

ALGUNAS APLICACIONES DE POLINOMIOS ORTOGONALES

Manuel Domínguez de la Iglesia

Instituto de Matemáticas C.U., UNAM

Universidad Autónoma de Aguascalientes
Aguascalientes, 17 de marzo de 2017

ÍNDICE

- 1 PRELIMINARES
- 2 FÓRMULAS DE CUADRATURA DE GAUSS
- 3 EQUILIBRIO ELECTROSTÁTICO
- 4 CAMINATAS ALEATORIAS

ÍNDICE

- 1 PRELIMINARES
- 2 FÓRMULAS DE CUADRATURA DE GAUSS
- 3 EQUILIBRIO ELECTROSTÁTICO
- 4 CAMINATAS ALEATORIAS

POLINOMIOS ORTOGONALES

Sea ω un **peso positivo** sobre $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$ con momentos finitos. Asociado a ω se considera el espacio de funciones ponderado

$$L^2_\omega(\mathcal{S}) = \left\{ f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R} : \int_{\mathcal{S}} f^2(x)\omega(x)dx < \infty \right\}$$

$L^2_\omega(\mathcal{S})$ es un **espacio prehilbertiano** con el producto escalar ponderado y norma

$$(f, g)_\omega = \int_{\mathcal{S}} f(x)g(x)\omega(x)dx, \quad \|f\|_\omega^2 = (f, f)_\omega$$

Siempre va a ser posible construir una sucesión $(p_n)_n$ de **polinomios** tal que $\deg p_n = n$ y que sean **ortogonales (PO)** con respecto al producto escalar $(\cdot, \cdot)_\omega$: aplicando Gram-Schmidt al sistema generador y l.i. $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$

$$(p_n, p_m)_\omega = \int_{\mathcal{S}} p_n(x)p_m(x)\omega(x)dx = \|p_n\|_\omega^2 \delta_{nm}, \quad n, m \geq 0$$

En particular siempre se tiene que $(p_n, q)_\omega = 0$ para $q \in \mathbb{P}_{n-1}$.

Propiedad (Raíces de PO): siempre son reales, simples y están dentro de \mathcal{S} . Además los ceros de p_{n+1} se entrelazan con los de p_n .

POLINOMIOS ORTOGONALES

Sea ω un **peso positivo** sobre $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$ con momentos finitos. Asociado a ω se considera el espacio de funciones ponderado

$$L^2_\omega(\mathcal{S}) = \left\{ f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R} : \int_{\mathcal{S}} f^2(x)\omega(x)dx < \infty \right\}$$

$L^2_\omega(\mathcal{S})$ es un **espacio prehilbertiano** con el producto escalar ponderado y norma

$$(f, g)_\omega = \int_{\mathcal{S}} f(x)g(x)\omega(x)dx, \quad \|f\|_\omega^2 = (f, f)_\omega$$

Siempre va a ser posible construir una sucesión $(p_n)_n$ de **polinomios** tal que $\deg p_n = n$ y que sean **ortogonales (PO)** con respecto al producto escalar $(\cdot, \cdot)_\omega$: aplicando Gram-Schmidt al sistema generador y l.i. $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$

$$(p_n, p_m)_\omega = \int_{\mathcal{S}} p_n(x)p_m(x)\omega(x)dx = \|p_n\|_\omega^2 \delta_{nm}, \quad n, m \geq 0$$

En particular siempre se tiene que $(p_n, q)_\omega = 0$ para $q \in \mathbb{P}_{n-1}$.

Propiedad (Raíces de PO): siempre son reales, simples y están dentro de \mathcal{S} . Además los ceros de p_{n+1} se entrelazan con los de p_n .

POLINOMIOS ORTOGONALES

Sea ω un **peso positivo** sobre $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$ con momentos finitos. Asociado a ω se considera el espacio de funciones ponderado

$$L^2_\omega(\mathcal{S}) = \left\{ f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R} : \int_{\mathcal{S}} f^2(x)\omega(x)dx < \infty \right\}$$

$L^2_\omega(\mathcal{S})$ es un **espacio prehilbertiano** con el producto escalar ponderado y norma

$$(f, g)_\omega = \int_{\mathcal{S}} f(x)g(x)\omega(x)dx, \quad \|f\|_\omega^2 = (f, f)_\omega$$

Siempre va a ser posible construir una sucesión $(p_n)_n$ de **polinomios** tal que $\deg p_n = n$ y que sean **ortogonales (PO)** con respecto al producto escalar $(\cdot, \cdot)_\omega$: aplicando Gram-Schmidt al sistema generador y l.i. $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$

$$(p_n, p_m)_\omega = \int_{\mathcal{S}} p_n(x)p_m(x)\omega(x)dx = \|p_n\|_\omega^2 \delta_{nm}, \quad n, m \geq 0$$

En particular siempre se tiene que $(p_n, q)_\omega = 0$ para $q \in \mathbb{P}_{n-1}$.

Propiedad (Raíces de PO): siempre son reales, simples y están dentro de \mathcal{S} . Además los ceros de p_{n+1} se entrelazan con los de p_n .

RELACIÓN DE RECURRENCIA

Entre las propiedades más importantes de PO es que siempre verifican una ecuación en diferencias de segundo orden o **relación de recurrencia a tres términos** de la forma ($p_{-1} = 0, p_0 = 1$)

$$xp_n(x) = a_n p_{n+1}(x) + b_n p_n(x) + c_n p_{n-1}(x), \quad n \geq 0$$

donde

$$a_n = \frac{(xp_n, p_{n+1})_\omega}{(p_{n+1}, p_{n+1})_\omega}, \quad b_n = \frac{(xp_n, p_n)_\omega}{(p_n, p_n)_\omega}, \quad c_n = \frac{(xp_n, p_{n-1})_\omega}{(p_{n-1}, p_{n-1})_\omega}$$

Esta relación de recurrencia es equivalente a que los PO $(p_n)_n$ son **autofunciones** de un **operador de Jacobi** (tridiagonal) en el espacio $\ell^2_\pi(\mathbb{N})$

$$Jp = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & & & \\ c_1 & b_1 & a_1 & & \\ & c_2 & b_2 & a_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0(x) \\ p_1(x) \\ p_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} p_0(x) \\ p_1(x) \\ p_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = xp, \quad x \in \mathcal{S}$$

Teorema espectral (Favard): hay una correspondencia biyectiva entre operadores de Jacobi tridiagonales J y medidas positivas ω soportadas en \mathcal{S} .

RELACIÓN DE RECURRENCIA

Entre las propiedades más importantes de PO es que siempre verifican una ecuación en diferencias de segundo orden o **relación de recurrencia a tres términos** de la forma ($p_{-1} = 0, p_0 = 1$)

$$xp_n(x) = a_n p_{n+1}(x) + b_n p_n(x) + c_n p_{n-1}(x), \quad n \geq 0$$

donde

$$a_n = \frac{(xp_n, p_{n+1})_\omega}{(p_{n+1}, p_{n+1})_\omega}, \quad b_n = \frac{(xp_n, p_n)_\omega}{(p_n, p_n)_\omega}, \quad c_n = \frac{(xp_n, p_{n-1})_\omega}{(p_{n-1}, p_{n-1})_\omega}$$

Esta relación de recurrencia es equivalente a que los PO $(p_n)_n$ son **autofunciones** de un **operador de Jacobi** (tridiagonal) en el espacio $\ell_\pi^2(\mathbb{N})$

$$Jp = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & & & \\ c_1 & b_1 & a_1 & & \\ & c_2 & b_2 & a_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0(x) \\ p_1(x) \\ p_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} p_0(x) \\ p_1(x) \\ p_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = xp, \quad x \in \mathcal{S}$$

Teorema espectral (Favard): hay una correspondencia biyectiva entre operadores de Jacobi tridiagonales J y medidas positivas ω soportadas en \mathcal{S} .

RELACIÓN DE RECURRENCIA

Entre las propiedades más importantes de PO es que siempre verifican una ecuación en diferencias de segundo orden o **relación de recurrencia a tres términos** de la forma ($p_{-1} = 0, p_0 = 1$)

$$xp_n(x) = a_n p_{n+1}(x) + b_n p_n(x) + c_n p_{n-1}(x), \quad n \geq 0$$

donde

$$a_n = \frac{(xp_n, p_{n+1})_\omega}{(p_{n+1}, p_{n+1})_\omega}, \quad b_n = \frac{(xp_n, p_n)_\omega}{(p_n, p_n)_\omega}, \quad c_n = \frac{(xp_n, p_{n-1})_\omega}{(p_{n-1}, p_{n-1})_\omega}$$

Esta relación de recurrencia es equivalente a que los PO $(p_n)_n$ son **autofunciones** de un **operador de Jacobi** (tridiagonal) en el espacio $\ell^2_\pi(\mathbb{N})$

$$Jp = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & & & \\ c_1 & b_1 & a_1 & & \\ & c_2 & b_2 & a_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0(x) \\ p_1(x) \\ p_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} p_0(x) \\ p_1(x) \\ p_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = xp, \quad x \in \mathcal{S}$$

Teorema espectral (Favard): hay una correspondencia biyectiva entre operadores de Jacobi tridiagonales J y medidas positivas ω soportadas en \mathcal{S} .

