Biespectralidad de polinomios definidos mediante un determinante de tipo Casorati

Manuel Domínguez de la Iglesia

Instituto de Matemáticas, CU, UNAM

II Escuela de Análisis Matemático
IMATE-UNAM, 1 de agosto de 2018

ÍNDICE

ÍNDICE

1. El problema biespectral

1.1 La transformación de Darboux

1.2 Soluciones en términos de Wronskianos

ÍNDICE

1. El problema biespectral

1.1 La transformación de Darboux

1.2 Soluciones en términos de Wronskianos

2. $\mathcal{D}$-operadores

2.1 Soluciones en términos de determinantes de Casorati

2.2 Ejemplos: Charlier (discreto) y Laguerre (continuo)

EL PROBLEMA BIESPECTRAL

Dado un operador diferencial de la forma

$$L = \sum_{j=0}^{l} L_j(x)\partial_x^j, \quad \partial_x = \frac{d}{dx}$$

se pretende encontrar una familia no trivial de autofunciones $\phi(x, \lambda)$, i.e.

$$(L\phi)(x, \lambda) = \lambda\phi(x, \lambda)$$

y que *al mismo tiempo* sean autofunciones de un operador diferencial de la forma

$$A = \sum_{r=0}^{m} A_r(\lambda)\partial_\lambda^r, \quad \partial_\lambda = \frac{d}{d\lambda}$$

i.e.

$$(A\phi)(x, \lambda) = \Theta(x)\phi(x, \lambda)$$

donde el autovalor $\Theta(x)$ dependa de x.

EL PROBLEMA BIESPECTRAL

Dado un operador diferencial de la forma

$$L = \sum_{j=0}^{l} L_j(x)\partial_x^j, \quad \partial_x = \frac{d}{dx}$$

se pretende encontrar una familia no trivial de autofunciones $\phi(x, \lambda)$, i.e.

$$(L\phi)(x, \lambda) = \lambda\phi(x, \lambda)$$

y que *al mismo tiempo* sean autofunciones de un operador diferencial de la forma

$$A = \sum_{r=0}^{m} A_r(\lambda)\partial_\lambda^r, \quad \partial_\lambda = \frac{d}{d\lambda}$$

i.e.

$$(A\phi)(x, \lambda) = \Theta(x)\phi(x, \lambda)$$

donde el autovalor $\Theta(x)$ dependa de x.

En ese caso se dice que el problema biespectral (continuo-continuo) tiene solución de orden (l, m).

EL PROBLEMA BIESPECTRAL

Dado un operador diferencial de la forma

$$L = \sum_{j=0}^{l} L_j(x)\partial_x^j, \quad \partial_x = \frac{d}{dx}$$

se pretende encontrar una familia no trivial de autofunciones $\phi(x, \lambda)$, i.e.

$$(L\phi)(x, \lambda) = \lambda\phi(x, \lambda)$$

y que *al mismo tiempo* sean autofunciones de un operador diferencial de la forma

$$A = \sum_{r=0}^{m} A_r(\lambda)\partial_\lambda^r, \quad \partial_\lambda = \frac{d}{d\lambda}$$

i.e.

$$(A\phi)(x, \lambda) = \Theta(x)\phi(x, \lambda)$$

donde el autovalor $\Theta(x)$ dependa de x.

En ese caso se dice que el problema biespectral (continuo-continuo) tiene solución de orden (l, m).

El problema tiene su origen en aplicaciones tan variadas como tomografía, procesamiento de señales o matrices aleatorias, aunque muchas de las funciones especiales más conocidas tienen esta propiedad para ciertos valores de l y m.

TRANSFORMACIÓN DE DARBOUX

En [Duistermaat-Grünbaum, 1986] se dio una respuesta completa a esta pregunta para el caso en el que L es un operador de orden 2 y que se puede escribir en la forma usual de Schrödinger

$$L = \partial_x^2 + V(x)$$

donde $V(x)$ es cierto potencial.

