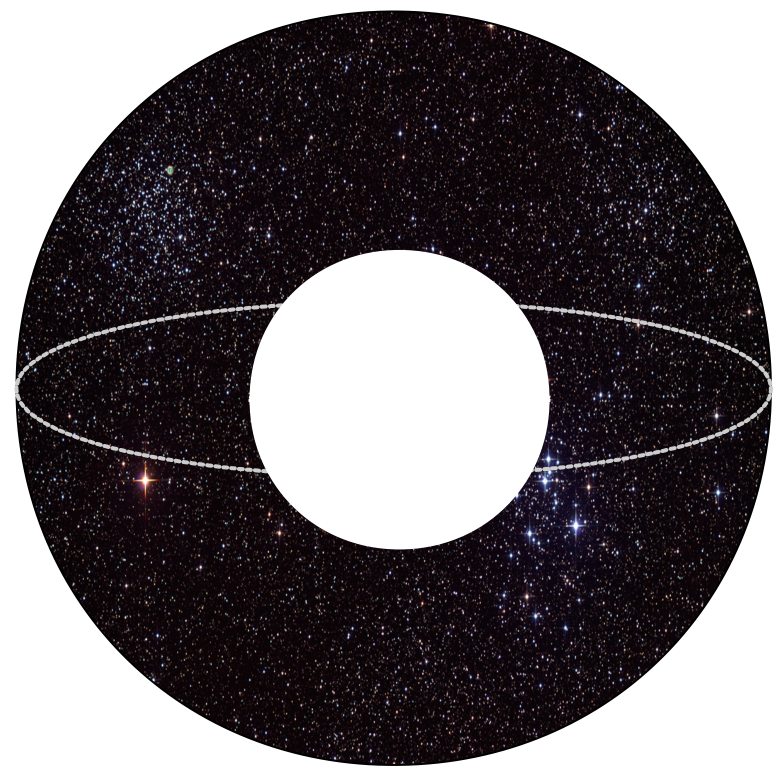
Dem: Funciones de Morse

Una 3-variedad M es *irreducible* si cada esfera en M bordea una bola.

Ejemplos de variedades no irrreducibles:



$S^2 \times S^1$



$S^2 \tilde{\times} S^1$

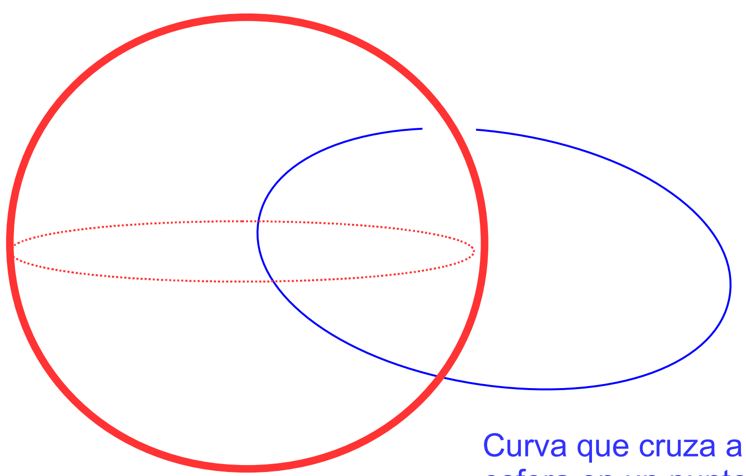
Una 3-variedad M es *irreducible* si cada esfera en M bordea una bola.

Lema. Las unicas 3-variedades primas no irreducibles son $S^2 \times S^1$ y $S^2 \tilde{\times} S^1$.

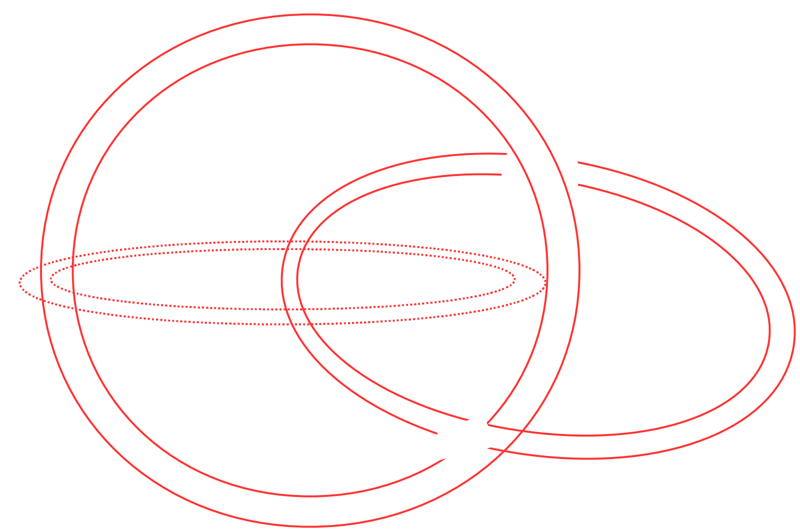
Una 3-variedad M es *irreducible* si cada esfera en M bordea una bola.

Lema. Las unicas 3-variedades primas no irreducibles son $S^2 \times S^1$ y $S^2 \tilde{\times} S^1$.

Dem. Si M es una variedad prima, toda esfera que separe a M debe ser borde de una bola, asi que si M no es irreducible debe contener una esfera no separante S. Si c es una curva cerrada que cruza a S en un punto, la vecindad regular de S U c tiene por frontera a una esfera separante.



Esfera no separante



Esfera separante

Formada por dos copias de la esfera no separante unidas por un tubo a lo largo de la curva

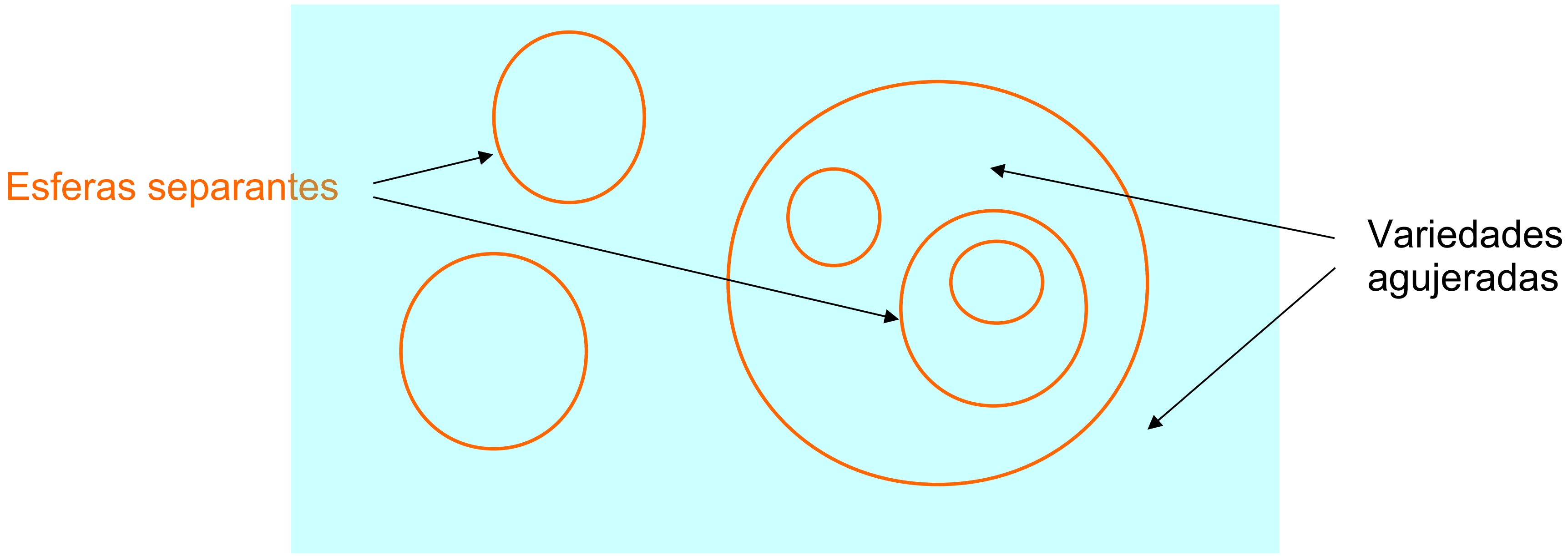
Descomposicion prima

Teorema (Knesser-Milnor)

Cada 3-variedad cerrada puede descomponerse de manera casi unica como suma conexa de 3-variedades primas.

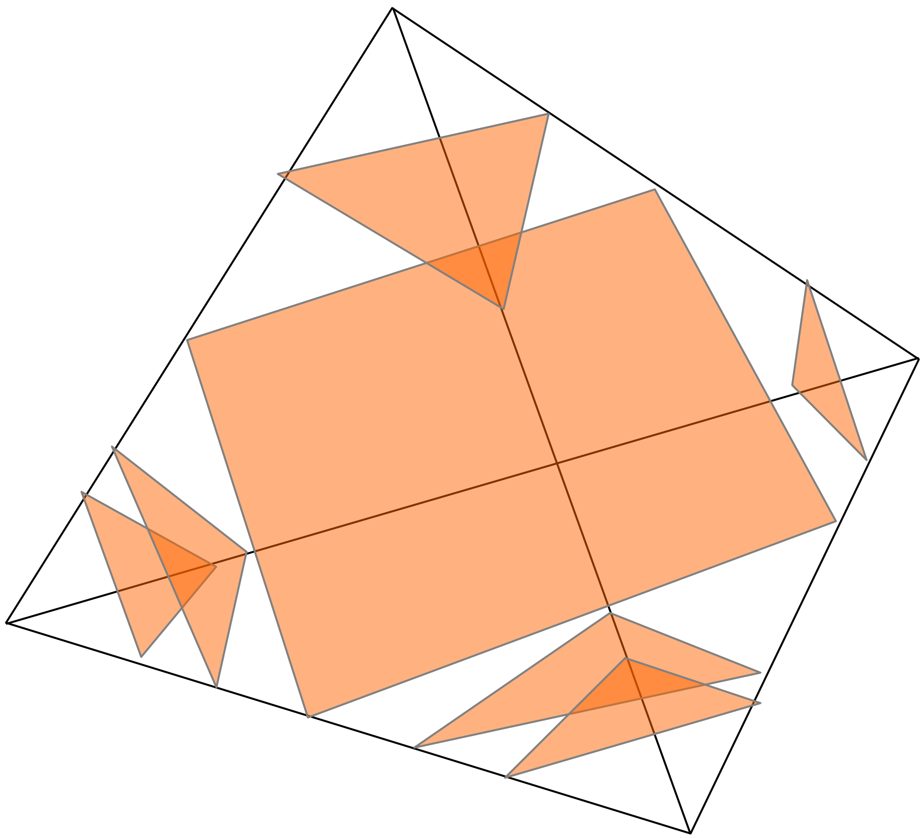
Para probar que una variedad puede descomponerse en factores primos, hay que no podemos seguir descomponiendola indefinidamente.

Si M es la suma conexa de n variedades distintas de la 3-esfera entonces hay n-1 esferas que separan a M en pedazos que *no* son 3-esferas agujeradas.