ECUACIONES DIFERENCIALES

Entre todas las familias de PO existen unas pocas que tienen especial importancia. Estas verifican normalmente una **propiedad extra**.

Bochner (1929) (Routh (1884)): caracterizar $(p_n)_n$ verificando

$$dp_n \equiv f_2(x)p_n''(x) + f_1(x)p_n'(x) = \lambda_n p_n(x)$$

donde $\deg f_2 \leq 2$ y $\deg f_1 = 1$ (lleva polinomios en polinomios).

Esto es equivalente a la **simetría** (autoadjunto) del operador diferencial de segundo orden

$$d = f_2(x) \frac{d^2}{dx^2} + f_1(x) \frac{d}{dx}$$

con respecto al producto escalar $(\cdot, \cdot)_\omega$, i.e.

$$(dp, q)_\omega = (p, dq)_\omega, \quad n, m \geq 0, \quad p, q \in \mathbb{P}$$

La relación entre los coeficientes del operador diferencial d y la medida ω viene dada por la denominada **ecuación de Pearson**

$$(f_2(x)\omega(x))' = f_1(x)\omega(x)$$

más ciertas condiciones de contorno.

ECUACIONES DIFERENCIALES

Entre todas las familias de PO existen unas pocas que tienen especial importancia. Estas verifican normalmente una **propiedad extra**.

Bochner (1929) (Routh (1884)): caracterizar $(p_n)_n$ verificando

$$dp_n \equiv f_2(x)p_n''(x) + f_1(x)p_n'(x) = \lambda_n p_n(x)$$

donde $\deg f_2 \leq 2$ y $\deg f_1 = 1$ (lleva polinomios en polinomios).

Esto es equivalente a la **simetría** (autoadjunto) del operador diferencial de segundo orden

$$d = f_2(x) \frac{d^2}{dx^2} + f_1(x) \frac{d}{dx}$$

con respecto al producto escalar $(\cdot, \cdot)_\omega$, i.e.

$$(dp, q)_\omega = (p, dq)_\omega, \quad n, m \geq 0, \quad p, q \in \mathbb{P}$$

La relación entre los coeficientes del operador diferencial d y la medida ω viene dada por la denominada **ecuación de Pearson**

$$(f_2(x)\omega(x))' = f_1(x)\omega(x)$$

más ciertas condiciones de contorno.

ECUACIONES DIFERENCIALES

Entre todas las familias de PO existen unas pocas que tienen especial importancia. Estas verifican normalmente una **propiedad extra**.

Bochner (1929) (Routh (1884)): caracterizar $(p_n)_n$ verificando

$$dp_n \equiv f_2(x)p_n''(x) + f_1(x)p_n'(x) = \lambda_n p_n(x)$$

donde $\deg f_2 \leq 2$ y $\deg f_1 = 1$ (lleva polinomios en polinomios).

Esto es equivalente a la **simetría** (autoadjunto) del operador diferencial de segundo orden

$$d = f_2(x) \frac{d^2}{dx^2} + f_1(x) \frac{d}{dx}$$

con respecto al producto escalar $(\cdot, \cdot)_\omega$, i.e.

$$(dp, q)_\omega = (p, dq)_\omega, \quad n, m \geq 0, \quad p, q \in \mathbb{P}$$

La relación entre los coeficientes del operador diferencial d y la medida ω viene dada por la denominada **ecuación de Pearson**

$$(f_2(x)\omega(x))' = f_1(x)\omega(x)$$

más ciertas condiciones de contorno.

ECUACIONES DIFERENCIALES

Entre todas las familias de PO existen unas pocas que tienen especial importancia. Estas verifican normalmente una **propiedad extra**.

Bochner (1929) (Routh (1884)): caracterizar $(p_n)_n$ verificando

$$dp_n \equiv f_2(x)p_n''(x) + f_1(x)p_n'(x) = \lambda_n p_n(x)$$

donde $\deg f_2 \leq 2$ y $\deg f_1 = 1$ (lleva polinomios en polinomios).

Esto es equivalente a la **simetría** (autoadjunto) del operador diferencial de segundo orden

$$d = f_2(x) \frac{d^2}{dx^2} + f_1(x) \frac{d}{dx}$$

con respecto al producto escalar $(\cdot, \cdot)_\omega$, i.e.

$$(dp, q)_\omega = (p, dq)_\omega, \quad n, m \geq 0, \quad p, q \in \mathbb{P}$$

La relación entre los coeficientes del operador diferencial d y la medida ω viene dada por la denominada **ecuación de Pearson**

$$(f_2(x)\omega(x))' = f_1(x)\omega(x)$$

más ciertas condiciones de contorno.

FAMILIAS CLÁSICAS

Hermite: $f_2(x) = 1, \omega(x) = e^{-x^2}, x \in \mathbb{R}$:

$$H_n(x)'' - 2xH_n(x)' = -2nH_n(x)$$

Laguerre: $f_2(x) = x, \omega(x) = x^\alpha e^{-x}, \alpha > -1, x \in [0, \infty)$:

$$xL_n^\alpha(x)'' + (\alpha + 1 - x)L_n^\alpha(x)' = -nL_n^\alpha(x)$$

Jacobi: $f_2(x) = 1 - x^2, \omega(x) = (1 - x)^\alpha(1 + x)^\beta, x \in [-1, 1]$:

$$(1 - x^2)P_n^{(\alpha, \beta)}(x)'' + (\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x)P_n^{(\alpha, \beta)}(x)' = -n(n + \alpha + \beta + 1)P_n^{(\alpha, \beta)}(x), \quad \alpha, \beta > -1$$

Otra manera de escribir esta última ecuación diferencial es

$$y''(x) + \left(\frac{\alpha + 1}{x - 1} + \frac{\beta + 1}{x + 1} \right) y'(x) = \lambda_n \frac{y(x)}{1 - x^2}, \quad \lambda_n = n(n + \alpha + \beta + 1)$$

FAMILIAS CLÁSICAS

Hermite: $f_2(x) = 1, \omega(x) = e^{-x^2}, x \in \mathbb{R}$:

$$H_n(x)'' - 2xH_n(x)' = -2nH_n(x)$$

Laguerre: $f_2(x) = x, \omega(x) = x^\alpha e^{-x}, \alpha > -1, x \in [0, \infty)$:

$$xL_n^\alpha(x)'' + (\alpha + 1 - x)L_n^\alpha(x)' = -nL_n^\alpha(x)$$

Jacobi: $f_2(x) = 1 - x^2, \omega(x) = (1 - x)^\alpha(1 + x)^\beta, x \in [-1, 1]$:

$$(1 - x^2)P_n^{(\alpha, \beta)}(x)'' + (\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x)P_n^{(\alpha, \beta)}(x)' = -n(n + \alpha + \beta + 1)P_n^{(\alpha, \beta)}(x), \quad \alpha, \beta > -1$$

Otra manera de escribir esta última ecuación diferencial es

$$y''(x) + \left(\frac{\alpha + 1}{x - 1} + \frac{\beta + 1}{x + 1} \right) y'(x) = \lambda_n \frac{y(x)}{1 - x^2}, \quad \lambda_n = n(n + \alpha + \beta + 1)$$

FAMILIAS CLÁSICAS

Hermite: $f_2(x) = 1, \omega(x) = e^{-x^2}, x \in \mathbb{R}$:

$$H_n(x)'' - 2xH_n(x)' = -2nH_n(x)$$

Laguerre: $f_2(x) = x, \omega(x) = x^\alpha e^{-x}, \alpha > -1, x \in [0, \infty)$:

$$xL_n^\alpha(x)'' + (\alpha + 1 - x)L_n^\alpha(x)' = -nL_n^\alpha(x)$$

Jacobi: $f_2(x) = 1 - x^2, \omega(x) = (1 - x)^\alpha(1 + x)^\beta, x \in [-1, 1]$:

$$(1 - x^2)P_n^{(\alpha, \beta)}(x)'' + (\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x)P_n^{(\alpha, \beta)}(x)' = -n(n + \alpha + \beta + 1)P_n^{(\alpha, \beta)}(x), \quad \alpha, \beta > -1$$

Otra manera de escribir esta última ecuación diferencial es

$$y''(x) + \left(\frac{\alpha + 1}{x - 1} + \frac{\beta + 1}{x + 1} \right) y'(x) = \lambda_n \frac{y(x)}{1 - x^2}, \quad \lambda_n = n(n + \alpha + \beta + 1)$$

POLINOMIOS DE CHEBYSHEV

Los **polinomios de Chebyshev de primera especie** $T_n(x)$ son polinomios de Jacobi para $\alpha = \beta = -1/2$, i.e.

$$\int_{-1}^1 T_n(x) T_m(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} 0 & : n \neq m \\ \pi & : n = m = 0 \\ \pi/2 & : n = m \neq 0 \end{cases}$$

Poseen una **definición trigonométrica** (fórmula de Moivre):

