

Introducción

El cálculo diferencial e integral es una herramienta para hacer cálculos exactos a partir de aproximaciones y límites, y de manera mas amplia, estudia las funciones reales, como cambian y que valores toman.

El cálculo se desarrolló en el siglo XVII para resolver distintos problemas físicos y matemáticos, como conocer la velocidad de un cuerpo en caída libre y calcular la longitud de una curva.

Aunque el cálculo integral tiene orígenes mucho mas antiguos, en los cálculos de áreas y volúmenes de Eudoxo y Arquímedes, fue hasta que se desarrollo el cálculo diferencial en el siglo XVII que se hallo una manera sistemática de hacerlo por medio de integrales y se descubrió que la derivación y la integración son operaciones inversas.

Para aprender cálculo usaremos dos perspectivas distintas:

1. La de las matemáticas aplicadas, que tratan de traducir problemas de la física y otras disciplinas a problemas sobre funciones, y resolver estos de maneara exacta o con la precisión suficiente para las aplicaciones.
2. La de las matemáticas puras, que tratan de entender lo mas posible y asegurarse de que todo lo que hacemos tiene bases lógicas firmes.

El cálculo se basa en tres conceptos fundamentales: los números reales, las funciones y los límites, estudiados en cálculo 1. Empezaremos por recordar algunos resultados básicos, si tienen dudas sobre estos temas pueden consultar las notas: <https://www.matem.unam.mx/~max/calculo1.html>.

Números Reales.

Representan todas las cantidades posibles, positivas o negativas, ya sean enteras, fraccionarias (racionales), o no fraccionarias (irracionales).

Con los números reales se pueden hacer todas las operaciones aritméticas que se hacen con los números racionales los reales se pueden sumar y multiplicar, y también se pueden restar y dividir (si el divisor no es 0) para obtener otros números reales. Hay otras operaciones que pueden hacerse con números reales pero no con racionales (como sacar raíces enésimas)

Los números reales tienen un orden, de modo que para cualquier par de números reales a y b , ocurre que $a < b$ o $a = b$ o $a > b$, y el orden se porta mas o menos bien con las operaciones aritméticas, pero hay que tener cuidado.

Ejemplo- Si a, b, c, d son números reales, $a < c$ y $b < d$ entonces $a + b < c + d$, pero no siempre es cierto que $ab < cd$ (peo si es cierto si los números son positivos)

Cada número real puede escribirse usando la notación decimal, que lo expresa como una *suma infinita* de potencias positivas y negativas de 10:

Ejemplo. $5734.18709... = 5 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 4 \times 10^0 + 1 \times 10^{-1} + 8 \times 10^{-2} + 7 \times 10^{-3} + 0 \times 10^{-4} + 9 \times 10^{-5} + ...$

Mientras que cada número entero o racional guarda una cantidad finita de información, los números irracionales pueden guardar una cantidad infinita. Aunque podemos describir a cada número real dando todos sus decimales, en la práctica esto tomaría una eternidad. Y aún si conocemos todos sus decimales, como podemos hacer operaciones con una cantidad infinita de cifras?

En la teoría esto se resuelve pensando en cada número real como un límite de números racionales (la expansión decimal infinita es el límite de las expansiones decimales truncadas (cortadas) en algún momento- Con los números racionales podemos hacer operaciones fácilmente, y definimos las operaciones con números reales como límites de las operaciones de los racionales que los aproximan.

Decir que son realmente los números reales no es tan fácil. Algebraicamente comparten muchas propiedades con los números racionales, y aún mas con los números algebraicos (los que son raíces de polinomios enteros). Lo que distingue a los números reales es una propiedad no algebraica, llamada el **axioma del supremo**, que afirma que cada conjunto no vacío **A** de números reales que está acotado superiormente tiene una cota superior mínima (llamada el *supremo* de A).