TRANSFORMACIÓN DE DARBOUX

En [Duistermaat-Grünbaum, 1986] se dio una respuesta completa a esta pregunta para el caso en el que L es un operador de orden 2 y que se puede escribir en la forma usual de Schrödinger

$$L = \partial_x^2 + V(x)$$

donde $V(x)$ es cierto potencial.

La respuesta al problema biespectral está basada en la transformación de Darboux, que fue introducida en 1882 por el propio Darboux, aunque el mismo Darboux dio crédito a Moutard (1875).

TRANSFORMACIÓN DE DARBOUX

En [Duistermaat-Grünbaum, 1986] se dio una respuesta completa a esta pregunta para el caso en el que L es un operador de orden 2 y que se puede escribir en la forma usual de Schrödinger

$$L = \partial_x^2 + V(x)$$

donde $V(x)$ es cierto potencial.

La respuesta al problema biespectral está basada en la transformación de Darboux, que fue introducida en 1882 por el propio Darboux, aunque el mismo Darboux dio crédito a Moutard (1875).

¿En qué consiste la transformación de Darboux?

Es un mapeo simultáneo de soluciones y coeficientes de un par de ecuaciones diferenciales o en diferencias que tienen la misma forma. Conociendo una transformación de Darboux podemos encontrar o construir soluciones de ecuaciones conociendo una solución trivial.

TRANSFORMACIÓN DE DARBOUX

¿En qué consiste la transformación de Darboux?

Es un mapeo simultáneo de soluciones y coeficientes de un par de ecuaciones diferenciales o en diferencias que tienen la misma forma. Conociendo una transformación de Darboux podemos encontrar o construir soluciones de ecuaciones conociendo una solución trivial.

Sea $L_0 = \partial_x^2 + V_0(x)$ y ϕ_{α_1} una autofunción de L_0 con autovalor α_1, i.e. $L_0\phi_{\alpha_1} = \alpha_1\phi_{\alpha_1}$. Se factoriza $L_0 - \alpha_1$ de la forma

$$L_0 - \alpha_1 = P_0 Q_0 = \left(\partial_x + \frac{\phi'_{\alpha_1}}{\phi_{\alpha_1}}\right) \circ \left(\partial_x - \frac{\phi'_{\alpha_1}}{\phi_{\alpha_1}}\right)$$

TRANSFORMACIÓN DE DARBOUX

¿En qué consiste la transformación de Darboux?

Es un mapeo simultáneo de soluciones y coeficientes de un par de ecuaciones diferenciales o en diferencias que tienen la misma forma. Conociendo una transformación de Darboux podemos encontrar o construir soluciones de ecuaciones conociendo una solución trivial.

Sea $L_0 = \partial_x^2 + V_0(x)$ y ϕ_{α_1} una autofunción de L_0 con autovalor α_1, i.e. $L_0\phi_{\alpha_1} = \alpha_1\phi_{\alpha_1}$. Se factoriza $L_0 - \alpha_1$ de la forma

$$L_0 - \alpha_1 = P_0 Q_0 = \left(\partial_x + \frac{\phi'_{\alpha_1}}{\phi_{\alpha_1}}\right) \circ \left(\partial_x - \frac{\phi'_{\alpha_1}}{\phi_{\alpha_1}}\right)$$

La transformación de Darboux de L_0 es un nuevo operador L_1 que se obtiene invirtiendo el orden de multiplicación de los factores, i.e.

$$L_1 = Q_0 P_0 + \alpha_1 = \partial_x^2 + V_1(x), \quad V_1(x) = V_0(x) + 2\left(\frac{\phi'_{\alpha_1}}{\phi_{\alpha_1}}\right)'$$

TRANSFORMACIÓN DE DARBOUX

¿En qué consiste la transformación de Darboux?

Es un mapeo simultáneo de soluciones y coeficientes de un par de ecuaciones diferenciales o en diferencias que tienen la misma forma. Conociendo una transformación de Darboux podemos encontrar o construir soluciones de ecuaciones conociendo una solución trivial.