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta), \quad n \geq 0.$$

Tienen las siguientes propiedades

$$2xT_n(x) = T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x), \quad T_1(x) = x, \quad T_0(x) = 1, \\ (1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0, \quad n \geq 0.$$

De la definición geométrica se tiene que las **raíces** de $T_n(x)$ son

$$x_k = \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{2k-1}{n}\right), \quad k = 1, \dots, n$$

POLINOMIOS DE CHEBYSHEV

Los **polinomios de Chebyshev de primera especie** $T_n(x)$ son polinomios de Jacobi para $\alpha = \beta = -1/2$, i.e.

$$\int_{-1}^1 T_n(x) T_m(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} 0 & : n \neq m \\ \pi & : n = m = 0 \\ \pi/2 & : n = m \neq 0 \end{cases}$$

Poseen una **definición trigonométrica** (fórmula de Moivre):

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta), \quad n \geq 0.$$

Tienen las siguientes propiedades

$$2xT_n(x) = T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x), \quad T_1(x) = x, \quad T_0(x) = 1, \\ (1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0, \quad n \geq 0.$$

De la definición geométrica se tiene que las **raíces** de $T_n(x)$ son

$$x_k = \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{2k-1}{n}\right), \quad k = 1, \dots, n$$

POLINOMIOS DE CHEBYSHEV

Los **polinomios de Chebyshev de primera especie** $T_n(x)$ son polinomios de Jacobi para $\alpha = \beta = -1/2$, i.e.

$$\int_{-1}^1 T_n(x) T_m(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} 0 & : n \neq m \\ \pi & : n = m = 0 \\ \pi/2 & : n = m \neq 0 \end{cases}$$

Poseen una **definición trigonométrica** (fórmula de Moivre):

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta), \quad n \geq 0.$$

Tienen las siguientes propiedades

$$2xT_n(x) = T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x), \quad T_1(x) = x, \quad T_0(x) = 1, \\ (1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2 T_n(x) = 0, \quad n \geq 0.$$

De la definición geométrica se tiene que las **raíces** de $T_n(x)$ son

$$x_k = \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{2k-1}{n}\right), \quad k = 1, \dots, n$$

POLINOMIOS DE CHEBYSHEV

Los **polinomios de Chebyshev de primera especie** $T_n(x)$ son polinomios de Jacobi para $\alpha = \beta = -1/2$, i.e.

$$\int_{-1}^1 T_n(x) T_m(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} 0 & : n \neq m \\ \pi & : n = m = 0 \\ \pi/2 & : n = m \neq 0 \end{cases}$$

Poseen una **definición trigonométrica** (fórmula de Moivre):

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta), \quad n \geq 0.$$

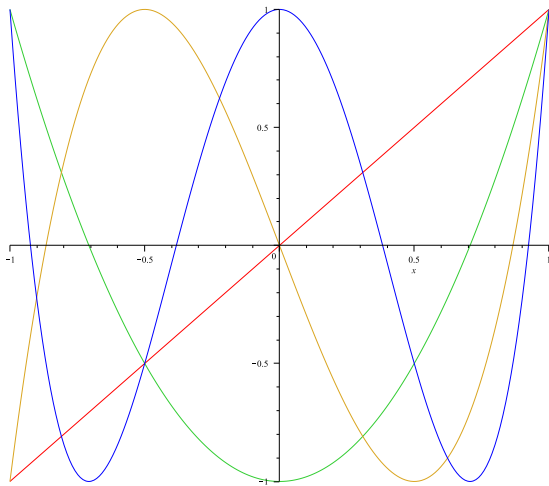
Tienen las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} 2xT_n(x) &= T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x), & T_1(x) &= x, & T_0(x) &= 1, \\ (1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) &= 0, & n &\geq 0. \end{aligned}$$

De la definición geométrica se tiene que las **raíces** de $T_n(x)$ son

$$x_k = \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{2k-1}{n}\right), \quad k = 1, \dots, n$$

POLINOMIOS DE CHEBYSHEV



POLINOMIOS DE CHEBYSHEV

Los **polinomios de Chebyshev de segunda especie** $U_n(x)$ son polinomios de Jacobi para $\alpha = \beta = 1/2$, i.e.

$$\int_{-1}^1 U_n(x)U_m(x) \sqrt{1-x^2} dx = \begin{cases} 0 & : n \neq m \\ \pi/2 & : n = m \end{cases}$$

Poseen una **definición trigonométrica**:

$$U_n(\cos \theta) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta}, \quad \theta = \arccos x, \quad n \geq 0.$$

Tienen las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} 2xU_n(x) &= U_{n+1}(x) + U_{n-1}(x), & U_1(x) &= 2x, & U_0(x) &= 1, \\ (1-x^2)U_n''(x) - 3xU_n'(x) + n(n+2)U_n(x) &= 0, & n &\geq 0. \end{aligned}$$

De la definición geométrica se tiene que las **raíces** de $U_n(x)$ son

$$x_k = \cos\left(\pi \frac{k}{n+1}\right), \quad k = 1, \dots, n$$

POLINOMIOS DE CHEBYSHEV

Los **polinomios de Chebyshev de segunda especie** $U_n(x)$ son polinomios de Jacobi para $\alpha = \beta = 1/2$, i.e.

$$\int_{-1}^1 U_n(x)U_m(x) \sqrt{1-x^2} dx = \begin{cases} 0 & : n \neq m \\ \pi/2 & : n = m \end{cases}$$

Poseen una **definición trigonométrica**:

$$U_n(\cos \theta) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta}, \quad \theta = \arccos x, \quad n \geq 0.$$

Tienen las siguientes propiedades

$$2xU_n(x) = U_{n+1}(x) + U_{n-1}(x), \quad U_1(x) = 2x, \quad U_0(x) = 1, \\ (1-x^2)U_n''(x) - 3xU_n'(x) + n(n+2)U_n(x) = 0, \quad n \geq 0.$$

De la definición geométrica se tiene que las **raíces** de $U_n(x)$ son

$$x_k = \cos \left(\pi \frac{k}{n+1} \right), \quad k = 1, \dots, n$$

POLINOMIOS DE CHEBYSHEV

Los **polinomios de Chebyshev de segunda especie** $U_n(x)$ son polinomios de Jacobi para $\alpha = \beta = 1/2$, i.e.

$$\int_{-1}^1 U_n(x)U_m(x) \sqrt{1-x^2} dx = \begin{cases} 0 & : n \neq m \\ \pi/2 & : n = m \end{cases}$$

Poseen una **definición trigonométrica**:

$$U_n(\cos \theta) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta}, \quad \theta = \arccos x, \quad n \geq 0.$$

Tienen las siguientes propiedades

$$2xU_n(x) = U_{n+1}(x) + U_{n-1}(x), \quad U_1(x) = 2x, \quad U_0(x) = 1, \\ (1-x^2)U_n''(x) - 3xU_n'(x) + n(n+2)U_n(x) = 0, \quad n \geq 0.$$

De la definición geométrica se tiene que las **raíces** de $U_n(x)$ son

$$x_k = \cos \left(\pi \frac{k}{n+1} \right), \quad k = 1, \dots, n$$

POLINOMIOS DE CHEBYSHEV

Los **polinomios de Chebyshev de segunda especie** $U_n(x)$ son polinomios de Jacobi para $\alpha = \beta = 1/2$, i.e.

$$\int_{-1}^1 U_n(x)U_m(x) \sqrt{1-x^2} dx = \begin{cases} 0 & : n \neq m \\ \pi/2 & : n = m \end{cases}$$

Poseen una **definición trigonométrica**:

$$U_n(\cos \theta) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta}, \quad \theta = \arccos x, \quad n \geq 0.$$

Tienen las siguientes propiedades

$$2xU_n(x) = U_{n+1}(x) + U_{n-1}(x), \quad U_1(x) = 2x, \quad U_0(x) = 1, \\ (1-x^2)U_n''(x) - 3xU_n'(x) + n(n+2)U_n(x) = 0, \quad n \geq 0.$$

De la definición geométrica se tiene que las **raíces** de $U_n(x)$ son

$$x_k = \cos\left(\pi \frac{k}{n+1}\right), \quad k = 1, \dots, n$$

ÍNDICE

1 PRELIMINARES

2 FÓRMULAS DE CUADRATURA DE GAUSS

3 EQUILIBRIO ELECTROSTÁTICO

4 CAMINATAS ALEATORIAS

FÓRMULA DE CUADRATURA

Sea f continua y ω un peso positivo definidos en $[-1, 1]$. Nos gustaría obtener la mejor aproximación posible de la integral

$$I_\omega(f) = \int_{-1}^1 f(x)\omega(x)dx$$

mediante la búsqueda de $n + 1$ **nodos discretos** x_0, x_1, \dots, x_n dentro del intervalo $[-1, 1]$ tal que (**fórmula de cuadratura**)

$$I_\omega(f) \approx I_{n,\omega}(f) = \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x_i)$$

Si $I_\omega(p) - I_{n,\omega}(p) = 0$ para cualquier $p \in \mathbb{P}_r$ se dice que la fórmula de cuadratura tiene **grado de exactitud** igual a r . Por ejemplo, para un conjunto de nodos x_0, x_1, \dots, x_n , el *polinomio interpolador de Lagrange*

$$L(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j)l_j(x), \quad l_j(x) = \prod_{i \neq j} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}, \quad j = 0, 1, \dots, n$$

tiene grado de exactitud igual a n .