Ejemplo. El número real $\sqrt{3}$ es el supremo del conjunto $\{x \in \mathbb{Q} / x^2 < 3\}$

Usando el supremo es posible definir a los números reales y sus operaciones a partir de los números racionales. Para cada real $r = \sup \{q \in \mathbb{Q} / q < r\}$ así que podemos identificar a cada real r con un conjunto de racionales (el conjunto de todos los racionales menores o iguales a r). Y podemos definir las operaciones entre números reales definiendo operaciones entre conjuntos de racionales

Ejemplo. $r+s = \sup \{q+q' \in \mathbb{Q} / q < r, q' < s\}$

Funciones reales

Una función de un conjunto A a un conjunto B es una manera bien definida de asignar a cada elemento de A un único elemento de B. Una **función real** es una función entre dos conjuntos de números reales.

Ejemplos

- La función que a cada real distinto de 0 le asigna su inverso $i(x)=1/x$.
- La función que a cada real positivo r le asigna el área del círculo de radio r : $C(r)=\pi r^2$
- La función que a cada altura h le asigna la presión atmosférica a esa altura.

- $$d(x) = \begin{cases} 1/n & \text{si } x=m/n \text{ (como fracción reducida)} \\ 0 & \text{si } x \text{ no es una fracción} \end{cases}$$

- Las funciones exponenciales, como 2^x son fáciles de definir para valores enteros o racionales de x :

$$2^n = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 \quad \text{si } n \text{ es un entero positivo,}$$

$$2^n = 1/2^{-n} \quad \text{si } n \text{ es un entero negativo}$$

$$2^{1/n} = \sqrt[n]{2}$$

$$2^{m/n} = \sqrt[n]{2^m}$$

Para valores irracionales de x no podemos definir 2^x directamente: hay que definirlo como el límite de los valores de $2^{m/n}$ cuando m/n se aproxima a x , *asumiendo que este límite existe*.

Las funciones reales pueden sumarse, multiplicarse, restarse y dividirse (donde el denominador no se anula) así que podemos pensar en las funciones reales como una especie de números, que contiene a los números reales como funciones constantes.

Hay una operación entre funciones que no puede hacerse con números: la **composición** de dos funciones f y g es la función $g \circ f$ que se obtiene aplicando primero f y luego g . Esta operación es asociativa, pero no es conmutativa

Ejemplo. Si $f(x)=x^2+1/x$ y $g(x)=x\sin(x)$ entonces $gf(x)=(x^2+1/x)\sin(x^2+1/x)$ y $fg(x)=x^2\sin(x)^2+1/x\sin(x)$.

Limites.

Sea $f(x)$ una función real que está definida en una vecindad de un punto x_0 , aunque quizás no en x_0 . Si los valores de $f(x)$ se aproximan a un valor fijo L cuando x se aproxima a x_0 , diremos que el **límite** de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 es L .

Formalmente, escribimos $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ si para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \epsilon$.

Lema. Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones definidas en una vecindad de x_0 , $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ y $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$ entonces

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f+g)(x) = L+M$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (fg)(x) = LM$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f/g)(x) = L/M \text{ siempre que } M \neq 0$$

Ejemplo. Considerar la función $d(x) = \begin{cases} 1/n & \text{si } x \text{ es una fracción } m/n \text{ (reducida)} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$

entonces $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ para todo x_0 ya que $f(x)=0$ para todos los x irracionales, y al acercarnos a cualquier número real x_0 con números racionales $x=m/n$ distintos de x_0 sus denominadores se tienen que hacer cada vez mas grandes así que $1/n$ se aproxima a 0.

Funciones continuas

Hay funciones muy raras (como la función $d(x)$ dada arriba), pero las funciones mas simples y muchas de las que aparecen en aplicaciones tienen propiedades que las hacen menos impredecibles.