Sea $L_0 = \partial_x^2 + V_0(x)$ y ϕ_{α_1} una autofunción de L_0 con autovalor α_1, i.e. $L_0\phi_{\alpha_1} = \alpha_1\phi_{\alpha_1}$. Se factoriza $L_0 - \alpha_1$ de la forma

$$L_0 - \alpha_1 = P_0 Q_0 = \left(\partial_x + \frac{\phi'_{\alpha_1}}{\phi_{\alpha_1}}\right) \circ \left(\partial_x - \frac{\phi'_{\alpha_1}}{\phi_{\alpha_1}}\right)$$

La transformación de Darboux de L_0 es un nuevo operador L_1 que se obtiene invirtiendo el orden de multiplicación de los factores, i.e.

$$L_1 = Q_0 P_0 + \alpha_1 = \partial_x^2 + V_1(x), \quad V_1(x) = V_0(x) + 2\left(\frac{\phi'_{\alpha_1}}{\phi_{\alpha_1}}\right)'$$

Las autofunciones de L_1 se pueden hallar en términos de las anteriores. Si ϕ_λ es una autofunción de L_0 con autovalor λ entonces $\psi_\lambda = Q_0\phi_\lambda$ es una autofunción de L_1 con autovalor λ. En efecto

$$L_1 Q_0\phi_\lambda = (Q_0P_0 + \alpha_1)Q_0\phi_\lambda = Q_0(L_0 - \alpha_1)\phi_\lambda + \alpha_1 Q_0\phi_\lambda = Q_0 L_0\phi_\lambda = \lambda Q_0\phi_\lambda$$

TRANSFORMACIÓN DE DARBOUX

¿En qué consiste la transformación de Darboux?

Es un mapeo simultáneo de soluciones y coeficientes de un par de ecuaciones diferenciales o en diferencias que tienen la misma forma. Conociendo una transformación de Darboux podemos encontrar o construir soluciones de ecuaciones conociendo una solución trivial.

Sea $L_0 = \partial_x^2 + V_0(x)$ y ϕ_{α_1} una autofunción de L_0 con autovalor α_1, i.e. $L_0\phi_{\alpha_1} = \alpha_1\phi_{\alpha_1}$. Se factoriza $L_0 - \alpha_1$ de la forma

$$L_0 - \alpha_1 = P_0 Q_0 = \left(\partial_x + \frac{\phi'_{\alpha_1}}{\phi_{\alpha_1}}\right) \circ \left(\partial_x - \frac{\phi'_{\alpha_1}}{\phi_{\alpha_1}}\right)$$

La transformación de Darboux de L_0 es un nuevo operador L_1 que se obtiene invirtiendo el orden de multiplicación de los factores, i.e.

$$L_1 = Q_0 P_0 + \alpha_1 = \partial_x^2 + V_1(x), \quad V_1(x) = V_0(x) + 2\left(\frac{\phi'_{\alpha_1}}{\phi_{\alpha_1}}\right)'$$

Las autofunciones de L_1 se pueden hallar en términos de las anteriores. Si ϕ_λ es una autofunción de L_0 con autovalor λ entonces $\psi_\lambda = Q_0\phi_\lambda$ es una autofunción de L_1 con autovalor λ. En efecto

$$L_1 Q_0\phi_\lambda = (Q_0P_0 + \alpha_1)Q_0\phi_\lambda = Q_0(L_0 - \alpha_1)\phi_\lambda + \alpha_1 Q_0\phi_\lambda = Q_0 L_0\phi_\lambda = \lambda Q_0\phi_\lambda$$

Obsérvese que ψ_λ se puede escribir como

$$\psi_\lambda = Q_0\phi_\lambda = \frac{1}{\phi_{\alpha_1}}\begin{vmatrix} \phi_{\alpha_1} & \phi_\lambda \\ \phi'_{\alpha_1} & \phi'_\lambda \end{vmatrix} = \frac{W(\phi_{\alpha_1}, \phi_\lambda)}{W(\phi_{\alpha_1})}$$

donde $W(f_1, \ldots, f_m)$ es el *Wronskiano*.