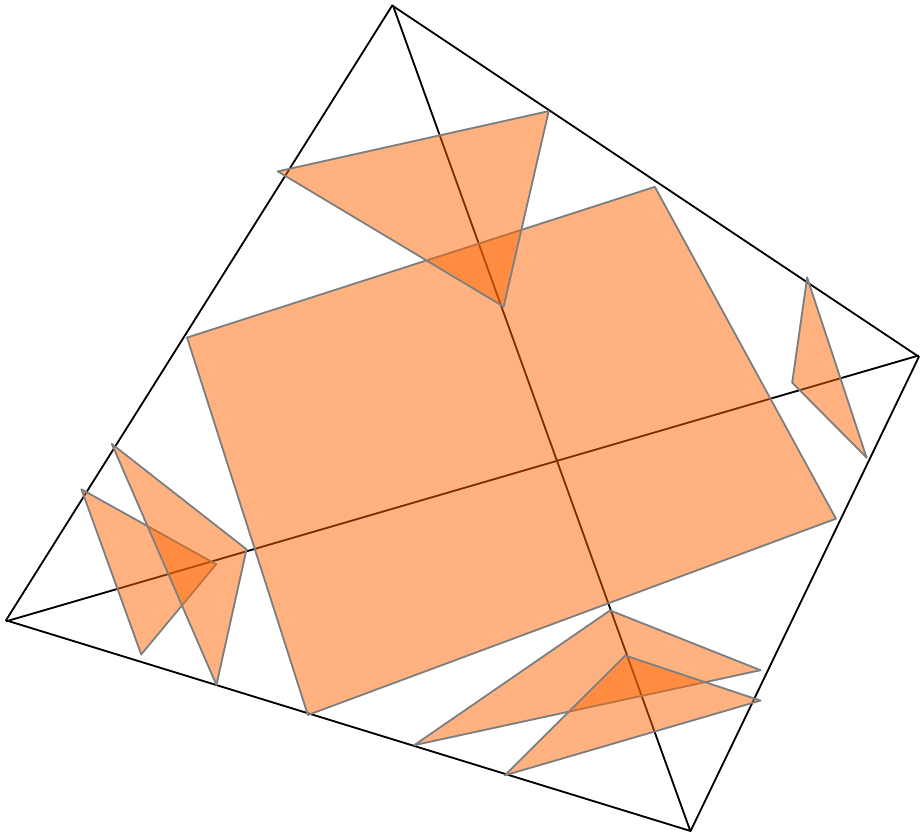
Veremos que hay una cota para el numero de esferas separantes no paralelas en terminos del numero de tetraedros de una triangulacion de la variedad. Para esto debemos colocar a las esferas en una posicion especial.

Superficies normales

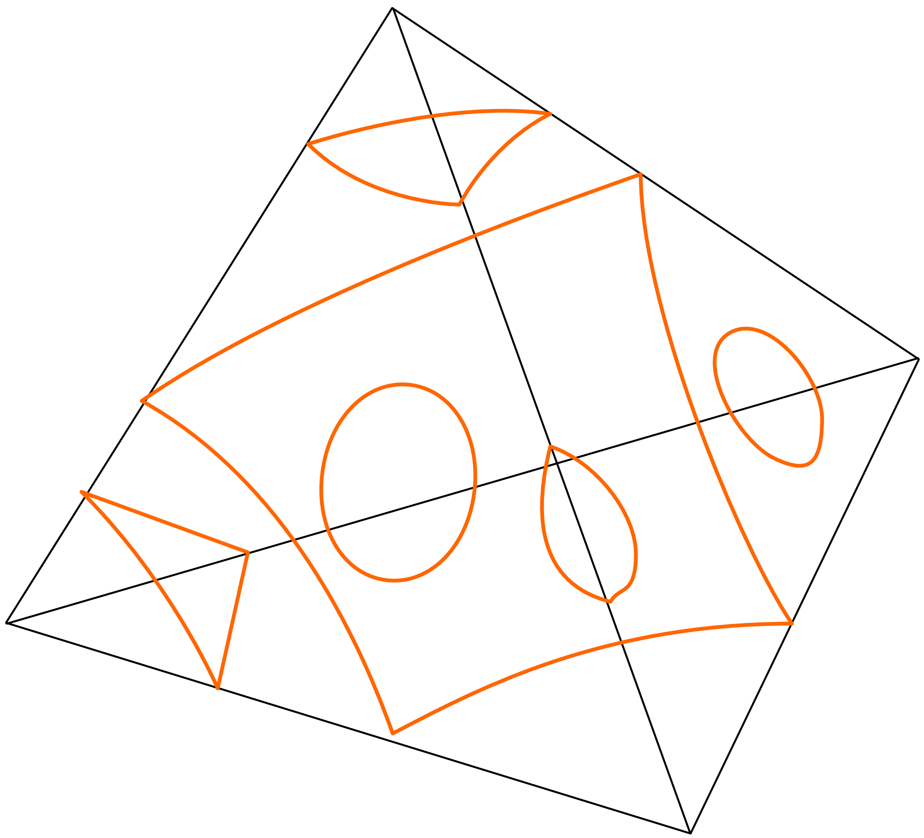


Si M es una 3-variedad triangulada, una *superficie normal* en M es una superficie que intersecta a cada tetraedro de la triangulacion en triangulos y rectangulos (como lo haria si fuera un plano).

Afirmacion. Si hay una familia de n esferas separantes en M tales que ninguna de las componentes de $M-US_i$ es una 3-esfera agujerada, entonces hay una familia de n esferas normales con la misma propiedad.

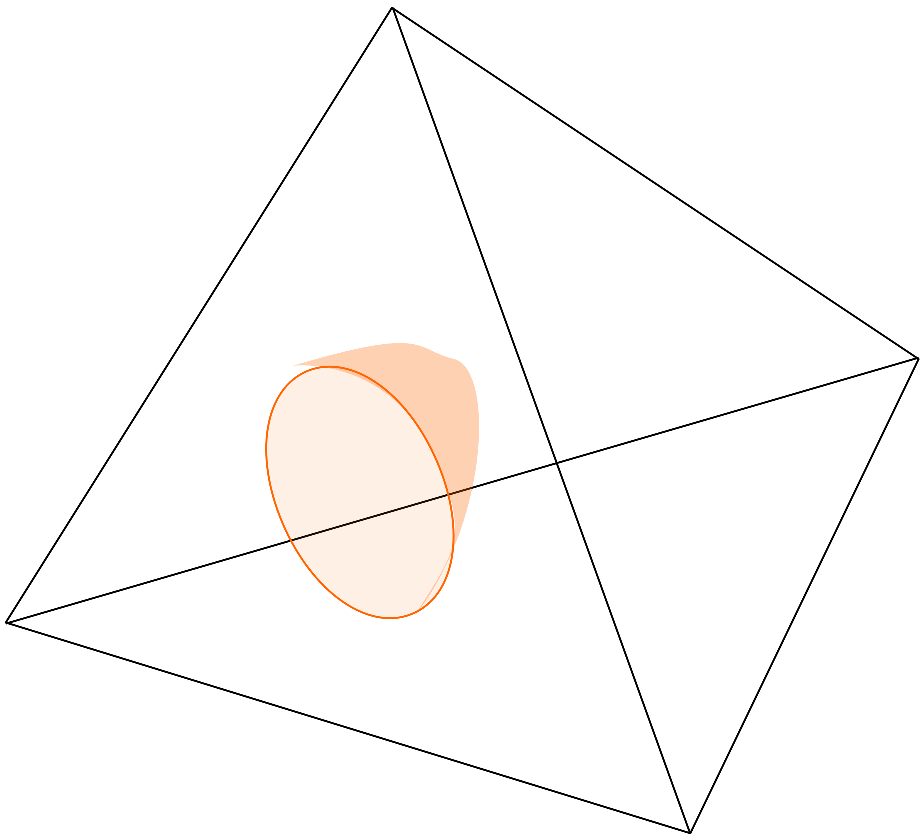


Sea $\{S_1, S_2, ..., S_n\}$ una familia de esferas separantes en M tales que ninguna de las componentes de $M–\cup S_i$ es una 3-esfera agujerada.



1. Mover las esferas para que:
   - No pasen por los vertices.
   - Crucen a las aristas en un numero finito de puntos.
   - Atraviesen las caras en un numero finito de arcos y curvas simples.

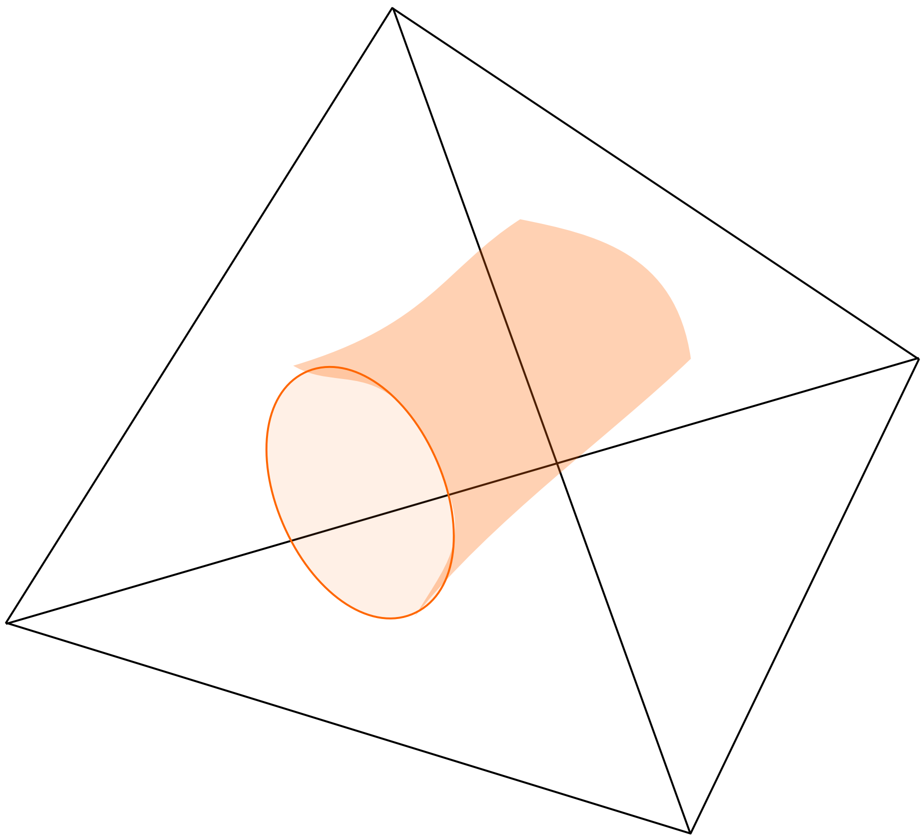
Las esferas intersectan a la frontera de cada tetraedro en curvas simples y ajenas, pero los pedazos de las superficies que quedan dentro de un tetraedro pueden ser complicadas.



2. Mover las esferas para quitar las intersecciones innecesarias:

Si una curva esta contenida en la cara del tetraedro y bordea un disco de la esfera dentro del tetraedro, podemos empujar el disco hacia afuera para eliminar la curva.

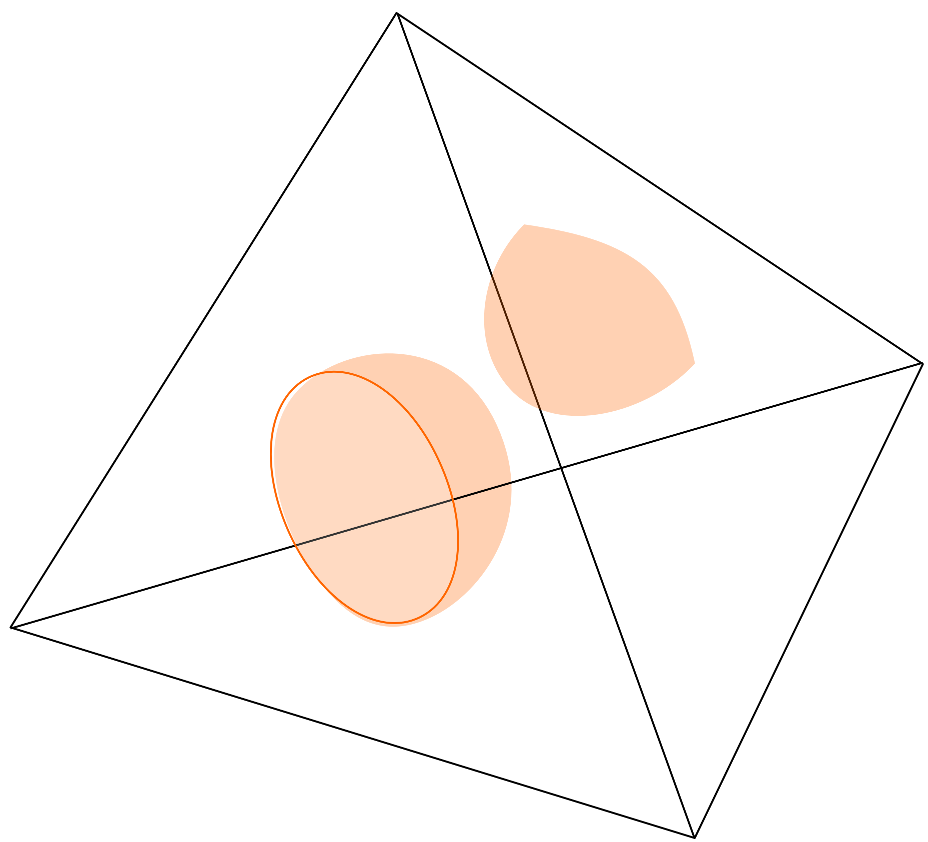
Las esferas intersectan a la frontera de cada tetraedro en curvas simples y ajenas, pero los pedazos de las superficies que quedan dentro de un tetraedro pueden ser complicadas.