Si una variable y es función de otra variable x , digamos $y=f(x)$, vamos a decir que y depende continuamente de x , o que la función $f(x)$ es continua, si a valores *suficientemente cercanos* de x les corresponden valores cercanos de y . Mas precisamente definimos

Una función $f(x)$ es **continua** en un punto x_0 de su dominio si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ es decir, si para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta$ entonces $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

Si $f(x)$ no es continua en un punto en un punto x_0 diremos que es discontinua en x_0 .

Si $f(x)$ es continua en todos los puntos de su dominio diremos que $f(x)$ es **continua**.

Ejemplo. La función $f(x)=x$ es continua: basta tomar $\delta=\epsilon$.

En general δ depende de la función f , de x_0 y de ϵ y puede ser difícil encontrarla.

Ejercicio. ¿En que puntos es continua la función $d(x) = \begin{cases} 1/n & \text{si } x \text{ es una fracción } m/n \text{ (reducida)} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$?

R. Es continua en los irracionales y discontinua en los racionales, ya que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ para todo x_0 y este límite es el valor de $f(x_0)$ cuando x_0 es irracional pero no cuando x_0 es racional.

Teorema. Las sumas, restas, productos y cocientes de funciones continuas son funciones continuas en todos los puntos donde estas operaciones están definidas.

Ejemplo. Las funciones polinomiales $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ son funciones continuas en todo R, porque son sumas de productos de la función identidad $i(x) = x$ que es continua.

Las funciones racionales $r(x) = p_1(x)/p_2(x)$ (cocientes de polinomios) son funciones continuas en todos los puntos donde el denominador $p_2(x)$ no se anula.

Teorema. Las composiciones de funciones continuas son funciones continuas.

Teorema del Valor Intermedio. Si la función $f(x)$ es continua en un intervalo $[a, b]$ entonces toma todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$.

Ejemplo. ¿Existirá algún número real tal que $x^7 + x^3 = 1$?

La función $f(x) = x^7 + x^3$ es continua en el intervalo $[0, 1]$, $f(0) = 0$ y $f(1) = 2$ así que por el TVI debe existir un número c entre 0 y 1 donde $f(c) = 1$.

Aunque no podemos calcular c exactamente, podemos aproximarlos tanto como queramos encontrando valores cada vez mas cercanos de a y b donde $f(a) < 1$ y $f(b) > 1$.

Teorema. Si una función está definida y es continua en un intervalo cerrado entonces f está acotada en el intervalo y alcanza un valor máximo y un valor mínimo.

Ejercicio. La función $f(x) = x^2 - x^3$ es continua en el intervalo $[0, 1]$ así que tiene un valor máximo y un valor mínimo en ese intervalo ¿pero cuales serán esos valores?

Funciones derivables

Decimos que la función $f(x)$ es **derivable** en un punto x_0 de su dominio si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe.

Al límite le llamamos la **derivada** de $f(x)$ en x_0 y lo denotamos por $f'(x_0)$.

Una forma equivalente de calcular la derivada es como $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Si la función $f(x)$ es derivable en todos los puntos de su dominio decimos que f es **derivable** y a la función derivada le denotamos por $f'(x)$.

Observación. Si una función es derivable en x_0 entonces es continua en x_0 , pero una función puede ser continua en x_0 y no ser derivable en x_0 .

Ejemplo. Si $d(t)$ da la distancia que ha recorrido un punto hasta el instante t , entonces $d'(t)$ da la velocidad del punto en el instante t .

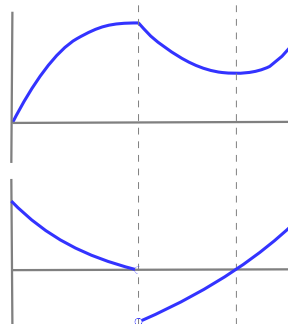
Ejemplo. Si $v(t)$ da la velocidad de un punto en cada instante entonces $v'(t)$ da su aceleración en cada instante.

Ejemplo. Si $A(r)$ es el área de un círculo de radio r , cual es la derivada de $A(r)$?

$A(r)=\pi r^2$ así que $A'(r)=2\pi r$ que es el perímetro del círculo de radio r .