ITERACIÓN DE TRANSFORMACIONES DE DARBOUX

Al nuevo operador L_1 le podemos aplicar la misma transformación de Darboux, tomando otra autofunción con otro autovalor cualquiera. Llamemos $L_1, L_2, \ldots, L_m$ a estos operadores. Por lo anterior, una autofunción de L_m con autovalor λ se puede escribir como

$$\psi_\lambda = (\partial_x + r_1)(\partial_x + r_2)\cdots(\partial_x + r_m)\phi_\lambda, \quad \text{donde} \quad L_0\phi_\lambda = \lambda\phi_\lambda$$

ITERACIÓN DE TRANSFORMACIONES DE DARBOUX

Al nuevo operador L_1 le podemos aplicar la misma transformación de Darboux, tomando otra autofunción con otro autovalor cualquiera. Llamemos $L_1, L_2, \ldots, L_m$ a estos operadores. Por lo anterior, una autofunción de L_m con autovalor λ se puede escribir como

$$\psi_\lambda = (\partial_x + r_1)(\partial_x + r_2)\cdots(\partial_x + r_m)\phi_\lambda, \quad \text{donde} \quad L_0\phi_\lambda = \lambda\phi_\lambda$$

La j-ésima vez que hacemos Darboux se hace con respecto a una autofunción de L_{j-1} de autovalor α_j, que a su vez se puede escribir en términos de ϕ_{α_j}, autofunción de L_0. Un simple proceso de inducción (usando propiedades de Wronskianos) nos permite obtener la llamada *fórmula de Crum*:

ITERACIÓN DE TRANSFORMACIONES DE DARBOUX

Al nuevo operador L_1 le podemos aplicar la misma transformación de Darboux, tomando otra autofunción con otro autovalor cualquiera. Llamemos $L_1, L_2, \ldots, L_m$ a estos operadores. Por lo anterior, una autofunción de L_m con autovalor λ se puede escribir como

$$\psi_\lambda = (\partial_x + r_1)(\partial_x + r_2)\cdots(\partial_x + r_m)\phi_\lambda, \quad \text{donde} \quad L_0\phi_\lambda = \lambda\phi_\lambda$$

La j-ésima vez que hacemos Darboux se hace con respecto a una autofunción de L_{j-1} de autovalor α_j, que a su vez se puede escribir en términos de ϕ_{α_j}, autofunción de L_0. Un simple proceso de inducción (usando propiedades de Wronskianos) nos permite obtener la llamada *fórmula de Crum*:

$$\psi_\lambda = \frac{W(\phi_{\alpha_1}, \ldots, \phi_{\alpha_m}, \phi_\lambda)}{W(\phi_{\alpha_1}, \ldots, \phi_{\alpha_m})}, \quad L_m\psi_\lambda = \lambda\psi_\lambda$$

donde

$$W(f_1, \ldots, f_m)(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_m(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_m'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(m-1)}(x) & f_2^{(m-1)}(x) & \cdots & f_m^{(m-1)}(x) \end{vmatrix}$$

CASO CONTINUO-CONTINUO (2,M)

CASO CONTINUO-CONTINUO (2,M)

Theorem 0.1. *The potentials V for which (0.1), (0.2) hold (for non-zero ϕ and A of positive order) are $V(x)=\alpha x+\beta$, $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$, $\alpha\neq 0$ (Airy) or $V(x)=\frac{c}{(x-a)^2}+b$, $a,b,c\in\mathbb{C}$ (Bessel) or, modulo a translation in x and adding a constant to V, those which can be obtained from $V=0$ or $V=-\frac{1}{4}\frac{1}{x^2}$ by finitely many rational Darboux transformations.*

CASO CONTINUO-CONTINUO (2,M)

Theorem 0.1. *The potentials V for which (0.1), (0.2) hold (for non-zero ϕ and A of positive order) are $V(x)=\alpha x+\beta$, $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$, $\alpha\neq 0$ (Airy) or $V(x)=\frac{c}{(x-a)^2}+b$, $a,b,c\in\mathbb{C}$ (Bessel) or, modulo a translation in x and adding a constant to V, those which can be obtained from $V=0$ or $V=-\frac{1}{4}\frac{1}{x^2}$ by finitely many rational Darboux transformations.*