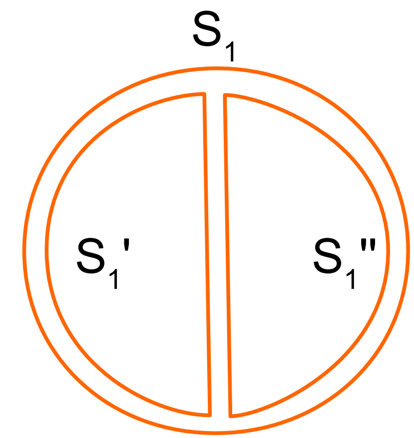


3. Cambiar las esferas para que intersecten el interior de cada tetraedro en discos

Si hay una curva que no bordea un disco, elegir una que no tenga otras curvas asi adentro.
La curva bordea un disco dentro del tetraedro que no intersecta a las otras esferas.

Las esferas intersectan a la frontera de cada tetraedro en curvas simples y ajenas, pero los pedazos de las superficies que quedan dentro de un tetraedro pueden ser complicadas.



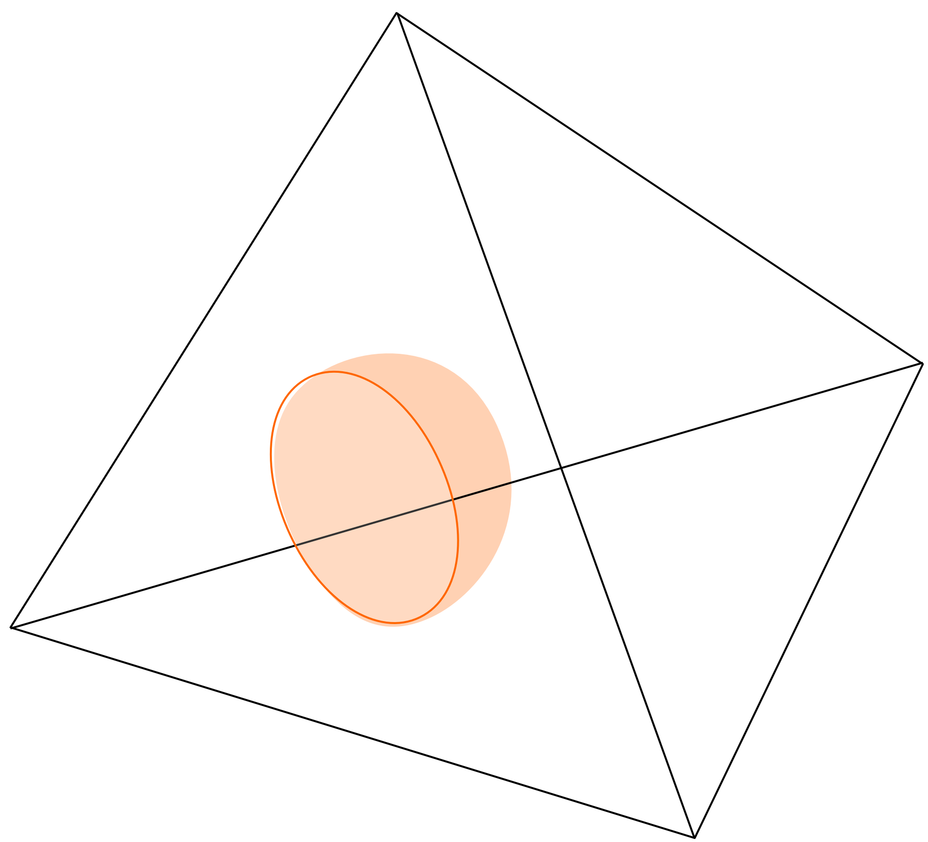


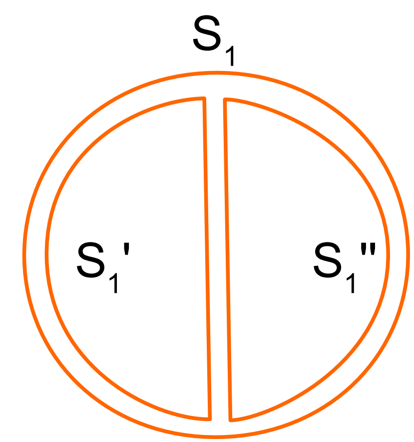
Si cortamos una esfera S_1 en dos esferas S_1' y S_1' ,una de las colecciones $\{S_1', S_2, \ldots S_n\}$ o $\{S_1'', S_2, \ldots, S_n\}$ divide a M en regiones que no son 3-esferas agujeradas.

2. Cambiar las esferas para que intersecten el interior de cada tetraedro en discos

Cortemos a la esfera por ese disco para obtener 2 esferas y reemplazemosla por una de ellas.

Las esferas intersectan a la frontera de cada tetraedro en curvas simples y ajenas, pero los pedazos de las superficies que quedan dentro de un tetraedro pueden ser complicadas.

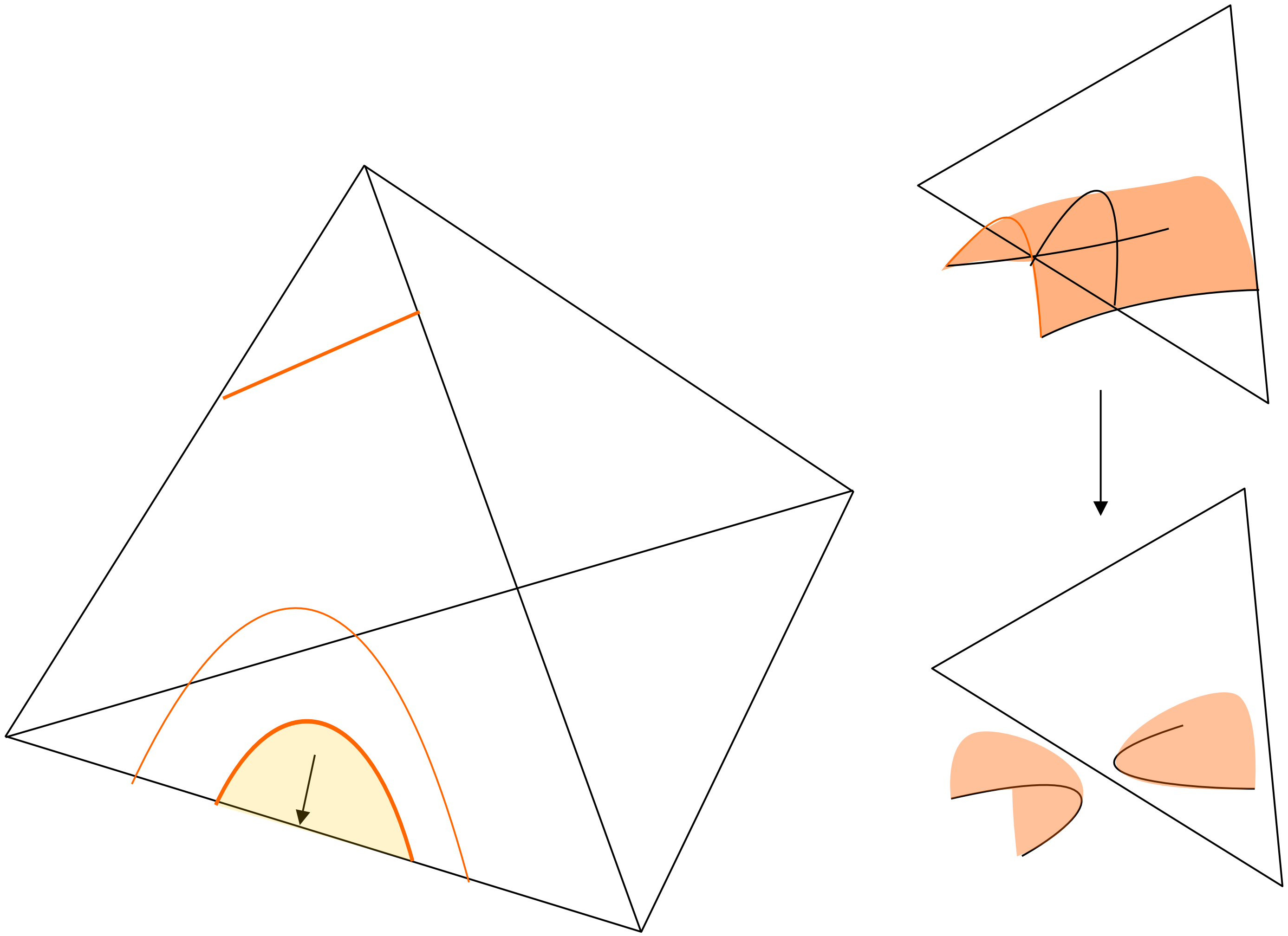




Si cortamos una esfera S_1 en dos esferas S_1' y S_1' ,una de las colecciones $\{S_1', S_2,... S_n\}$ o $\{S_1'', S_2, ..., S_n\}$ divide a M en regiones que no son 3-esferas agujeradas.

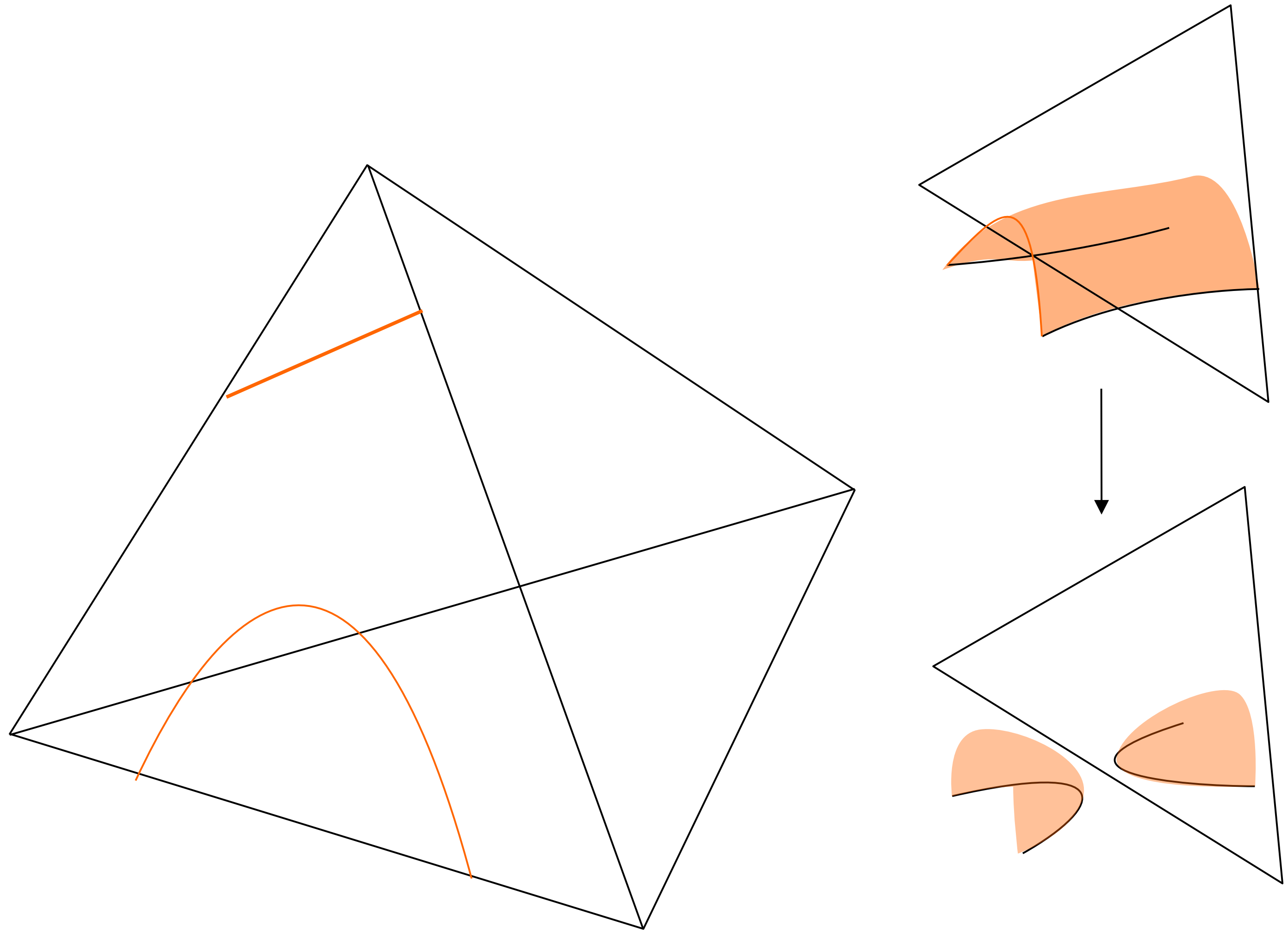
2. Cambiar las esferas para que intersecten el interior de cada tetraedro en discos

Cortemos a la esfera por ese disco para obtener 2 esferas y reemplazemosla por una de ellas.