Observación. La derivada de $f(x)$ mide la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$.

Ejemplo. Si la gráfica de la función $f(x)$ se ve así:



la gráfica de su derivada se ve mas o menos así:

Teorema. La sumas, restas, productos y cocientes de funciones derivables son funciones derivables en todos los puntos donde las operaciones están definidas.

La demostración del teorema nos dice como hallar las derivadas de las combinaciones de funciones a partir de las derivadas de las funciones:

$$(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$$

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$$

Regla de Leibnitz

$$(1/g)'(x) = -g'(x) / g^2(x)$$

$$(f/g)'(x) = [f'(x)g(x)-g'(x)f(x)] / g^2(x)$$

siempre que $g(x)\neq 0$

Teorema. La composiciones de funciones derivables son funciones derivables en todos los puntos donde la composición está definida.

$$(g\circ f)'(x) = g'(f(x)) g'(x)$$

Regla de la cadena

$$(f^{-1})'(x) = 1 / f'(f^{-1}(x))$$

Derivada de la inversa

Si $f(x)$ es una función derivable, un **punto crítico** de f es un punto donde $f'(x)=0$.

Los puntos críticos de f son los puntos donde la recta tangente a la gráfica de f es horizontal.



A los valores de la función $f(x)$ en los puntos críticos se les llama **valores críticos**.

Teorema. Si la función $f(x)$ es derivable en un intervalo, entonces los valores máximos y mínimos de $f(x)$ solamente pueden estar en los puntos críticos de $f(x)$ o en los extremos del intervalo.

Teorema del valor medio.

Si la función f es derivable en un intervalo $[a,b]$, entonces existe un punto c del intervalo donde $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Ejemplo. La función $f(x)=x^4+x^2+x$ tiene derivada $f'(x)=4x^3+2x+1$

Como $f(-1)=1$ y $f(1)=3$, entonces debe existir un punto c entre -1 y 1 donde $f'(c)=4x^3+2x+1 = \frac{3-1}{1-(-1)} = 1$

Corolario. Si $f(x)$ es una función derivable y $f'(x)>0$ en un intervalo entonces $f(x)$ es creciente en ese intervalo. Y si $f'(x)<0$ en un intervalo entonces $f(x)$ es decreciente en ese intervalo.

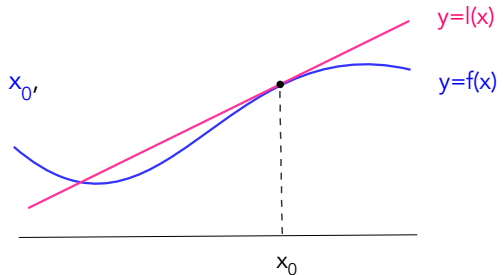
Ejemplo. La función $f(x) = x + \frac{1}{x}$ tiene derivada $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$

Como $f'(x)>0$ cuando $x>1$ y cuando $x<-1$ entonces $f(x)$ es creciente en los intervalos $(-\infty,-1)$ y $(1,\infty)$.

Como $f'(x)<0$ cuando $0<x<1$ y cuando $-1<x<0$ entonces $f(x)$ es decreciente en los intervalos $(-1,0)$ y $(0,1)$.

Teorema. Si la función $f(x)$ es derivable en el punto x_0 entonces la mejor aproximación lineal de $f(x)$ cerca de x_0 está dada por la función $l(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.

La gráfica de $l(x)$ es la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto x_0 , así que $l(x)$ es una función lineal que coincide con $f(x)$ en x_0 y tiene la misma derivada que $f(x)$ en x_0 .



$l(x)$ es la única función lineal tal que $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-l(x)}{x-x_0} = 0$

(esto dice que al acercarse x a x_0 el error $f(x)-l(x)$ se hace mucho mas pequeño que la distancia de x a x_0).