En [Duistermaat-Grünbaum, 1986] prueban que el potencial V_0 deber ser racional y que Θ debe ser un polinomio de grado $\leq m$. La técnica que usan para resolver el problema es encontrar las soluciones de las llamadas *ad-conditions*, i.e.

$$(\mathrm{ad}L)^{m+1}(\Theta)=0, \quad (\mathrm{ad}P)(Q)=[P,Q]=PQ-QP$$

CASO CONTINUO-CONTINUO (2,M)

Theorem 0.1. *The potentials V for which (0.1), (0.2) hold (for non-zero ϕ and A of positive order) are $V(x)=\alpha x+\beta$, $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$, $\alpha\neq 0$ (Airy) or $V(x)=\frac{c}{(x-a)^2}+b$, $a,b,c\in\mathbb{C}$ (Bessel) or, modulo a translation in x and adding a constant to V, those which can be obtained from $V=0$ or $V=-\frac{1}{4}\frac{1}{x^2}$ by finitely many rational Darboux transformations.*

En [Duistermaat-Grünbaum, 1986] prueban que el potencial V_0 deber ser racional y que Θ debe ser un polinomio de grado $\leq m$. La técnica que usan para resolver el problema es encontrar las soluciones de las llamadas *ad-conditions*, i.e.

$$(\mathrm{ad}L)^{m+1}(\Theta)=0, \quad (\mathrm{ad}P)(Q)=[P,Q]=PQ-QP$$

Los diferentes casos son:

- Para $m=1$ se tiene que $V_0(x)$ es constante y $\deg\Theta\leq 1$. Son casos triviales.
- Para $m=2$ se tiene que $\deg\Theta\leq 2$. Hay dos casos:
  1. Si $\deg\Theta=2$ entonces $V_0(x)=\frac{c}{(x-a)^2}+b, a, b, c\in\mathbb{C}$ (Bessel).
  2. Si $\deg\Theta=1$ entonces $V_0(x)=\alpha x+\beta, \alpha,\beta\in\mathbb{C}, \alpha\neq 0$ (Airy).
- Para $m=3$ no hay nuevos potenciales.
- Para $m=4$ se descubrieron dos nuevos potenciales que corresponden al aplicar la transformación de Darboux una vez a los potenciales $V_0=0$ ó $V_0=-\frac{1}{4}\frac{1}{x^2}$.
- Para $m\geq 5$ todos los nuevos potenciales se obtienen después de aplicar un número finito de transformaciones de Darboux a los potenciales $V_0=0$ ó $V_0=-\frac{1}{4}\frac{1}{x^2}$.

PROBLEMA BIESPECTRAL: CASO DISCRETO-CONTINUO

Existe una versión discreta-continua del problema biespectral. Para una función $f_n(x)$ definimos el operador *shift* como $\mathfrak{S}_j^{(n)} f_n(x) = f_{n+j}(x)$ o $\mathfrak{S}_j^{(x)} f_n(x) = f_n(x+j)$, donde $j \in \mathbb{Z}$.

PROBLEMA BIESPECTRAL: CASO DISCRETO-CONTINUO

Existe una versión discreta-continua del problema biespectral. Para una función $f_n(x)$ definimos el operador *shift* como $\mathfrak{S}_j^{(n)} f_n(x) = f_{n+j}(x)$ o $\mathfrak{S}_j^{(x)} f_n(x) = f_n(x+j)$, donde $j \in \mathbb{Z}$.