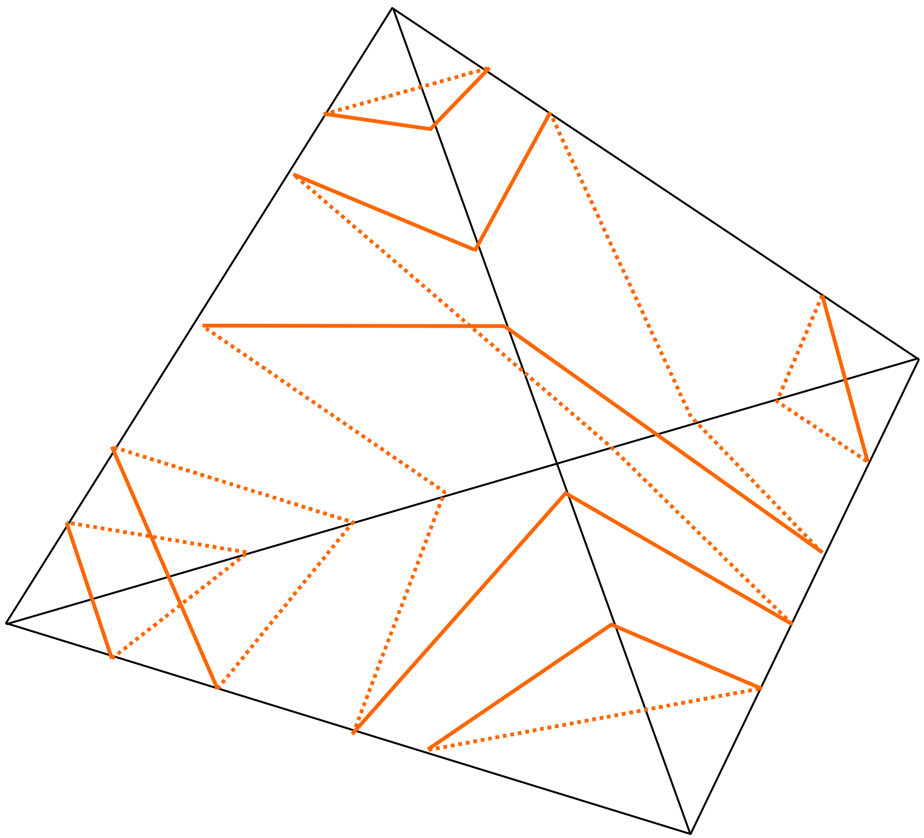
3. Empujar las esferas para eliminar los arcos de interseccion con las caras que terminan en la misma arista.

Elegir un arco que no tenga otros adentro. *Empujar una vecindad del arco en la esfera hacia la arista para eliminar dos cruces con la arista.*



3. Empujar las esferas para eliminar los arcos de interseccion con las caras que terminan en la misma arista.

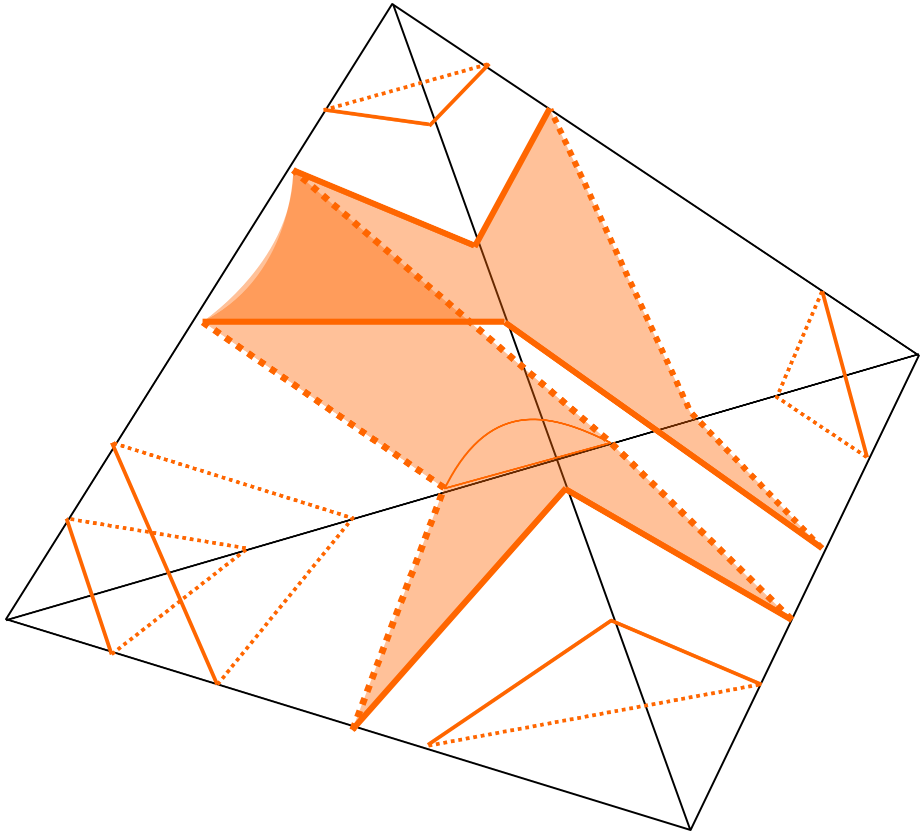
Elegir un arco que no tenga otros adentro. *Empujar una vecindad del arco en la esfera hacia la arista para eliminar dos cruces con la arista.*



4. Repetir los pasos anteriores hasta que las intersecciones de las esferas con las caras de los tetraedros consistan de arcos que unen distintas aristas.

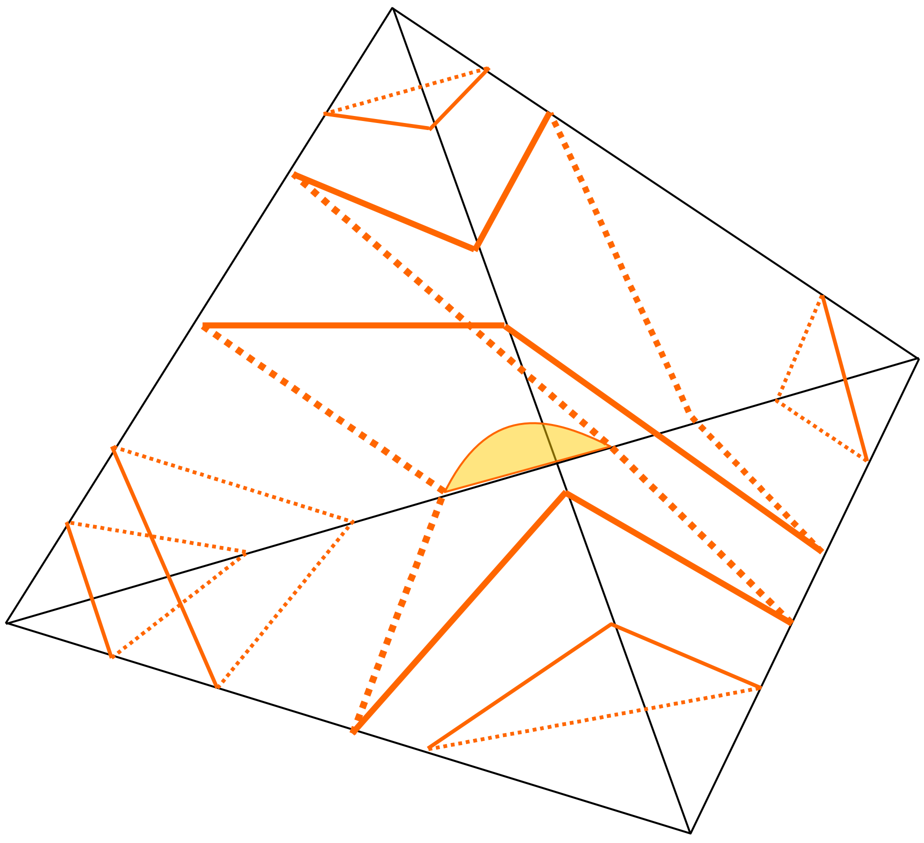
Ahora las curvas en las fronteras de los tetraedros estan formadas por arcos y cada curva bordea un disco en el tetraedro.

Las curvas formadas por muchos arcos bordean discos complicados: los discos en el interior del tetraedro pueden ser complicados.



Ahora las curvas en las fronteras de los tetraedros estan formadas por arcos y cada curva bordea un disco en el tetraedro.

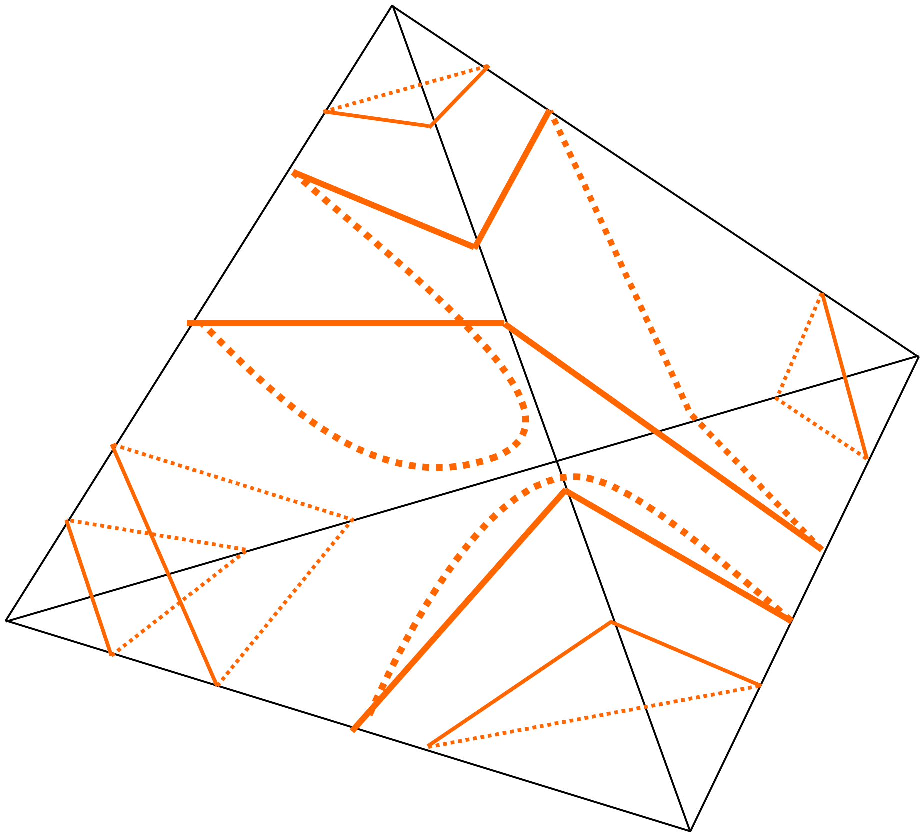
Las curvas formadas por muchos arcos bordean discos complicados: los discos en el interior del tetraedro pueden ser complicados.



