Conexidad y compacidad

Un espacio topológico X es **conexo** si no es la unión de dos subconjuntos abiertos ajenos no vacios. El espacio X es **arcoconexo** si dados dos puntos a y b de X existe una función continua $f : [0,1] \to X$ tal que $f(0) - a$ y $f(1) = b$.

Observaciones (las pruebas son iguales que en los espacios métricos, ver N5).

- Los espacios arcoconexos son conexos, pero hay espacios conexos que no son arcoconexos.
- En cualquier espacio topológico la unión de subconjuntos conexos tales que todos intersectan a uno de ellos es conexa. Lo mismo vale para la unión de subconjuntos arcoconexos que intersectan a uno de ellos.
- Las imágenes continuas de espacios conexos son conexas, las imagenes continuas de espacios arcoconexos son arcoconexas.
- La cerradura de cualquier subconjunto conexo de un espacio X es conexa, pero la cerradura de un arcoconexo no tiene que ser arcoconexa. .

Ejemplos.

1. El conjunto $X = \{a, b\}$ con la topología $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$ es conexo ya que no hay 2 abiertos ajenos no vacíos que cubran a X. También es arcoconexo: un camino de a a b está dado por la función continua $f : [0,1] \to X$ dada por

$$f(t) = \begin{cases} \text{a} & \text{si } \ 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ \text{b} & \text{si } \ \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

2. Si X es un espacio infinito con la topología cofinita entonces X es conexo ya que todos los abiertos no vaciós de X se intersectan. Cada subespacio finito S de X es disconexo (tiene la topología discreta), pero no hay manera de cubrir a los pedazos de S con abiertos ajenos de X.
3. El espacio de las funciones continuas de [0,1] en [0,1] con la métrica del supremo es conexo, pero el espacio de las funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ con la 'métrica' del supremo (donde la distancia entre dos funciones puede ser infinita) no es conexo (tarea).

Si X es cualquier espacio topológico y p es un punto de X, la unión de todos los subconjuntos conexos de X que contienen a p es conexo y es el subconjunto conexo mas grande que contiene a p. Esto determina una partición de X en subconjuntos conexos ajenos, llamados las **componentes conexas** de X.

Por una observación anterior las componentes conexas de X son cerradas, y si son una cantidad finita tambien son abiertas (tarea). También podemos hablar de componentes arcoconexas de X, pero estas en general no son cerradas ni abiertas (tarea).

Un espacio topológico X es **compacto** si toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta finita.

Decir que un espacio X es compacto equivale a decir que X tiene la **propiedad de la intersección finita**: dada una coleccion de cerrados de X tales que cualquier subcolección finita de ellos tiene intersección no vacia, entonces toda la colección tiene intersección no vacia (tarea).

Ejemplos.

1. Todos los espacios topológicos finitos son compactos, sin importar su topología.
2. Todos los espacios con la topología cofinita son compactos.
3. Ningún espacio infinito con la topología conumerable es compacto:
   si $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ es un subconjunto numerable del espacio entonces los subconjuntos $A_n = \{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}$ son cerrados, y la intersección de cualquier colección finita de A_i's es el A_i con índice mas grande, pero la intersección de todos es vacía.
4. $\mathbb{R}$ con la topologia cuyos abiertos son los intervalos (a, ∞) no es compacto, ya que la cubierta $\{(-n, \infty)\}_{n\in\mathbb{N}}$ no tiene ninguna subcubierta finita. Pero el subespacio $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ si es compacto.

Observaciones (mismas pruebas que para espacios métricos, ver N6).

- Las imágenes continuas de espacios compactos son compactas.
- Los subespacios cerrados de un espacio compacto son compactos.
- Los subespacios compactos de un espacio topológico X no métrico pueden no ser cerrados. (por ejemplo, todos los subespacios finitos de X son compactos).
- Los subespacios compactos de un espacio metrico X son cerrados y acotados, pero existen subespacios cerrados y acotados de un espacio métrico que no son compactos.

Ejemplos.

- $\mathbb{R}$ es homeomorfo al intervalo $(-1, 1)$ con la métrica usual. Aunque $(-1, 1)$ es acotado y es cerrado en si mismo, no es compacto (*acotado* depende de la métrica y no de la topología, y siempre es posible cambiar la métrica por una métrica acotada sin cambiar la topología).
- El espacio S de las sucesiones reales acotadas con la métrica del supremo, el subespacio formado por las sucesiones con valores en [0,1] es cerrado y acotado, pero no es compacto: las sucesiones $s_1 = (1, 0, 0, 0, 0, \dots)$ $s_2 = (1, 1, 0, 0, 0, \dots)$ $s_3 = (1, 1, 1, 0, 0, \dots)$ $\dots$ forman un conjunto infinito en S sin puntos de acumulación, y esto no puede ocurrir en un espacio compacto (tarea).

Problemas

1. Si A es un subconjunto numerable de $\mathbb{R}^n$ entonces $\mathbb{R}^n - A$ es conexo.

2. Demuestra que si A y B son subconjuntos cerrados de X tales que $A \cap B$ y $A \cup B$ son conexos, entonces A y B son conexos.

3. Sea $C_0(\mathbb{R})$ el espacio de funciones continuas de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ con la topología inducida por la 'distancia' $d(f,g) = sup\{|f(x) - g(x)|\}$ (donde esta 'distancia' puede ser infinita).

   a. Muestra que si dos funciones f y g están a distancia infinita entonces f y g están en distintas componentes conexas del espacio.

   b. Muestra que $C_0(\mathbb{R})$ tiene una infinidad de componentes conexas.

4. Muestra que si un espacio X tiene una cantidad finita de componentes conexas entonces estas son abiertas, y que esto puede fallar si X tiene una infinidad de componentes.

5. La recta de Sorgenfrei es el espacio de los números reales con la topología que tiene por base a los intervalos $[a, b)$.

   a. Muestra que la recta de Sorgenfrey es totalmente disconexa (sus componentes conexas son puntos).

   b. Muestra que el subespacio $[0, 1]$ no es compacto.

   c. Muestra que la recta de Sorgenfrei tiene subespacios compactos infinitos.

6. Demuestra que un espacio X es compacto si y solo si X tiene la propiedad de la intersección finita.

7. Muestra que si un espacio X es compacto entonces todos los subconjuntos infinitos de X tienen puntos de acumulación. (El recíproco no es verdad)

8. a. ¿La unión de dos subespacios compactos de un espacio X es un compacto?

   b. ¿La intersección de dos subespacios compactos es un compacto?

   c. ¿La cerradura de un subespacio compacto es un compacto?

9. Sea S el espacio de las sucesiones en el intervalo [0,1] que eventualmente se anulan (es decir, de la forma $(a_1, a_2, \ldots, a_k, 0, 0, 0, \ldots)$ con $0 \leq a_i \leq 1$), con la métrica del supremo.

   a. Muestra que S es conexo.

   b. Muestra que S no es compacto.