El problema biespectral discreto-continuo de orden (l, m) consiste en encontrar un sistema de funciones $\phi_n(x)$, donde $n \in \mathbb{Z}$ y $x \in \mathbb{R}$, tales que que sean autofunciones de un operador en diferencias de orden $l = s - r$, i.e.

$$J = \sum_{j=r}^{s} d_j(n) \mathfrak{S}_j^{(n)}, \quad J\phi_n(x) = \sum_{j=r}^{s} d_j(n) \phi_{n+j}(x) = q(x)\phi_n(x)$$

y simultáneamente de un operador diferencial de orden m

$$A = \sum_{k=0}^{m} a_k(x) \partial_x^k, \quad A\phi_n(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k(x) \phi_n^{(k)}(x) = \lambda_n \phi_n(x)$$

PROBLEMA BIESPECTRAL: CASO DISCRETO-CONTINUO

Existe una versión discreta-continua del problema biespectral. Para una función $f_n(x)$ definimos el operador *shift* como $\mathfrak{S}_j^{(n)} f_n(x) = f_{n+j}(x)$ o $\mathfrak{S}_j^{(x)} f_n(x) = f_n(x+j)$, donde $j \in \mathbb{Z}$.

El problema biespectral discreto-continuo de orden (l, m) consiste en encontrar un sistema de funciones $\phi_n(x)$, donde $n \in \mathbb{Z}$ y $x \in \mathbb{R}$, tales que que sean autofunciones de un operador en diferencias de orden $l = s - r$, i.e.

$$J = \sum_{j=r}^{s} d_j(n) \mathfrak{S}_j^{(n)}, \quad J\phi_n(x) = \sum_{j=r}^{s} d_j(n) \phi_{n+j}(x) = q(x)\phi_n(x)$$

y simultáneamente de un operador diferencial de orden m

$$A = \sum_{k=0}^{m} a_k(x) \partial_x^k, \quad A\phi_n(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k(x) \phi_n^{(k)}(x) = \lambda_n \phi_n(x)$$

Existe, por último, una versión discreta-discreta del problema biespectral, donde el operador A se sustituye por otro operador en diferencias de orden $m = v - u$ de la forma

$$A = \sum_{i=u}^{v} a_i(x) \mathfrak{S}_i^{(x)}, \quad A\phi_n(x) = \sum_{i=u}^{v} a_i(x) \phi_n(x+i) = \lambda_n \phi_n(x)$$

PROBLEMA BIESPECTRAL: CASO DISCRETO-CONTINUO

Existe una versión discreta-continua del problema biespectral. Para una función $f_n(x)$ definimos el operador *shift* como $\mathfrak{S}_j^{(n)} f_n(x) = f_{n+j}(x)$ o $\mathfrak{S}_j^{(x)} f_n(x) = f_n(x+j)$, donde $j \in \mathbb{Z}$.

El problema biespectral discreto-continuo de orden (l, m) consiste en encontrar un sistema de funciones $\phi_n(x)$, donde $n \in \mathbb{Z}$ y $x \in \mathbb{R}$, tales que que sean autofunciones de un operador en diferencias de orden $l = s - r$, i.e.

$$J = \sum_{j=r}^{s} d_j(n) \mathfrak{S}_j^{(n)}, \quad J\phi_n(x) = \sum_{j=r}^{s} d_j(n) \phi_{n+j}(x) = q(x)\phi_n(x)$$

y simultáneamente de un operador diferencial de orden m

$$A = \sum_{k=0}^{m} a_k(x) \partial_x^k, \quad A\phi_n(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k(x) \phi_n^{(k)}(x) = \lambda_n \phi_n(x)$$

Existe, por último, una versión discreta-discreta del problema biespectral, donde el operador A se sustituye por otro operador en diferencias de orden $m = v - u$ de la forma

$$A = \sum_{i=u}^{v} a_i(x) \mathfrak{S}_i^{(x)}, \quad A\phi_n(x) = \sum_{i=u}^{v} a_i(x) \phi_n(x+i) = \lambda_n \phi_n(x)$$

IMPORTANTE: A partir de ahora nos centraremos en encontrar soluciones polinómicas del problema biespectral de tal manera que $\phi_n(x) = p_n(x)$ con $\deg p_n = n$. Además nos centraremos en operadores discretos donde $r = -s$ (o $u = -v$), en cuyo caso el orden l será siempre par y en operadores continuos cuyo orden m sea también par.