Q: ¿Existe alguna configuración de los nodos x_0, x_1, \dots, x_n , tal que el grado de exactitud es mayor que n ?

FÓRMULA DE CUADRATURA

Sea f continua y ω un peso positivo definidos en $[-1, 1]$. Nos gustaría obtener la mejor aproximación posible de la integral

$$I_\omega(f) = \int_{-1}^1 f(x)\omega(x)dx$$

mediante la búsqueda de $n + 1$ **nodos discretos** x_0, x_1, \dots, x_n dentro del intervalo $[-1, 1]$ tal que (**fórmula de cuadratura**)

$$I_\omega(f) \approx I_{n,\omega}(f) = \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x_i)$$

Si $I_\omega(p) - I_{n,\omega}(p) = 0$ para cualquier $p \in \mathbb{P}_r$ se dice que la fórmula de cuadratura tiene **grado de exactitud** igual a r . Por ejemplo, para un conjunto de nodos x_0, x_1, \dots, x_n , el *polinomio interpolador de Lagrange*

$$L(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j)l_j(x), \quad l_j(x) = \prod_{i \neq j} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}, \quad j = 0, 1, \dots, n$$

tiene grado de exactitud igual a n .

Q: ¿Existe alguna configuración de los nodos x_0, x_1, \dots, x_n , tal que el grado de exactitudes mayor que n ?

FÓRMULA DE CUADRATURA

Sea f continua y ω un peso positivo definidos en $[-1, 1]$. Nos gustaría obtener la mejor aproximación posible de la integral

$$I_\omega(f) = \int_{-1}^1 f(x)\omega(x)dx$$

mediante la búsqueda de $n + 1$ **nodos discretos** x_0, x_1, \dots, x_n dentro del intervalo $[-1, 1]$ tal que (**fórmula de cuadratura**)

$$I_\omega(f) \approx I_{n,\omega}(f) = \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x_i)$$

Si $I_\omega(p) - I_{n,\omega}(p) = 0$ para cualquier $p \in \mathbb{P}_r$ se dice que la fórmula de cuadratura tiene **grado de exactitud** igual a r . Por ejemplo, para un conjunto de nodos x_0, x_1, \dots, x_n , el *polinomio interpolador de Lagrange*

$$L(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j)l_j(x), \quad l_j(x) = \prod_{i \neq j} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}, \quad j = 0, 1, \dots, n$$

tiene grado de exactitud igual a n .

Q: ¿Existe alguna configuración de los nodos x_0, x_1, \dots, x_n , tal que el grado de exactitud es mayor que n ?

TEOREMA

Sea $w_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$. La fórmula de cuadratura $I_{n,\omega}(f)$ tiene grado de exactitud igual a $n + m$ si y sólo si

$$\int_{-1}^1 w_{n+1}(x) p(x) \omega(x) dx = 0, \quad p \in \mathbb{P}_{m-1}. \quad (1)$$

d. Para $f \in \mathbb{P}_{n+m}$ escribimos $f = w_{n+1}\pi_{m-1} + q_n$ con $\pi_{m-1} \in \mathbb{P}_{m-1}$ y $q_n \in \mathbb{P}_n$. Entonces $f(x_i) = q_n(x_i)$. Como el grado de exactitud de la fórmula de cuadratura es al menos n para polinomios de grado n se tiene

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i q_n(x_i) = \int_{-1}^1 q_n(x) \omega(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) \omega(x) dx - \int_{-1}^1 w_{n+1}(x) \pi_{m-1}(x) \omega(x) dx$$

Por lo tanto $I_\omega(f) = I_{n,\omega}(f)$ para cualquier $f \in \mathbb{P}_{n+m}$.

- El grado máximo de exactitud es para $m = n + 1$, i.e. $2n + 1$.
- Para $m = n + 1$ la condición (1) implica que w_{n+1} es el PO (mónico) de grado $n + 1$ con respecto al peso ω . Por lo tanto

Nodos de la cuadratura de Gauss

Los nodos x_0, x_1, \dots, x_n , de la fórmula de cuadratura vienen dados por los ceros o raíces del polinomio ortogonal p_{n+1} con respecto a ω .

TEOREMA

Sea $w_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$. La fórmula de cuadratura $I_{n,\omega}(f)$ tiene grado de exactitud igual a $n + m$ si y sólo si

$$\int_{-1}^1 w_{n+1}(x)p(x)\omega(x)dx = 0, \quad p \in \mathbb{P}_{m-1}. \quad (1)$$

d. Para $f \in \mathbb{P}_{n+m}$ escribimos $f = w_{n+1}\pi_{m-1} + q_n$ con $\pi_{m-1} \in \mathbb{P}_{m-1}$ y $q_n \in \mathbb{P}_n$. Entonces $f(x_i) = q_n(x_i)$. Como el grado de exactitud de la fórmula de cuadratura es al menos n para polinomios de grado n se tiene

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i q_n(x_i) = \int_{-1}^1 q_n(x)\omega(x)dx = \int_{-1}^1 f(x)\omega(x)dx - \int_{-1}^1 w_{n+1}(x)\pi_{m-1}(x)\omega(x)dx$$

Por lo tanto $I_\omega(f) = I_{n,\omega}(f)$ para cualquier $f \in \mathbb{P}_{n+m}$.

- El grado máximo de exactitud es para $m = n + 1$, i.e. $2n + 1$.
- Para $m = n + 1$ la condición (1) implica que w_{n+1} es el PO (mónico) de grado $n + 1$ con respecto al peso ω . Por lo tanto

Los nodos x_0, x_1, \dots, x_n , de la fórmula de cuadratura vienen dados por los ceros o raíces del polinomio ortogonal p_{n+1} con respecto a ω .

TEOREMA

Sea $w_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$. La fórmula de cuadratura $I_{n,\omega}(f)$ tiene grado de exactitud igual a $n + m$ si y sólo si

$$\int_{-1}^1 w_{n+1}(x) p(x) \omega(x) dx = 0, \quad p \in \mathbb{P}_{m-1}. \quad (1)$$

d. Para $f \in \mathbb{P}_{n+m}$ escribimos $f = w_{n+1}\pi_{m-1} + q_n$ con $\pi_{m-1} \in \mathbb{P}_{m-1}$ y $q_n \in \mathbb{P}_n$. Entonces $f(x_i) = q_n(x_i)$. Como el grado de exactitud de la fórmula de cuadratura es al menos n para polinomios de grado n se tiene

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i q_n(x_i) = \int_{-1}^1 q_n(x) \omega(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) \omega(x) dx - \int_{-1}^1 w_{n+1}(x) \pi_{m-1}(x) \omega(x) dx$$

Por lo tanto $I_\omega(f) = I_{n,\omega}(f)$ para cualquier $f \in \mathbb{P}_{n+m}$.

- El grado **máximo** de exactitud es para $m = n + 1$, i.e. $2n + 1$.
- Para $m = n + 1$ la condición (1) implica que w_{n+1} es el PO (mónico) de grado $n + 1$ con respecto al peso ω . Por lo tanto

FÓRMULA DE CUADRATURA DE GAUSS

Los nodos x_0, x_1, \dots, x_n , de la fórmula de cuadratura vienen dados por los ceros o raíces del polinomio ortogonal p_{n+1} con respecto a ω .

TEOREMA

Sea $w_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$. La fórmula de cuadratura $I_{n,\omega}(f)$ tiene grado de exactitud igual a $n + m$ si y sólo si

$$\int_{-1}^1 w_{n+1}(x) p(x) \omega(x) dx = 0, \quad p \in \mathbb{P}_{m-1}. \quad (1)$$

d. Para $f \in \mathbb{P}_{n+m}$ escribimos $f = w_{n+1}\pi_{m-1} + q_n$ con $\pi_{m-1} \in \mathbb{P}_{m-1}$ y $q_n \in \mathbb{P}_n$. Entonces $f(x_i) = q_n(x_i)$. Como el grado de exactitud de la fórmula de cuadratura es al menos n para polinomios de grado n se tiene

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i q_n(x_i) = \int_{-1}^1 q_n(x) \omega(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) \omega(x) dx - \int_{-1}^1 w_{n+1}(x) \pi_{m-1}(x) \omega(x) dx$$

Por lo tanto $I_\omega(f) = I_{n,\omega}(f)$ para cualquier $f \in \mathbb{P}_{n+m}$.

- El grado **máximo** de exactitud es para $m = n + 1$, i.e. $2n + 1$.
- Para $m = n + 1$ la condición (1) implica que w_{n+1} es el PO (mónico) de grado $n + 1$ con respecto al peso ω . Por lo tanto

FÓRMULA DE CUADRATURA DE GAUSS

Los nodos x_0, x_1, \dots, x_n , de la fórmula de cuadratura vienen dados por los ceros o raíces del polinomio ortogonal p_{n+1} con respecto a ω .