5. Empujar el disco bordeado por una curva larga hacia la arista que cruza dos veces para reducir el numero de intersecciones de la esfera con la arista.`

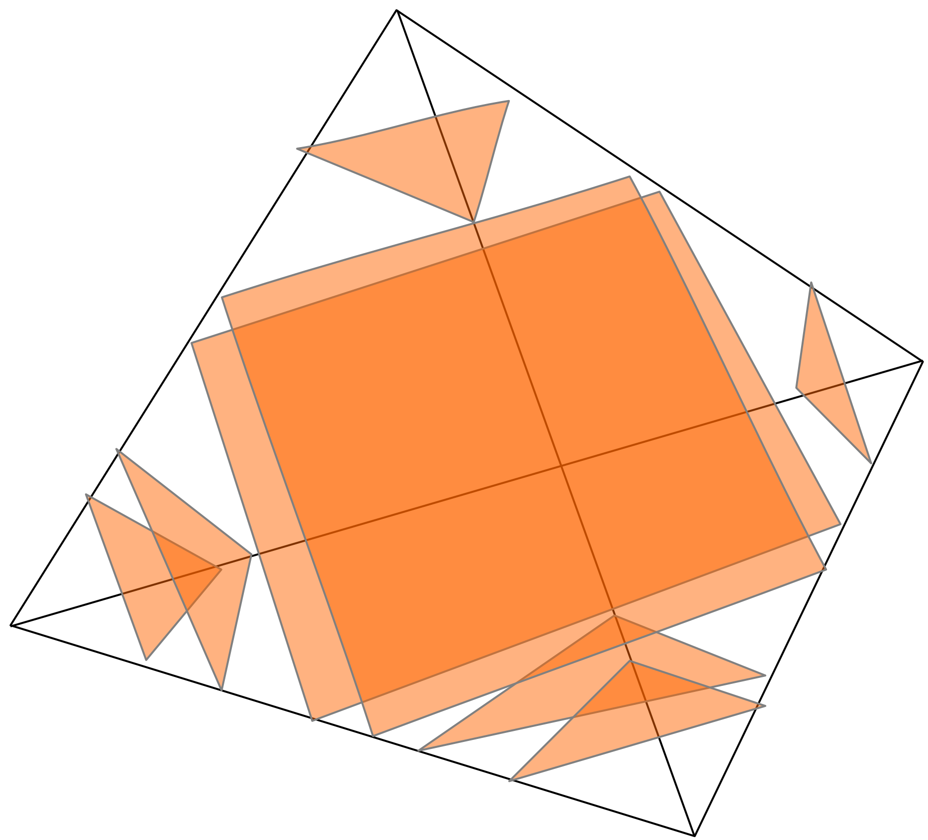
Ahora las curvas en las fronteras de los tetraedros estan formadas por arcos y cada curva bordea un disco en el tetraedro.

Las curvas formadas por muchos arcos bordean discos complicados: los discos en el interior del tetraedro pueden ser complicados.



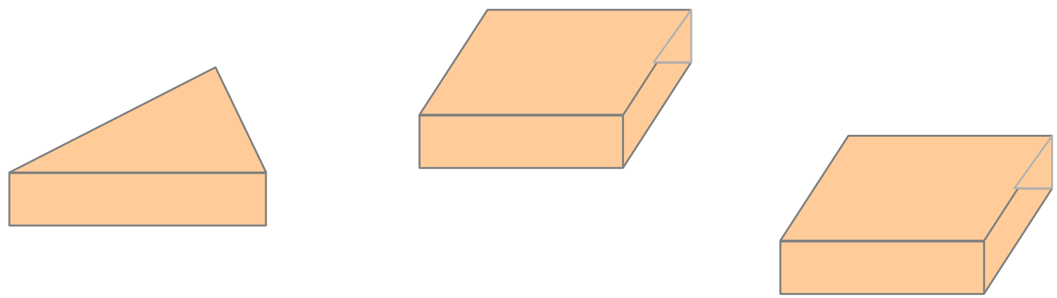
5. Empujar el disco bordeado por una curva larga hacia la arista que cruza dos veces para reducir el numero de intersecciones de la esfera con la arista.`

Asi podemos suponer que las esferas que descomponen a M son normales.

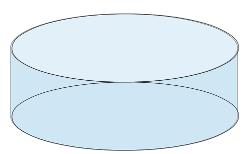


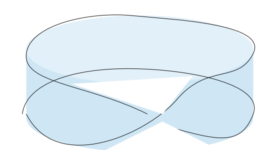
Las superficies normales cortan a un tetraedro en regiones sencillas: todas salvo 6 son productos:

¿Como puede ser una variedad que es localmente homeomorfa a un producto de una superficie con un intervalo?



Haces de intervalos:



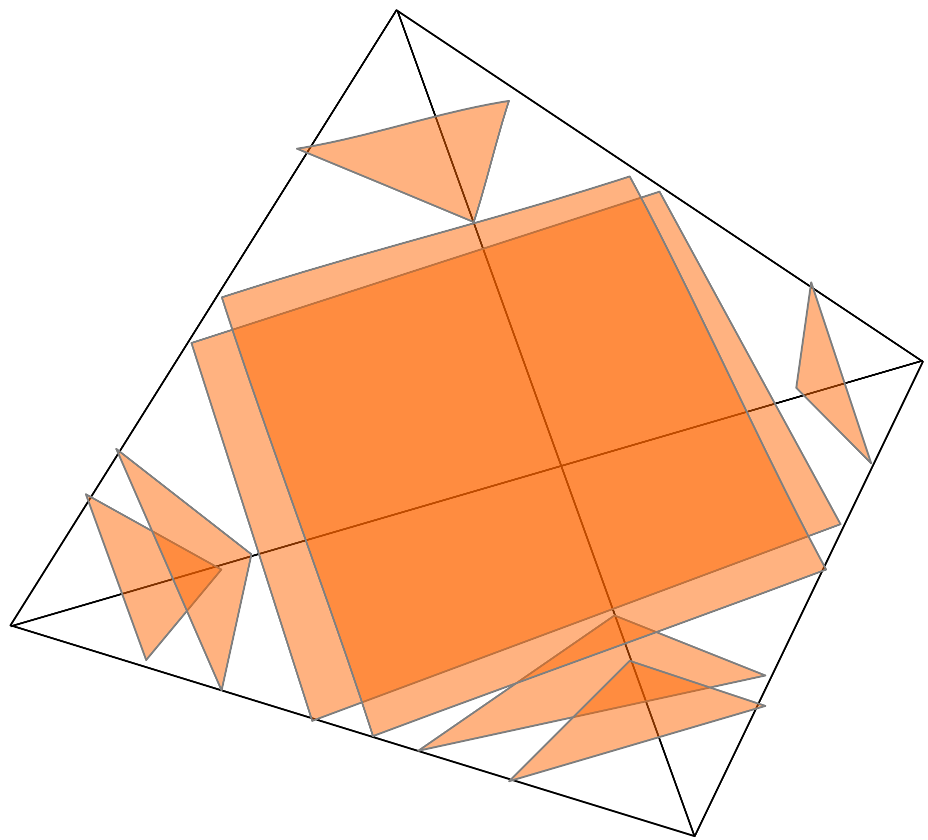


$F \times I$ (producto) $F \tilde{\times} I$ (haz torcido)

Hay 2 haces de intervalos con fronteras formadas por esferas:

$$S^2 \times I \qquad P^2 \tilde{\times} I = P^3 - B^3$$

Asi podemos suponer que las esferas que descomponen a M son normales



Si hay mas de 6T esferas separantes entonces alguna de las regiones en
las que las esferas dividen a M esta hecha de esos productos
y por lo tanto es un haz de intervalos $S^2 \times I$ o $P^2 \tilde{\times} I$.

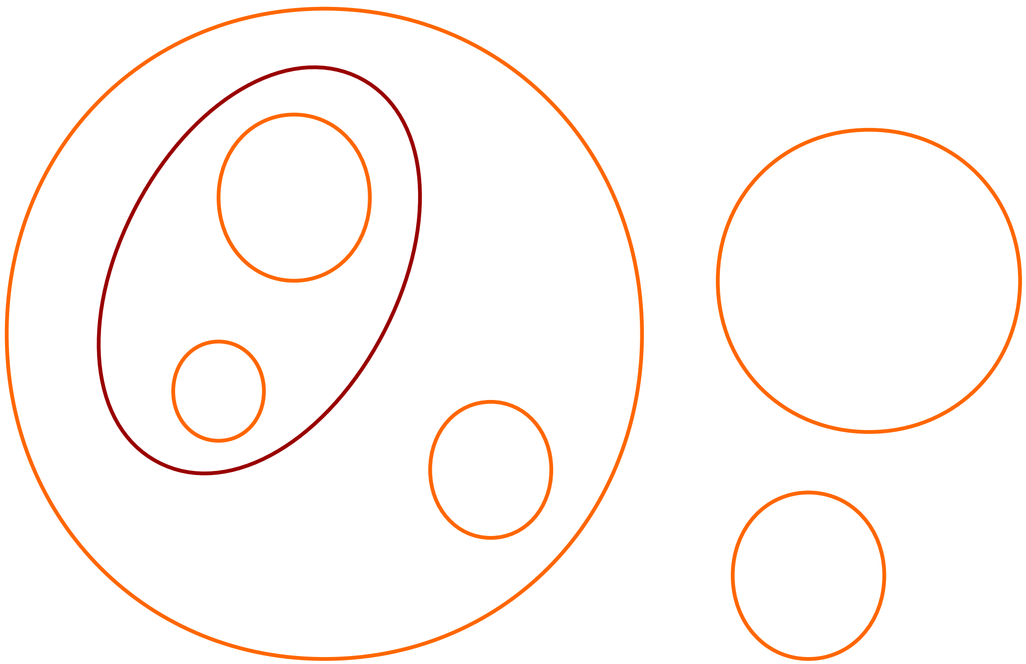
Teorema (Milnor) La descomposicion prima es *casi* unica.

Demostracion:

Vamos a suponer que M no tiene factores $S^2 \times S^1$ ni $S^2 \times S^1$ (o sea que en M no hay esferas no separantes) y probaremos que la descomposicion prima es unica.

Teorema (Milnor) La descomposicion prima es *casi* unica.

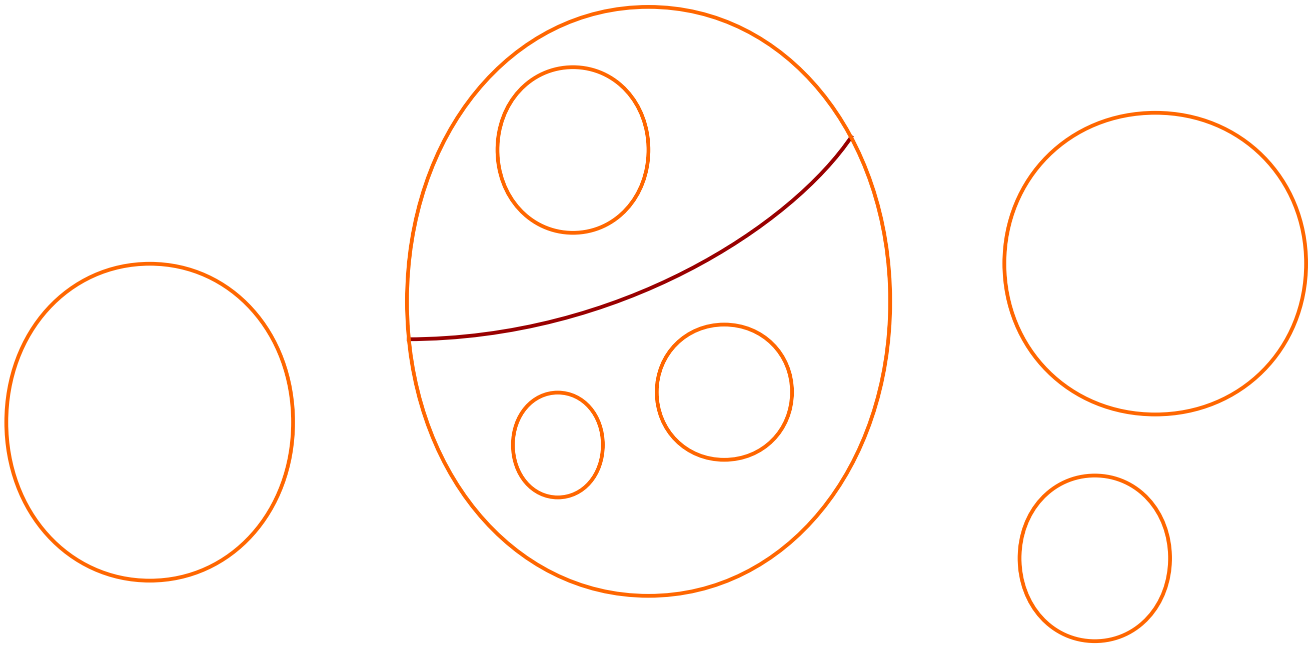
Demostracion:



Observacion 1: Si una coleccion de esferas dan una descomposicion de M en variedades primas y añadimos mas esferas, obtenemos una descomposicion de M en las mismas variedades primas y algunas 3-esferas.