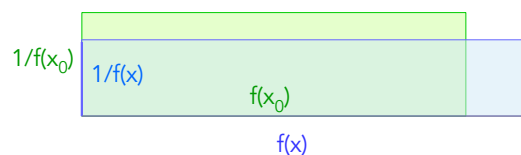
Ejemplo. La mejor aproximación lineal de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ cerca de $x_0=4$ es

$$l(x) = f(4) + f'(4)(x-4) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4^2}(x-4) = -\frac{1}{16}x + \frac{14}{16}$$

Problemas de repaso

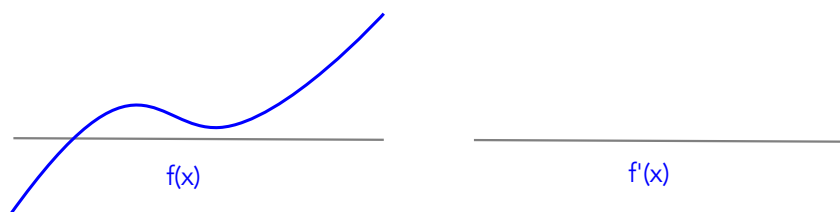
1. Si a y b son dos números reales que conocemos con una precisión de 3 cifras decimales ¿con que precisión podemos calcular $a+b$? ab ? a/b ?
2. Demuestra a partir de la definición que $f(x)=x^2$ es continua en $x=10$ ¿Que tan cerca debe estar x de 10 (cuanto debe valer δ) para que x^2 difiera de 10^2 en menos que 1 (para que $\epsilon=1$)?
3. ¿Existirá un número real x entre 0 y 1 tal que $x^2-x^3=0.1$? ¿Y un número real x entre 0 y 1 tal que $x^2-x^3=0.2$?
4. Calcula las derivadas de estas funciones (usando todo lo que sepas)
 - a. $f(x) = \frac{x^2-3x^2+1}{x^3+4x^{-1}+x}$
 - b. $g(x) = (x^3+2x^2-3x+4)^{11}$
 - c. $h(x) = \text{sen}(\cos(x^2))$
 - d. $e(x) = 2^{3x}$

5. Usa el dibujo para hallar la relación que hay entre la derivada de $(1/f)(x)$ y la derivada de $f(x)$.
(observar que los dos rectángulos tienen área 1)

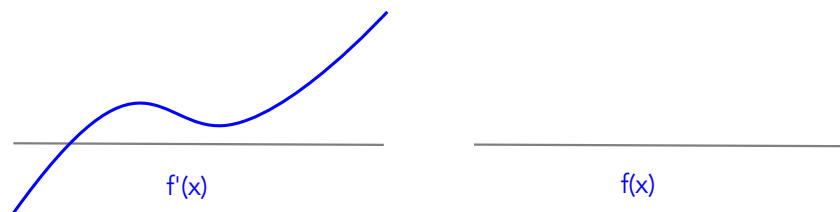


6. Encuentra los puntos críticos y los valores críticos de la función $f(x)=x^2+1/x$.

7. Esboza la gráfica de $f'(x)$ a partir de la gráfica de $f(x)$



8. Dibuja la gráfica de una función $f(x)$ cuya derivada se vea así (ojo: es al revés que el anterior)



9. ¿Cuales son los valores máximos y mínimos de la función $f(x)=2x^3-x^2$ en el intervalo $[0,1]$?

10. Sean $f(x)$ y $g(x)$ son funciones derivables en un intervalo $[a,b]$ tales que $f(a)=g(a)$ y $f(b)=g(b)$.
Demuestra que existe un c entre a y b donde $f'(c)=g'(c)$.

11. Si $f(x)$ es una función derivable con $f(1)=2$ y $f'(1)=-3$ y $f''(1)=5$ ¿Cual es la función lineal $l(x)$ que mejor aproxima a $f(x)$ cerca de 1? ¿Cual será la función cuadrática $c(x)$ que mejor aproxima a $f(x)$ cerca de 1?