EJEMPLO: POLINOMIOS DE CHEBYSHEV

Sea $\omega(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$. Ya sabemos que los PO $T_n(x)$ son los **polinomios de Chebyshev de primer tipo**. Sus ceros o raíces vienen dados por (ordenados)

$$x_j = -\cos \frac{\pi(2j+1)}{2(n+1)}, \quad j = 0, 1, \dots, n$$

En este caso los coeficientes α_i son constantes y vienen dados por

$$\alpha_i = \frac{\pi}{n+1}, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

Para cualquier función continua f en $[-1, 1]$ se tiene que la **mejor aproximación** posible de la integral ponderada si tomamos $n+1$ nodos viene dada por

$$I_\omega(f) = \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \frac{\pi}{n+1} \sum_{i=0}^n f\left(-\cos \frac{\pi(2i+1)}{2(n+1)}\right)$$

Es posible conseguir fórmulas de cuadratura (de **Gauss-Lobato**) cuando se incluyen en los nodos los extremos -1 y 1 . En ese caso los nodos interiores son los ceros del polinomio $T'_n(x)$.

EJEMPLO: POLINOMIOS DE CHEBYSHEV

Sea $\omega(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$. Ya sabemos que los PO $T_n(x)$ son los **polinomios de Chebyshev de primer tipo**. Sus ceros o raíces vienen dados por (ordenados)

$$x_j = -\cos \frac{\pi(2j+1)}{2(n+1)}, \quad j = 0, 1, \dots, n$$

En este caso los coeficientes α_i son constantes y vienen dados por

$$\alpha_i = \frac{\pi}{n+1}, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

Para cualquier función continua f en $[-1, 1]$ se tiene que la **mejor aproximación** posible de la integral ponderada si tomamos $n+1$ nodos viene dada por

$$I_\omega(f) = \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \frac{\pi}{n+1} \sum_{i=0}^n f\left(-\cos \frac{\pi(2i+1)}{2(n+1)}\right)$$

Es posible conseguir fórmulas de cuadratura (de **Gauss-Lobato**) cuando se incluyen en los nodos los extremos -1 y 1 . En ese caso los nodos interiores son los ceros del polinomio $T'_n(x)$.

EJEMPLO: POLINOMIOS DE CHEBYSHEV

Sea $\omega(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$. Ya sabemos que los PO $T_n(x)$ son los **polinomios de Chebyshev de primer tipo**. Sus ceros o raíces vienen dados por (ordenados)

$$x_j = -\cos \frac{\pi(2j+1)}{2(n+1)}, \quad j = 0, 1, \dots, n$$

En este caso los coeficientes α_i son constantes y vienen dados por

$$\alpha_i = \frac{\pi}{n+1}, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

Para cualquier función continua f en $[-1, 1]$ se tiene que la **mejor aproximación** posible de la integral ponderada si tomamos $n+1$ nodos viene dada por

$$I_\omega(f) = \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \frac{\pi}{n+1} \sum_{i=0}^n f\left(-\cos \frac{\pi(2i+1)}{2(n+1)}\right)$$

Es posible conseguir fórmulas de cuadratura (de **Gauss-Lobato**) cuando se incluyen en los nodos los extremos -1 y 1 . En ese caso los nodos interiores son los ceros del polinomio $T'_n(x)$.

ÍNDICE

- 1 PRELIMINARES
- 2 FÓRMULAS DE CUADRATURA DE GAUSS
- 3 EQUILIBRIO ELECTROSTÁTICO
- 4 CAMINATAS ALEATORIAS

EXPERIMENTO ELECTROSTÁTICO

Se considera una barra de longitud 2 y llamamos -1 y 1 a sus extremos

- En cada uno de los extremos ponemos una carga positiva **fija** de masa $(\beta + 1)/2$ y $(\alpha + 1)/2$ respectivamente, $\alpha, \beta > -1$.
- Ahora se colocan **n cargas positivas** de masa 1 a lo largo del segmento $[-1, 1]$ en las posiciones iniciales x_1, \dots, x_n con $-1 < x_1 < \dots < x_n < 1$.
- Dejamos que se muevan las cargas **libremente**.

Como la fuerza es inversamente proporcional a la distancia relativa (1D), la energía total del sistema $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ tiene dos componentes, una de la interacción de las cargas internas y otra de la interacción con las cargas fijas en los extremos. Por lo tanto

$$E(X) = E_m(X) + \sum_{k=1}^n \varphi(x_k)$$

donde

$$E_m(X) = - \sum_{1 \leq k < j \leq n} \log |x_k - x_j|, \quad \varphi(x) = -\frac{\beta+1}{2} \log |x+1| - \frac{\alpha+1}{2} \log |x-1|$$

Q: ¿Cuáles son las posiciones de equilibrio $X^* = \{x_1^*, \dots, x_n^*\}$ del sistema que hacen que la energía $E(X)$ sea mínima?

EXPERIMENTO ELECTROSTÁTICO

Se considera una barra de longitud 2 y llamamos -1 y 1 a sus extremos

- En cada uno de los extremos ponemos una carga positiva **fija** de masa $(\beta + 1)/2$ y $(\alpha + 1)/2$ respectivamente, $\alpha, \beta > -1$.
- Ahora se colocan n **cargas positivas** de masa 1 a lo largo del segmento $[-1, 1]$ en las posiciones iniciales x_1, \dots, x_n con $-1 < x_1 < \dots < x_n < 1$.
- Dejamos que se muevan las cargas **libremente**.

Como la fuerza es inversamente proporcional a la distancia relativa (1D), la energía total del sistema $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ tiene dos componentes, una de la interacción de las cargas internas y otra de la interacción con las cargas fijas en los extremos. Por lo tanto

$$E(X) = E_m(X) + \sum_{k=1}^n \varphi(x_k)$$

donde

$$E_m(X) = - \sum_{1 \leq k < j \leq n} \log |x_k - x_j|, \quad \varphi(x) = -\frac{\beta+1}{2} \log |x+1| - \frac{\alpha+1}{2} \log |x-1|$$

Q: ¿Cuáles son las posiciones de equilibrio $X^* = \{x_1^*, \dots, x_n^*\}$ del sistema que hacen que la energía $E(X)$ sea mínima?

EXPERIMENTO ELECTROSTÁTICO

Se considera una barra de longitud 2 y llamamos -1 y 1 a sus extremos

- En cada uno de los extremos ponemos una carga positiva **fija** de masa $(\beta + 1)/2$ y $(\alpha + 1)/2$ respectivamente, $\alpha, \beta > -1$.
- Ahora se colocan **n cargas positivas** de masa 1 a lo largo del segmento $[-1, 1]$ en las posiciones iniciales x_1, \dots, x_n con $-1 < x_1 < \dots < x_n < 1$.
- Dejamos que se muevan las cargas **libremente**.

Como la fuerza es inversamente proporcional a la distancia relativa (1D), la energía total del sistema $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ tiene dos componentes, una de la interacción de las cargas internas y otra de la interacción con las cargas fijas en los extremos. Por lo tanto

$$E(X) = E_m(X) + \sum_{k=1}^n \varphi(x_k)$$

donde

$$E_m(X) = - \sum_{1 \leq k < j \leq n} \log |x_k - x_j|, \quad \varphi(x) = -\frac{\beta+1}{2} \log |x+1| - \frac{\alpha+1}{2} \log |x-1|$$

Q: ¿Cuáles son las posiciones de equilibrio $X^* = \{x_1^*, \dots, x_n^*\}$ del sistema que hacen que la energía $E(X)$ sea mínima?

EXPERIMENTO ELECTROSTÁTICO

Se considera una barra de longitud 2 y llamamos -1 y 1 a sus extremos

- En cada uno de los extremos ponemos una carga positiva **fija** de masa $(\beta + 1)/2$ y $(\alpha + 1)/2$ respectivamente, $\alpha, \beta > -1$.
- Ahora se colocan **n cargas positivas** de masa 1 a lo largo del segmento $[-1, 1]$ en las posiciones iniciales x_1, \dots, x_n con $-1 < x_1 < \dots < x_n < 1$.
- Dejamos que se muevan las cargas **libremente**.

Como la fuerza es inversamente proporcional a la distancia relativa (1D), la energía total del sistema $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ tiene dos componentes, una de la interacción de las cargas internas y otra de la interacción con las cargas fijas en los extremos. Por lo tanto

$$E(X) = E_m(X) + \sum_{k=1}^n \varphi(x_k)$$

donde

$$E_m(X) = - \sum_{1 \leq k < j \leq n} \log |x_k - x_j|, \quad \varphi(x) = -\frac{\beta+1}{2} \log |x+1| - \frac{\alpha+1}{2} \log |x-1|$$

Q: ¿Cuáles son las posiciones de equilibrio $X^* = \{x_1^*, \dots, x_n^*\}$ del sistema que hacen que la energía $E(X)$ sea mínima?