Teorema (Milnor) La descomposicion prima es *casi* unica.

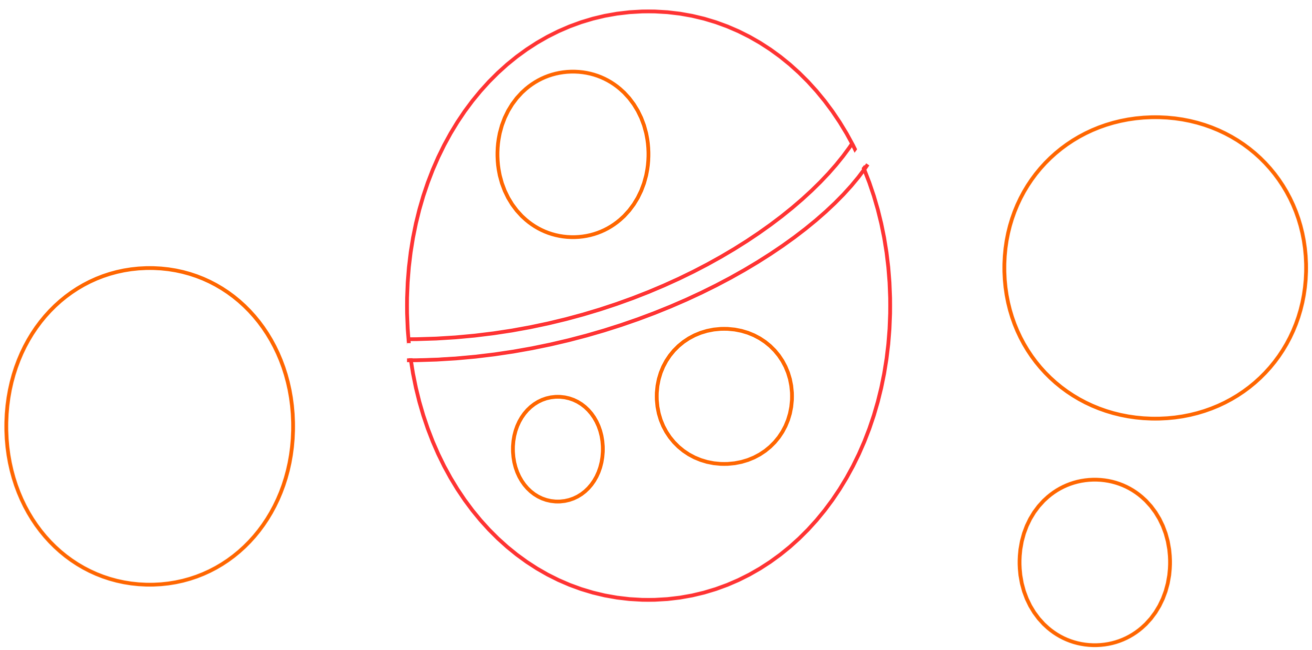
Demostracion:



Observacion 2: Si cortamos una esfera por un disco para obtener dos esferas y reemplazamos la esfera original por las dos nuevas, obtenemos una descomposicion de M en las mismas variedades primas y una 3-esfera mas.

Teorema (Milnor) La descomposicion prima es *casi* unica.

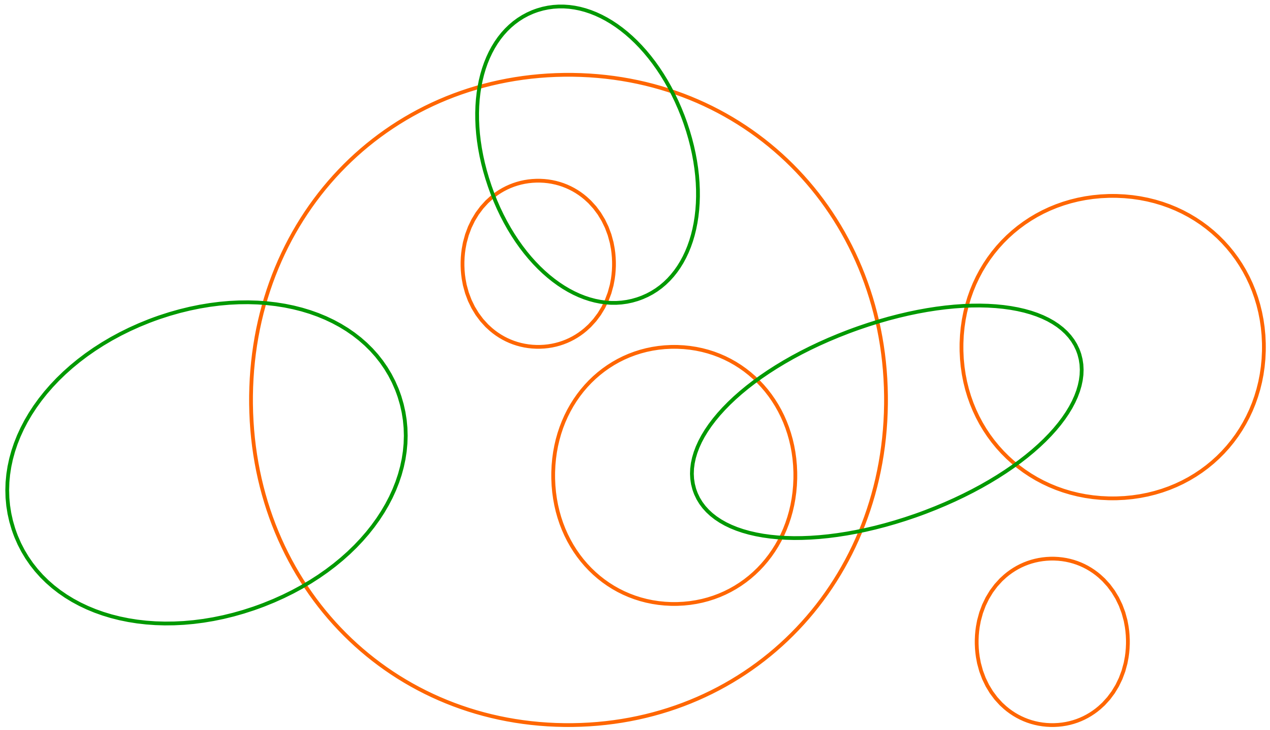
Demostracion:



Observacion 2: Si cortamos una esfera por un disco para obtener dos esferas y reemplazamos la esfera original por las dos nuevas, obtenemos una descomposicion de M en las mismas variedades primas y una 3-esfera mas.

Teorema (Milnor) La descomposicion prima es *casi* unica.

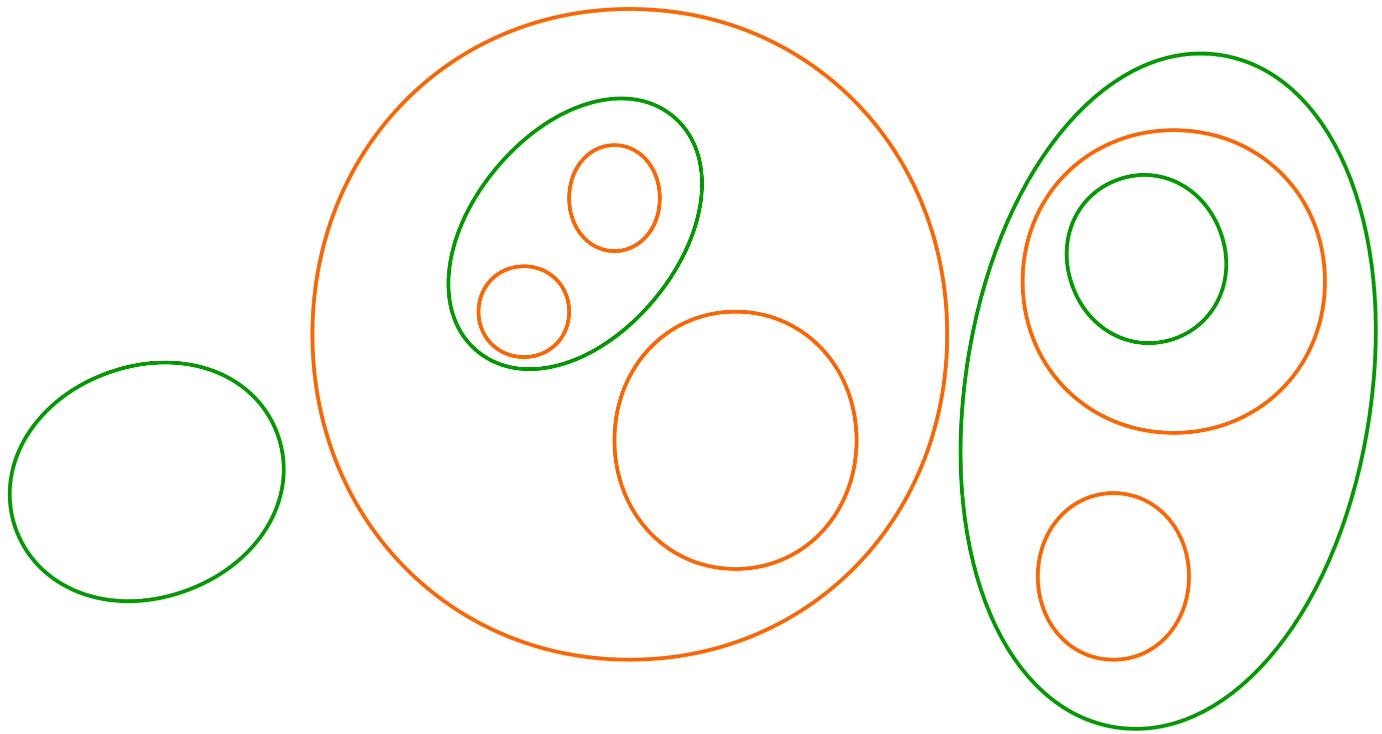
Demostracion:



Ahora consideremos las esferas (naranjas) dan una descomposicion y las esferas (verdes) que dan la otra.

Teorema (Milnor) La descomposicion prima es *casi* unica.