EXPERIMENTO ELECTROSTÁTICO

Se considera una barra de longitud 2 y llamamos -1 y 1 a sus extremos

- En cada uno de los extremos ponemos una carga positiva **fija** de masa $(\beta + 1)/2$ y $(\alpha + 1)/2$ respectivamente, $\alpha, \beta > -1$.
- Ahora se colocan n **cargas positivas** de masa 1 a lo largo del segmento $[-1, 1]$ en las posiciones iniciales x_1, \dots, x_n con $-1 < x_1 < \dots < x_n < 1$.
- Dejamos que se muevan las cargas **libremente**.

Como la fuerza es inversamente proporcional a la distancia relativa (1D), la energía total del sistema $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ tiene dos componentes, una de la interacción de las cargas internas y otra de la interacción con las cargas fijas en los extremos. Por lo tanto

$$E(X) = E_m(X) + \sum_{k=1}^n \varphi(x_k)$$

donde

$$E_m(X) = - \sum_{1 \leq k < j \leq n} \log |x_k - x_j|, \quad \varphi(x) = -\frac{\beta + 1}{2} \log |x + 1| - \frac{\alpha + 1}{2} \log |x - 1|$$

Q: ¿Cuáles son las posiciones de equilibrio $X^* = \{x_1^*, \dots, x_n^*\}$ del sistema que hacen que la energía $E(X)$ sea mínima?

EXPERIMENTO ELECTROSTÁTICO

Se considera una barra de longitud 2 y llamamos -1 y 1 a sus extremos

- En cada uno de los extremos ponemos una carga positiva **fija** de masa $(\beta + 1)/2$ y $(\alpha + 1)/2$ respectivamente, $\alpha, \beta > -1$.
- Ahora se colocan n **cargas positivas** de masa 1 a lo largo del segmento $[-1, 1]$ en las posiciones iniciales x_1, \dots, x_n con $-1 < x_1 < \dots < x_n < 1$.
- Dejamos que se muevan las cargas **libremente**.

Como la fuerza es inversamente proporcional a la distancia relativa ($1D$), la energía total del sistema $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ tiene dos componentes, una de la interacción de las cargas internas y otra de la interacción con las cargas fijas en los extremos. Por lo tanto

$$E(X) = E_m(X) + \sum_{k=1}^n \varphi(x_k)$$

donde

$$E_m(X) = - \sum_{1 \leq k < j \leq n} \log |x_k - x_j|, \quad \varphi(x) = -\frac{\beta + 1}{2} \log |x + 1| - \frac{\alpha + 1}{2} \log |x - 1|$$

Q: ¿Cuáles son las posiciones de equilibrio $X^* = \{x_1^*, \dots, x_n^*\}$ del sistema que hacen que la energía $E(X)$ sea mínima?

TEOREMA

Sea $X^* = \{x_1^*, \dots, x_n^*\}$ las posiciones de equilibrio del problema electrostático. Entonces $x_k^*, k = 1, \dots, n$, son los ceros o raíces del polinomio ortogonal de Jacobi $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$.

d. Si X^* es la configuración del mínimo de energía se debe tener que $\frac{\partial}{\partial x_k} E(X) \Big|_{X=X^*} = 0, k = 1, \dots, n$. Sea $y(x) = \prod_{j=1}^n (x - x_j^*)$. Se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial x_k} E_m(X) \Big|_{X=X^*} = - \sum_{1 \leq j \leq n, j \neq k} \frac{1}{x_k^* - x_j^*} = - \frac{y''(x_k^*)}{2y'(x_k^*)}$$

$$\varphi'(x_k^*) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\beta + 1}{x_k^* + 1} + \frac{\alpha + 1}{x_k^* - 1} \right)$$

Por lo tanto $\frac{\partial}{\partial x_k} E(X) \Big|_{X=X^*} = 0$ si y sólo si $y''(x_k^*) - 2\varphi'(x_k^*)y'(x_k^*) = 0$.

Esta ecuación diferencial se identifica con la de Jacobi y por lo tanto debe ser igual a $\lambda_n y(x_k^*) / (1 - (x_k^*)^2)$. Para que sea 0 debe implicar que x_k^* coincida con un cero o raíz del polinomio de Jacobi $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$.

TEOREMA

Sea $X^* = \{x_1^*, \dots, x_n^*\}$ las posiciones de equilibrio del problema electrostático. Entonces $x_k^*, k = 1, \dots, n$, son los ceros o raíces del polinomio ortogonal de Jacobi $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$.

d. Si X^* es la configuración del mínimo de energía se debe tener que $\frac{\partial}{\partial x_k} E(X) \Big|_{X=X^*} = 0, k = 1, \dots, n$. Sea $y(x) = \prod_{j=1}^n (x - x_j^*)$. Se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial x_k} E_m(X) \Big|_{X=X^*} = - \sum_{1 \leq j \leq n, j \neq k} \frac{1}{x_k^* - x_j^*} = - \frac{y''(x_k^*)}{2y'(x_k^*)}$$

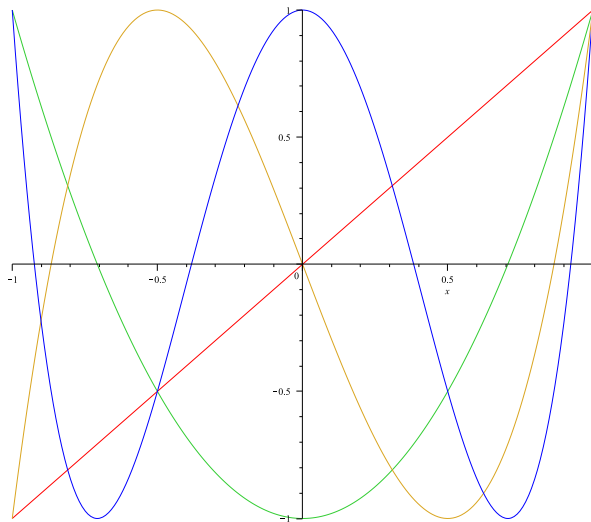
$$\varphi'(x_k^*) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\beta + 1}{x_k^* + 1} + \frac{\alpha + 1}{x_k^* - 1} \right)$$

Por lo tanto $\frac{\partial}{\partial x_k} E(X) \Big|_{X=X^*} = 0$ si y sólo si $y''(x_k^*) - 2\varphi'(x_k^*)y'(x_k^*) = 0$.

Esta ecuación diferencial se identifica con la de Jacobi y por lo tanto debe ser igual a $\lambda_n y(x_k^*) / (1 - (x_k^*)^2)$. Para que sea 0 debe implicar que x_k^* coincida con un cero o raíz del polinomio de Jacobi $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$.

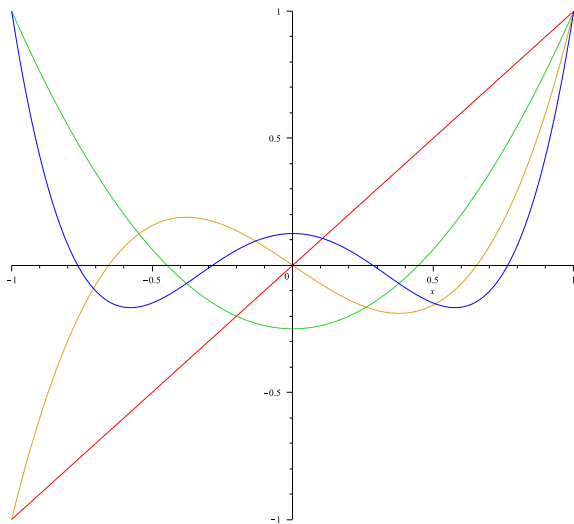
EJEMPLOS

$$\alpha = \beta = -1/2$$



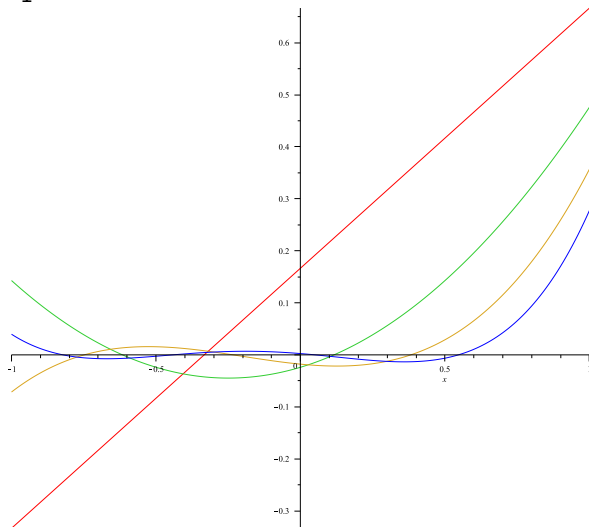
EJEMPLOS

$$\alpha = \beta = 1$$



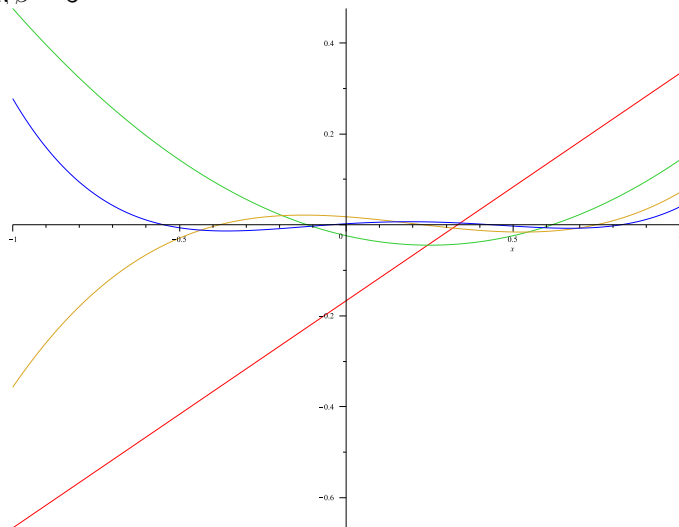
EJEMPLOS

$$\alpha = 3, \beta = 1$$



EJEMPLOS

$$\alpha = 1, \beta = 3$$



ÍNDICE

- 1 PRELIMINARES
- 2 FÓRMULAS DE CUADRATURA DE GAUSS
- 3 EQUILIBRIO ELECTROSTÁTICO
- 4 CAMINATAS ALEATORIAS

CAMINATAS ALEATORIAS EN \mathbb{N}

Las **caminatas aleatorias** son cadenas de Markov $\{X_n : n \geq 0\}$ cuyas transiciones posibles sólo son entre estados **adyacentes** o vecinos, i.e. para todo par de estados $i, j \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) = \begin{cases} p_n, & \text{si } i = j + 1 \\ r_n, & \text{si } i = j \\ q_n, & \text{si } i = j - 1 \\ 0, & \text{si } |i - j| > 1 \end{cases}$$

Las cadenas de Markov se suelen representar mediante una **matriz de transición de probabilidades** P , donde en cada entrada (i, j) aparece la probabilidad de ir del estado i al estado j en una unidad de tiempo. Para el caso de la caminata aleatoria, P es **tridiagonal** (semi-infinita), i.e.

$$P = \begin{pmatrix} r_0 & p_0 & 0 & & \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad r_i \geq 0, p_i, q_i > 0, \quad p_i + r_i + q_i = 1$$

P con esas propiedades es una **matriz estocástica**. En el contexto de PO, P es una **matriz de Jacobi** y por lo tanto lleva asociada una medida positiva 

CAMINATAS ALEATORIAS EN \mathbb{N}

Las **caminatas aleatorias** son cadenas de Markov $\{X_n : n \geq 0\}$ cuyas transiciones posibles sólo son entre estados **adyacentes** o vecinos, i.e. para todo par de estados $i, j \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) = \begin{cases} p_n, & \text{si } i = j + 1 \\ r_n, & \text{si } i = j \\ q_n, & \text{si } i = j - 1 \\ 0, & \text{si } |i - j| > 1 \end{cases}$$

Las cadenas de Markov se suelen representar mediante una **matriz de transición de probabilidades** P , donde en cada entrada (i, j) aparece la probabilidad de ir del estado i al estado j en una unidad de tiempo. Para el caso de la caminata aleatoria, P es **tridiagonal** (semi-infinita), i.e.

$$P = \begin{pmatrix} r_0 & p_0 & 0 & & \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad r_i \geq 0, p_i, q_i > 0, \quad p_i + r_i + q_i = 1$$

P con esas propiedades es una **matriz estocástica**. En el contexto de PO, P es una **matriz de Jacobi** y por lo tanto lleva asociada una **medida positiva** 


CAMINATAS ALEATORIAS EN \mathbb{N}

Las **caminatas aleatorias** son cadenas de Markov $\{X_n : n \geq 0\}$ cuyas transiciones posibles sólo son entre estados **adyacentes** o vecinos, i.e. para todo par de estados $i, j \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) = \begin{cases} p_n, & \text{si } i = j + 1 \\ r_n, & \text{si } i = j \\ q_n, & \text{si } i = j - 1 \\ 0, & \text{si } |i - j| > 1 \end{cases}$$

Las cadenas de Markov se suelen representar mediante una **matriz de transición de probabilidades** P , donde en cada entrada (i, j) aparece la probabilidad de ir del estado i al estado j en una unidad de tiempo. Para el caso de la caminata aleatoria, P es **tridiagonal** (semi-infinita), i.e.

$$P = \begin{pmatrix} r_0 & p_0 & 0 & & \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad r_i \geq 0, p_i, q_i > 0, \quad p_i + r_i + q_i = 1$$

P con esas propiedades es una **matriz estocástica**. En el contexto de PO, P es una **matriz de Jacobi** y por lo tanto lleva asociada una medida positiva ω 

Para $x \in \mathbb{R}$ construimos un vector $Q = (Q_0(x), Q_1(x), \dots)$ tal que

$$PQ = xQ$$

Normalizando a $Q_0(x) = 1$ se observa que $Q_n(x)$ es un polinomio en x de grado exactamente n y que verifican una **relación de recurrencia a tres términos**

$$xQ_n(x) = q_n Q_{n-1}(x) + r_n Q_n(x) + p_n Q_{n+1}(x), \quad n \geq 0, \quad Q_{-1}(x) = 0$$

El **Teorema Espectral** asegura que hay una correspondencia **biyectiva** entre operadores tridiagonales (como P) autoadjuntos y acotados (en norma 1) en $\ell^2_{\pi}(\mathbb{N})$ y medidas positivas $d\omega(x)$ en \mathbb{R} con soporte $[-1, 1]$.

REPRESENTACIÓN DE KARLIN-McGREGOR

Se tiene la siguiente representación integral de P^n

$$P_{ij}^n = \mathbb{P}(X_n = j | X_0 = i) = \pi_j \int_{-1}^1 x^n Q_i(x) Q_j(x) d\omega(x)$$

Además $\pi_j = \left(\int_{-1}^1 Q_j(x)^2 d\omega(x) \right)^{-1}$ y la familia de polinomios $(Q_n)_n$ es ortogonal con respecto a $d\omega$ y completa en el espacio $L^2_{\omega}([-1, 1])$.

Con esta representación se pueden estudiar muchos aspectos probabilísticos del proceso, como la **recurrencia** o la **medida invariante** asociada a la caminata aleatoria

Para $x \in \mathbb{R}$ construimos un vector $Q = (Q_0(x), Q_1(x), \dots)$ tal que

$$PQ = xQ$$

Normalizando a $Q_0(x) = 1$ se observa que $Q_n(x)$ es un polinomio en x de grado exactamente n y que verifican una **relación de recurrencia a tres términos**

$$xQ_n(x) = q_n Q_{n-1}(x) + r_n Q_n(x) + p_n Q_{n+1}(x), \quad n \geq 0, \quad Q_{-1}(x) = 0$$

El **Teorema Espectral** asegura que hay una correspondencia **biyectiva** entre operadores tridiagonales (como P) autoadjuntos y acotados (en norma 1) en $\ell^2_{\pi}(\mathbb{N})$ y medidas positivas $d\omega(x)$ en \mathbb{R} con soporte $[-1, 1]$.

REPRESENTACIÓN DE KARLIN-McGREGOR

Se tiene la siguiente representación integral de P^n

$$P_{ij}^n = \mathbb{P}(X_n = j | X_0 = i) = \pi_j \int_{-1}^1 x^n Q_i(x) Q_j(x) d\omega(x)$$

Además $\pi_j = \left(\int_{-1}^1 Q_j(x)^2 d\omega(x) \right)^{-1}$ y la familia de polinomios $(Q_n)_n$ es ortogonal con respecto a $d\omega$ y completa en el espacio $L^2_{\omega}([-1, 1])$.

Con esta representación se pueden estudiar muchos aspectos probabilísticos del proceso, como la **recurrencia** o la **medida invariante** asociada a la caminata aleatoria

Para $x \in \mathbb{R}$ construimos un vector $Q = (Q_0(x), Q_1(x), \dots)$ tal que

$$PQ = xQ$$

Normalizando a $Q_0(x) = 1$ se observa que $Q_n(x)$ es un polinomio en x de grado exactamente n y que verifican una **relación de recurrencia a tres términos**

$$xQ_n(x) = q_n Q_{n-1}(x) + r_n Q_n(x) + p_n Q_{n+1}(x), \quad n \geq 0, \quad Q_{-1}(x) = 0$$

El **Teorema Espectral** asegura que hay una correspondencia **biyectiva** entre operadores tridiagonales (como P) autoadjuntos y acotados (en norma 1) en $\ell^2(\mathbb{N})$ y medidas positivas $d\omega(x)$ en \mathbb{R} con soporte $[-1, 1]$.

REPRESENTACIÓN DE KARLIN-McGREGOR

Se tiene la siguiente representación integral de P^n

$$P_{ij}^n = \mathbb{P}(X_n = j | X_0 = i) = \pi_j \int_{-1}^1 x^n Q_i(x) Q_j(x) d\omega(x)$$

Además $\pi_j = \left(\int_{-1}^1 Q_j(x)^2 d\omega(x) \right)^{-1}$ y la familia de polinomios $(Q_n)_n$ es ortogonal con respecto a $d\omega$ y completa en el espacio $L^2_\omega([-1, 1])$.