Demostracion:

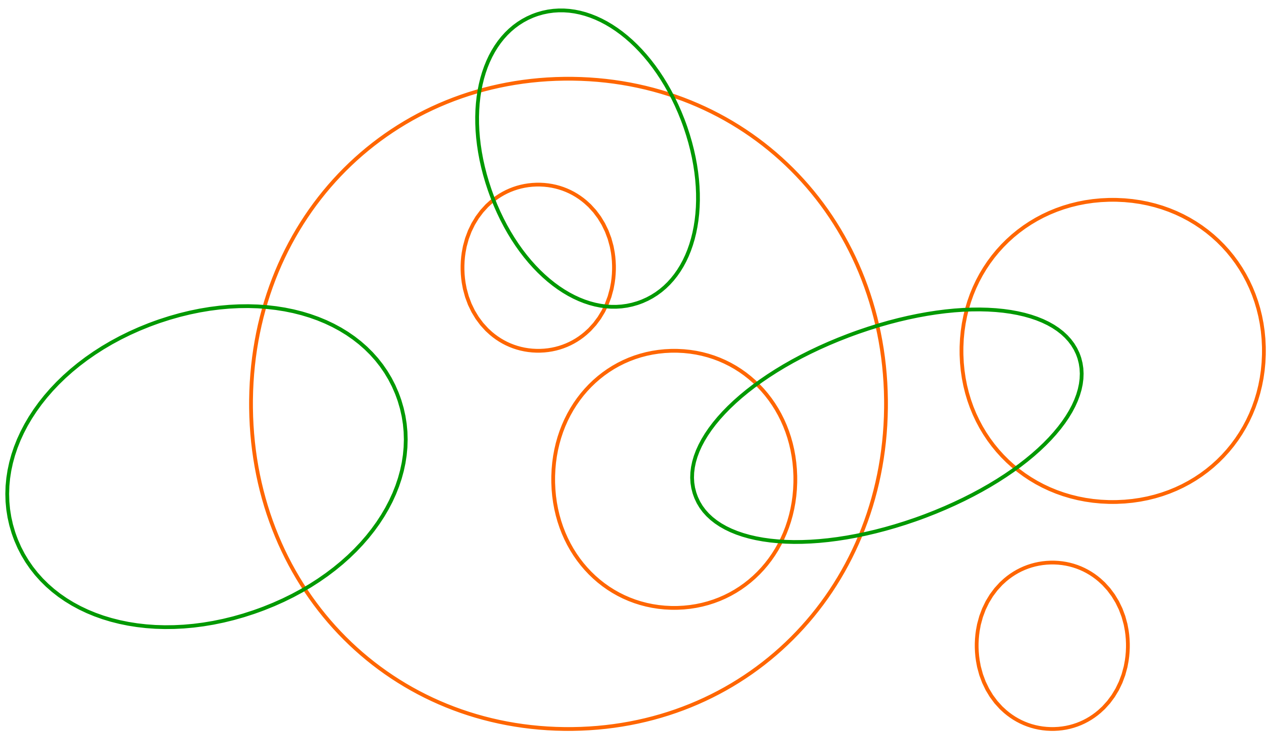


Si las esferas naranjas y verdes son ajenas, su union da una descomposicion de M en las variedades primas naranjas y algunas 3-esferas, y tambien da una descomposicion en las variedades primas verdes y algunas 3-esferas.

Asi que las variedades primas naranjas y verdes son las mismas.

Teorema (Milnor) La descomposicion prima es *casi* unica.

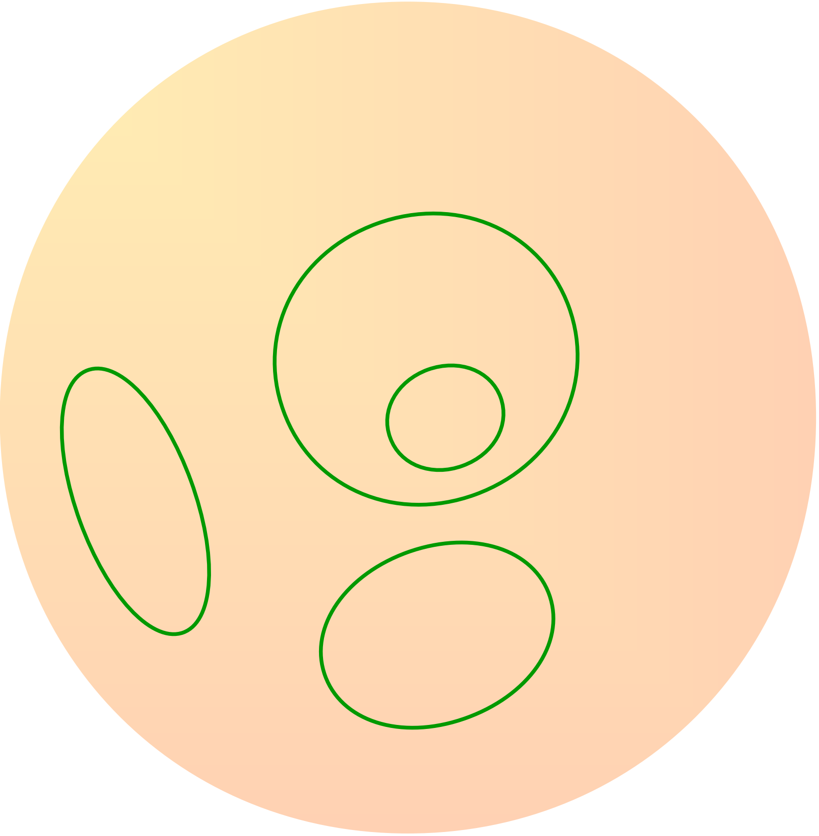
Demostracion:



Si las esferas naranjas y verdes se intersectan, vamos a cambiar las esferas verdes para quitar una curva de interseccion sin cambiar la descomposicion.

Teorema (Milnor) La descomposicion prima es *casi* unica.

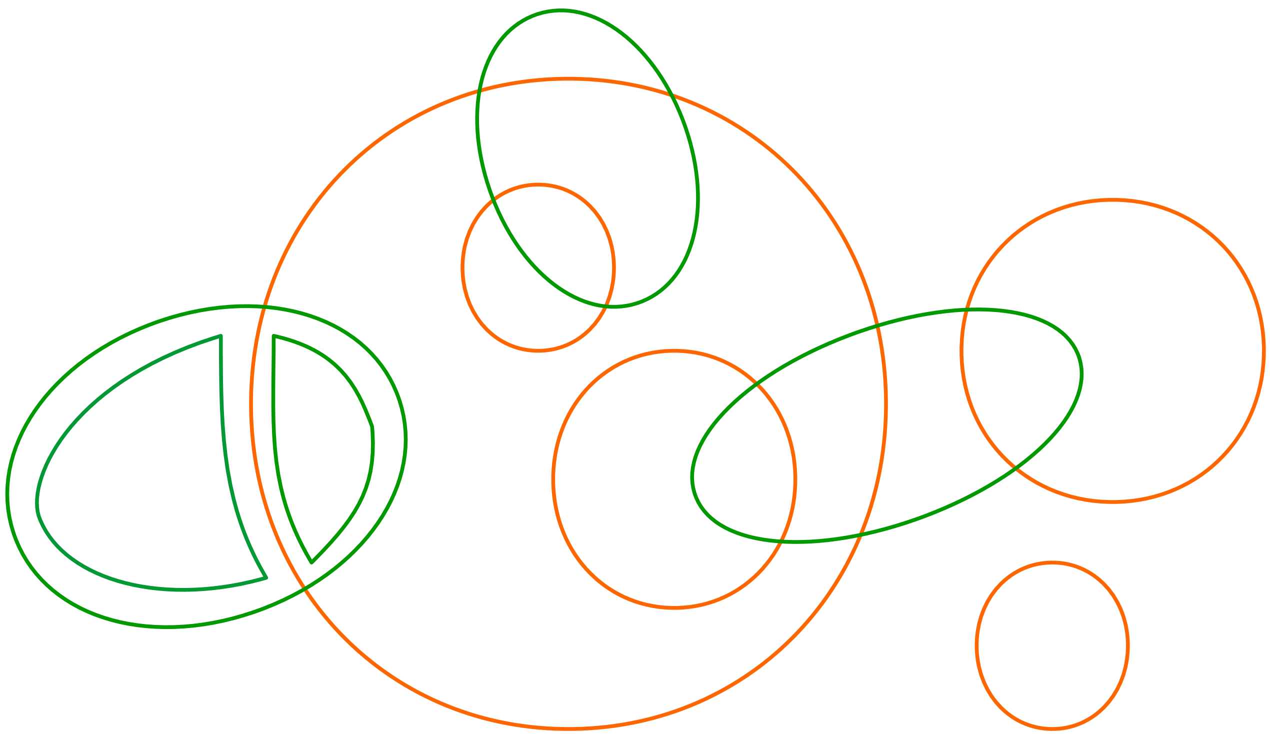
Demostracion:



Elijamos una curva de interseccion de una esfera naranja con una esfera verde que no contenga otras curvas de interseccion en su interior. Usemos el disco que bordea esta curva en la esfera naranja para cortar la esfera verde.

Teorema (Milnor) La descomposicion prima es *casi* unica.

Demostracion:



Cortamos una esfera verde usando un disco naranja para obtener dos nuevas esferas verdes.

Si reemplazamos esa esfera por estas dos obtenemos una coleccion de esferas verdes que dan la misma descomposicion en factores primos e intersectan menos veces a las naranjas.

Superficies esenciales

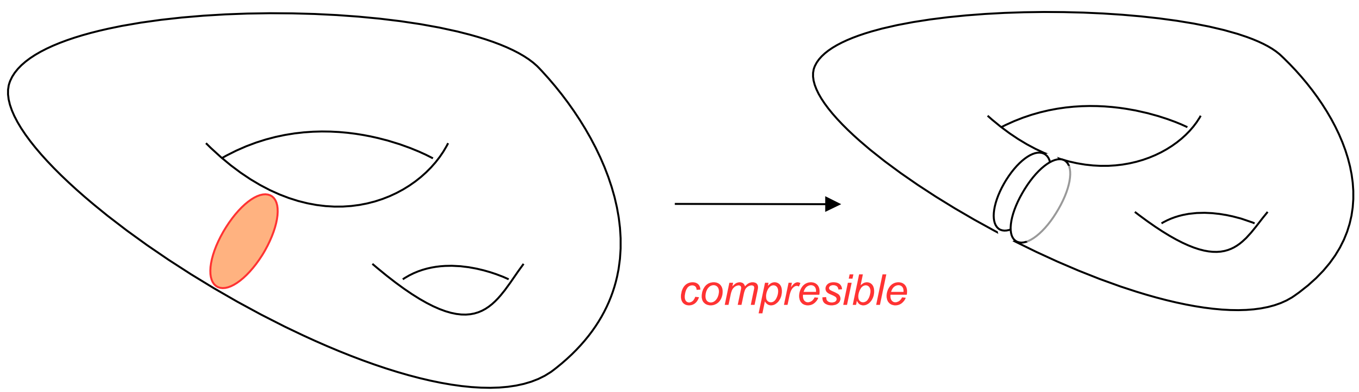
La existencia de esferas esenciales (que no bordean bolas) en una variedad M implica que M es suma conexa de variedades mas simples, o que M es $S^2 \times S^1$ *o* $S^2 \times S^1$.

La existencia de otras superficies "esenciales" en M tambien da informacion importante sobre la forma de M.

Superficies incompresibles

Una superficie S encajada en una 3-variedad M es *geometricamente compresible* si existe una curva c en S que es borde de un disco en M pero no es borde de un disco en S.

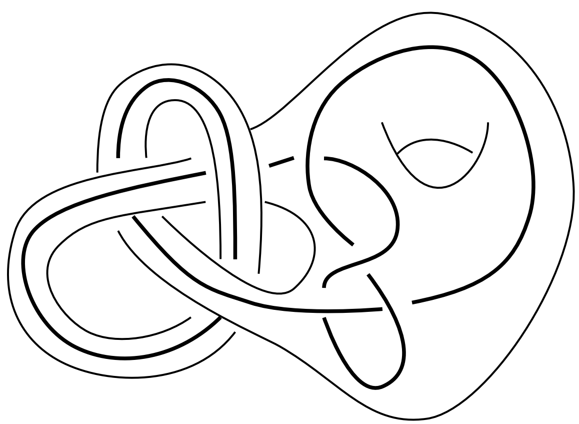
Las superficies compresibles pueden simplificarse cortandolas por un disco en M



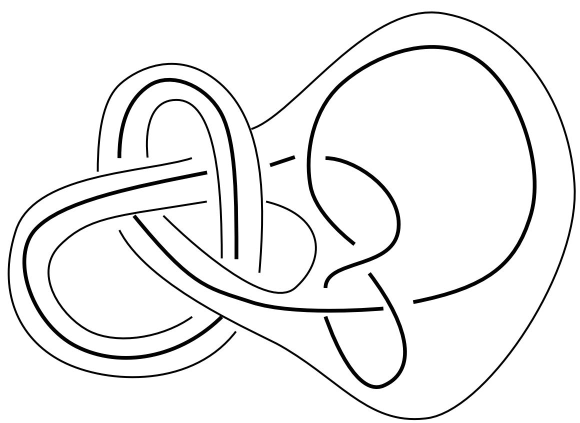
Las superficies distintas de una esfera o un disco que no son compresibles se llaman *incompresibles.*

Superficies incompresibles

Una superficie S encajada en una 3-variedad M es (*geometricamente) compresible* si existe una curva c en S que es borde de un disco en M pero no es borde de un disco en S.