Con esta representación se pueden estudiar muchos aspectos probabilísticos del proceso, como la **recurrencia** o la **medida invariante** asociada a la caminata aleatoria

Para $x \in \mathbb{R}$ construimos un vector $Q = (Q_0(x), Q_1(x), \dots)$ tal que

$$PQ = xQ$$

Normalizando a $Q_0(x) = 1$ se observa que $Q_n(x)$ es un polinomio en x de grado exactamente n y que verifican una **relación de recurrencia a tres términos**

$$xQ_n(x) = q_n Q_{n-1}(x) + r_n Q_n(x) + p_n Q_{n+1}(x), \quad n \geq 0, \quad Q_{-1}(x) = 0$$

El **Teorema Espectral** asegura que hay una correspondencia **biyectiva** entre operadores tridiagonales (como P) autoadjuntos y acotados (en norma 1) en $\ell^2(\mathbb{N})$ y medidas positivas $d\omega(x)$ en \mathbb{R} con soporte $[-1, 1]$.

REPRESENTACIÓN DE KARLIN-McGREGOR

Se tiene la siguiente representación integral de P^n

$$P_{ij}^n = \mathbb{P}(X_n = j | X_0 = i) = \pi_j \int_{-1}^1 x^n Q_i(x) Q_j(x) d\omega(x)$$

Además $\pi_j = \left(\int_{-1}^1 Q_j(x)^2 d\omega(x) \right)^{-1}$ y la familia de polinomios $(Q_n)_n$ es ortogonal con respecto a $d\omega$ y completa en el espacio $L^2_\omega([-1, 1])$.

Con esta representación se pueden estudiar muchos aspectos probabilísticos del proceso, como la **recurrencia** o la **medida invariante** asociada a la caminata aleatoria

Para $x \in \mathbb{R}$ construimos un vector $Q = (Q_0(x), Q_1(x), \dots)$ tal que

$$PQ = xQ$$

Normalizando a $Q_0(x) = 1$ se observa que $Q_n(x)$ es un polinomio en x de grado exactamente n y que verifican una **relación de recurrencia a tres términos**

$$xQ_n(x) = q_n Q_{n-1}(x) + r_n Q_n(x) + p_n Q_{n+1}(x), \quad n \geq 0, \quad Q_{-1}(x) = 0$$

El **Teorema Espectral** asegura que hay una correspondencia **biyectiva** entre operadores tridiagonales (como P) autoadjuntos y acotados (en norma 1) en $\ell^2(\mathbb{N})$ y medidas positivas $d\omega(x)$ en \mathbb{R} con soporte $[-1, 1]$.

REPRESENTACIÓN DE KARLIN-McGREGOR

Se tiene la siguiente representación integral de P^n

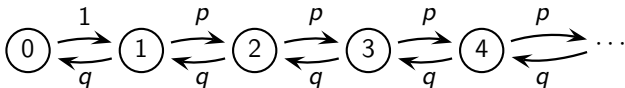
$$P_{ij}^n = \mathbb{P}(X_n = j | X_0 = i) = \pi_j \int_{-1}^1 x^n Q_i(x) Q_j(x) d\omega(x)$$

Además $\pi_j = \left(\int_{-1}^1 Q_j(x)^2 d\omega(x) \right)^{-1}$ y la familia de polinomios $(Q_n)_n$ es ortogonal con respecto a $d\omega$ y completa en el espacio $L^2_\omega([-1, 1])$.

Con esta representación se pueden estudiar muchos aspectos probabilísticos del proceso, como la **recurrencia** o la **medida invariante** asociada a la caminata aleatoria

EJEMPLO 1: BARRERA REPELENTE

Sea P con $p_0 = 1$ y $p_n = p, q_n = q, r_{n-1} = 0, n \geq 1$



En este caso la familia de polinomios $(Q_n)_n$ viene definida por

$$Q_n(x) = \left(\frac{q}{p}\right)^{n/2} \left[(2 - 2p)T_n\left(\frac{x}{2\sqrt{pq}}\right) + (2p - 1)U_n\left(\frac{x}{2\sqrt{pq}}\right) \right]$$

donde $(T_n)_n$ y $(U_n)_n$ son los **polinomios de Chebyshev** de 1a y 2a especie.

Ahora la medida ψ depende del valor de p . Si $p \geq 1/2$ entonces

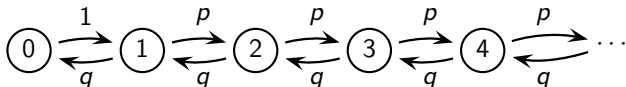
$$d\psi(x) = \frac{\sqrt{4pq - x^2}}{1 - x^2} dx, \quad |x| < 2\sqrt{pq}$$

mientras que si $p < 1/2$

$$d\psi(x) = \frac{\sqrt{4pq - x^2}}{1 - x^2} dx + 2(1 - 2p)\pi [\delta_{-1}(x) + \delta_1(x)], \quad |x| < 2\sqrt{pq}$$

EJEMPLO 1: BARRERA REPELENTE

Sea P con $p_0 = 1$ y $p_n = p, q_n = q, r_{n-1} = 0, n \geq 1$



En este caso la familia de polinomios $(Q_n)_n$ viene definida por

$$Q_n(x) = \left(\frac{q}{p}\right)^{n/2} \left[(2 - 2p)T_n\left(\frac{x}{2\sqrt{pq}}\right) + (2p - 1)U_n\left(\frac{x}{2\sqrt{pq}}\right) \right]$$

donde $(T_n)_n$ y $(U_n)_n$ son los **polinomios de Chebyshev** de 1a y 2a especie.

Ahora la medida ψ depende del valor de p . Si $p \geq 1/2$ entonces

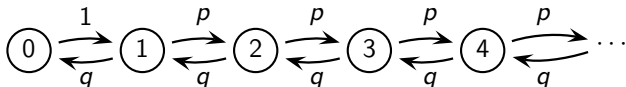
$$d\psi(x) = \frac{\sqrt{4pq - x^2}}{1 - x^2} dx, \quad |x| < 2\sqrt{pq}$$

mientras que si $p < 1/2$

$$d\psi(x) = \frac{\sqrt{4pq - x^2}}{1 - x^2} dx + 2(1 - 2p)\pi [\delta_{-1}(x) + \delta_1(x)], \quad |x| < 2\sqrt{pq}$$

EJEMPLO 1: BARRERA REPELENTE

Sea P con $p_0 = 1$ y $p_n = p, q_n = q, r_{n-1} = 0, n \geq 1$



En este caso la familia de polinomios $(Q_n)_n$ viene definida por

$$Q_n(x) = \left(\frac{q}{p}\right)^{n/2} \left[(2 - 2p)T_n\left(\frac{x}{2\sqrt{pq}}\right) + (2p - 1)U_n\left(\frac{x}{2\sqrt{pq}}\right) \right]$$

donde $(T_n)_n$ y $(U_n)_n$ son los **polinomios de Chebyshev** de 1a y 2a especie.

Ahora la medida ψ depende del valor de p . Si $p \geq 1/2$ entonces

$$d\psi(x) = \frac{\sqrt{4pq - x^2}}{1 - x^2} dx, \quad |x| < 2\sqrt{pq}$$

mientras que si $p < 1/2$

$$d\psi(x) = \frac{\sqrt{4pq - x^2}}{1 - x^2} dx + 2(1 - 2p)\pi [\delta_{-1}(x) + \delta_1(x)], \quad |x| < 2\sqrt{pq}$$

OTRAS APLICACIONES

- **Teoría de operadores:** operadores de Jacobi, Hankel, Toeplitz.
- **Fracciones continuas.**
- **Teoría de representación grupos:** funciones esféricas.
- **Mecánica cuántica:** oscilador armónico cuántico, átomo de hidrógeno, etc.
- **Análisis armónico:** funciones de Hermite.
- **Procesos estocásticos:** cadenas de Markov de nacimiento y muerte, procesos de difusión, caminatas aleatorias cuánticas.
- **Matrices aleatorias.**
- ...

Los principales **problemas abiertos** tienen que ver con extensiones de PO a otros dominios que no sean necesariamente intervalos continuos reales (ortogonalidad multivariada, matricial, múltiple, de tipo Sobolev, en el círculo unidad, etc.)

OTRAS APLICACIONES

- **Teoría de operadores:** operadores de Jacobi, Hankel, Toeplitz.
- **Fracciones continuas.**
- **Teoría de representación grupos:** funciones esféricas.
- **Mecánica cuántica:** oscilador armónico cuántico, átomo de hidrógeno, etc.
- **Análisis armónico:** funciones de Hermite.
- **Procesos estocásticos:** cadenas de Markov de nacimiento y muerte, procesos de difusión, caminatas aleatorias cuánticas.
- **Matrices aleatorias.**
- ...

Los principales **problemas abiertos** tienen que ver con extensiones de PO a otros dominios que no sean necesariamente intervalos continuos reales (ortogonalidad multivariada, matricial, múltiple, de tipo Sobolev, en el círculo unidad, etc.)