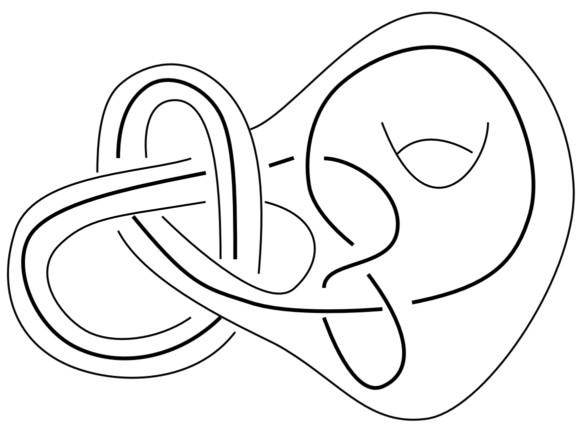
Superficie compresible



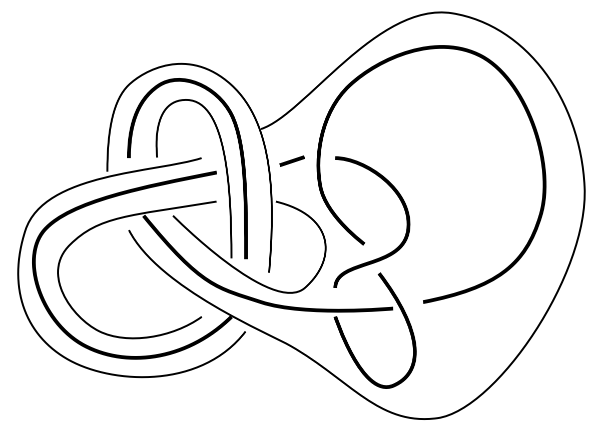
Superficie incompresible

Superficies incompresibles

Una superficie S encajada en una 3-variedad M es (*geometricamente) compresible* si existe una curva c en S que es borde de un disco en M pero no es borde de un disco en S.



Compresible

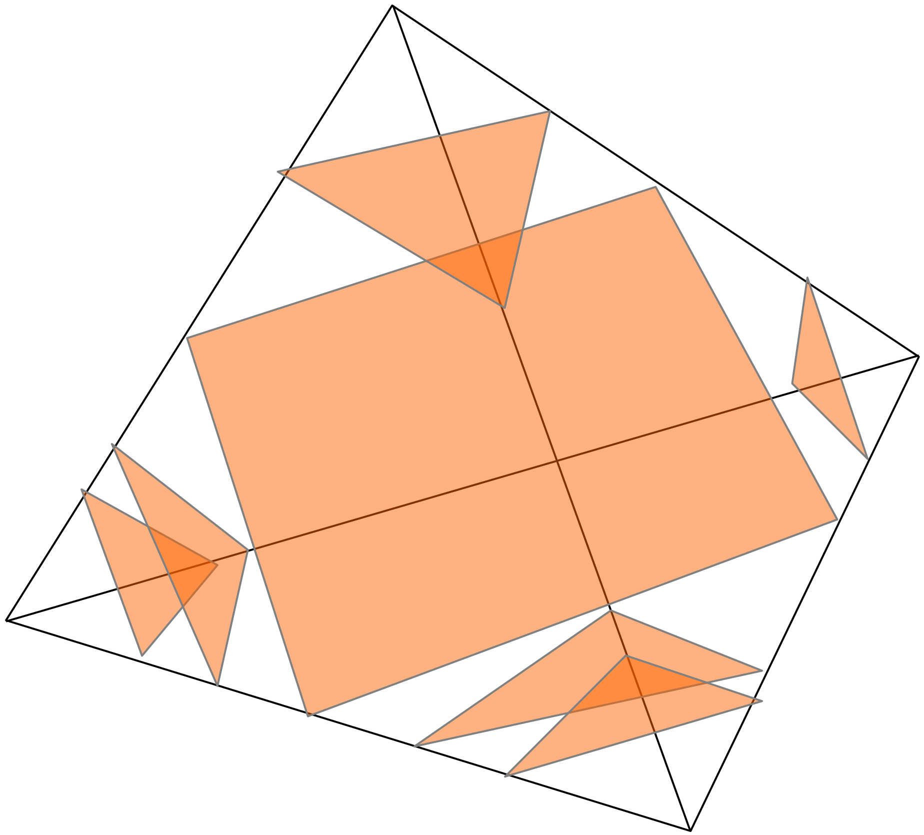


Incompresible

Teorema. Una superficie bilteral S distinta de la esfera es incompresible en M si y solo si el homomorfismo inducido

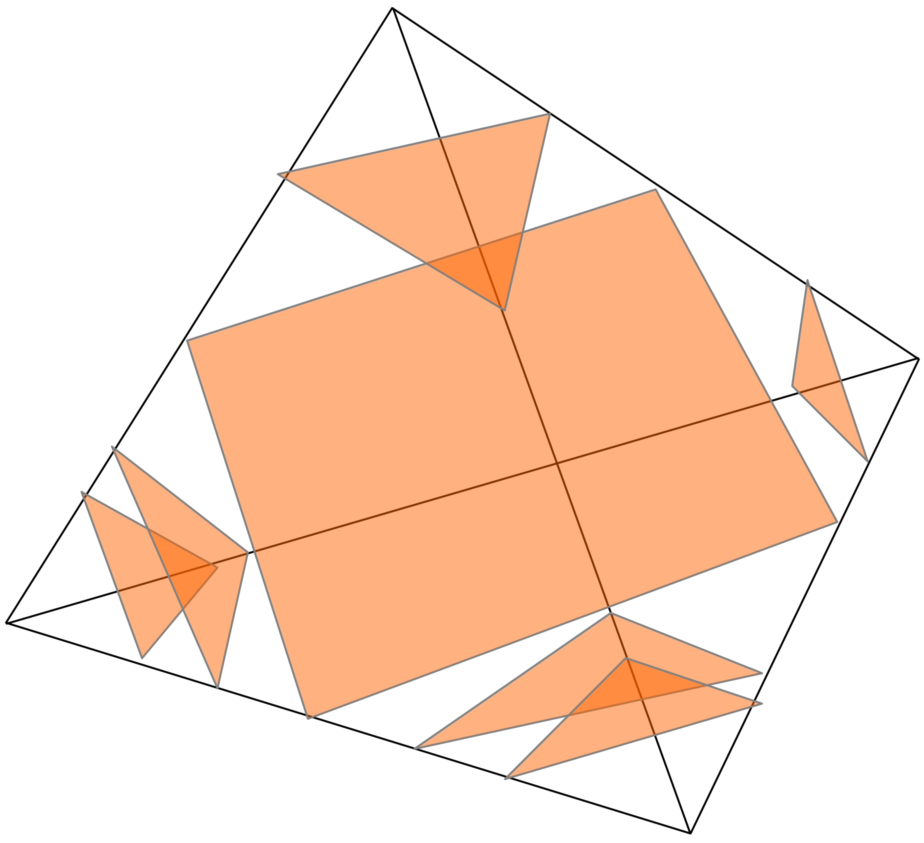
$$\pi_1(S) \rightarrow \pi_1(M) \quad \text{es inyectivo.}$$

Superficies incompresibles



En una 3-variedad irreducible, todas las superficies incompresibles son isotopicas a superficies normales.

Superficies normales



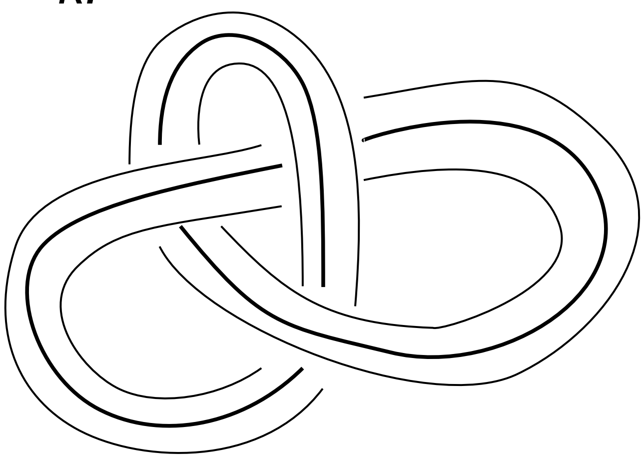
Teorema. En cada 3-variedad cerrada irreducible M, el numero de superficies incompresibles no paralelas esta acotado.

En particular, existe una coleccion finita de toros incompresibles que dividen a M en variedades atoroidales (cuyos unicos toros incompresibles son paralelos a la frontera)

Superficies incompresibles

La existencia o inexistencia de superficies incompresibles en una variedad M da informacion muy importante sobre M:

- *Un nudo k en S^3 es no trivial si y solamente si el toro periferico es incompresible en $S^3 – k$.*



- *Un nudo k es un satelite si y solo si S^3 - k contiene dos toros incompresibles.*

Superficies incompresibles

La existencia o inexistencia de superficies incompresibles en una variedad M da informacion muy importante sobre M:

- *Si una variedad cerrada irreducible M contiene una superficie incompresible, entonces la forma de M esta determinada por su grupo fundamental:*

Teorema de Waldhausen: Dos variedades cerradas *suficientemente grandes* con el mismo π_1 son homeomorfas.

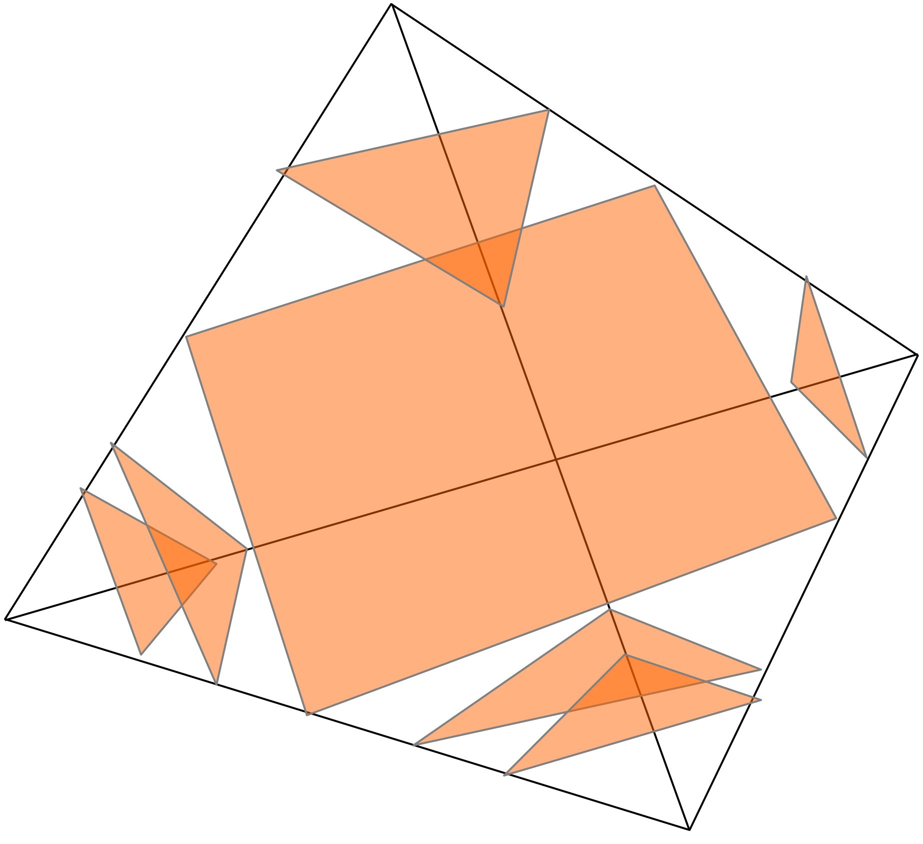
- *La existencia o inexistencia de esferas o toros esenciales en M da informacion sobre las posibles geometrias de M.*

Algoritmos

La existencia o inexistencia de esferas esenciales o de superficies incompresibles en una variedad M da informacion muy importante sobre M.

Pregunta: Dada una 3-variedad M ¿Como podemos saber si M admite esferas esenciales o superficies incompresibles?

Superficies normales



Las superficies normales dan algoritmos para saber si una variedad contiene o no esferas esenciales y superficies incompresibles.

En particular, existen algoritmos para saber si un nudo es trivial.

Bibliografia:

E. Moise — Geometric Topology in Dimensins 2 and 3 (libro)

A. Hatcher — Notes on Basic 3-Manifold Topology (notas)

C. Gordon — The theory of normal surfaces (notas)

En la variedad esta el gusto