CASO DISCRETO-CONTINUO (2,2)

El caso biespectral discreto-continuo de orden $(2, 2)$ ya fue resuelto por S. Bochner en 1929.

CASO DISCRETO-CONTINUO (2,2)

El caso biespectral discreto-continuo de orden $(2, 2)$ ya fue resuelto por S. Bochner en 1929.

Samuel Bochner

Über Sturm-Liouvillesche Polynomsysteme.

Von

S. Bochner in München.

Wir betrachten irgendeine Differentialgleichung der Form

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y + \lambda y = 0. \tag{1}$$

Die Koeffizienten $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$ sind irgendwelche reell- oder komplexwertige Funktionen der Variablen x; von denen wir in erster Linie nur anzunehmen brauchen, daß sie in einem gemeinsamen Intervall J der x-Achse definiert sind; und λ bedeutet einen Parameter, der aller komplexen Werte fähig ist.

CASO DISCRETO-CONTINUO (2,2)

El caso biespectral discreto-continuo de orden $(2,2)$ ya fue resuelto por S. Bochner en 1929.

Las únicas familias de polinomios $p_n(x)$ con $\deg p_n = n$ tales que

$$a_n p_{n+1}(x) + b_n p_n(x) + c_n p_{n-1}(x) = x p_n(x), \quad \text{y} \quad a_2(x) p_n''(x) + a_1(x) p_n'(x) + a_0(x) p_n(x) = \lambda_n p_n(x)$$

son las familias clásicas de polinomios de Hermite, Laguerre y Jacobi:

1. Hermite: $a_n = 1, b_n = 0, c_n = n/2$ y $a_2(x) = 1, a_1(x) = -2x, a_0(x) = 0, \lambda_n = -2n$.
2. Laguerre: $a_n = n+1, b_n = -(2n+\alpha+1), c_n = n+\alpha$ y $a_2(x) = x, a_1(x) = \alpha+1-x, a_0(x) = 0, \lambda_n = -n$.
3. Jacobi: $a_2(x) = 1-x^2, a_1(x) = \beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x, a_0(x) = 0, \lambda_n = -n(n+\alpha+\beta+1)$ y a_n, b_n, c_n funciones racionales.

CASO DISCRETO-CONTINUO (2,2)

El caso biespectral discreto-continuo de orden $(2,2)$ ya fue resuelto por S. Bochner en 1929.

Las únicas familias de polinomios $p_n(x)$ con $\deg p_n = n$ tales que

$$a_n p_{n+1}(x) + b_n p_n(x) + c_n p_{n-1}(x) = x p_n(x), \quad \text{y} \quad a_2(x) p_n''(x) + a_1(x) p_n'(x) + a_0(x) p_n(x) = \lambda_n p_n(x)$$

son las familias clásicas de polinomios de Hermite, Laguerre y Jacobi:

1. Hermite: $a_n = 1, b_n = 0, c_n = n/2$ y $a_2(x) = 1, a_1(x) = -2x, a_0(x) = 0, \lambda_n = -2n$.
2. Laguerre: $a_n = n+1, b_n = -(2n+\alpha+1), c_n = n+\alpha$ y $a_2(x) = x, a_1(x) = \alpha+1-x, a_0(x) = 0, \lambda_n = -n$.
3. Jacobi: $a_2(x) = 1-x^2, a_1(x) = \beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x, a_0(x) = 0, \lambda_n = -n(n+\alpha+\beta+1)$ y a_n, b_n, c_n funciones racionales.

El operador en diferencias de segundo orden (también llamada relación de recurrencia a tres términos) es equivalente, según el TEOREMA ESPECTRAL, a que exista una medida positiva ψ soportada en la recta real para la cual los correspondientes polinomios son *ortogonales* en el sentido de que

$$(p_n, p_m)_\psi = \int_{\mathcal{S}} p_n(x) p_m(x) d\psi(x) = \delta_{nm}, \quad \mathcal{S} \subset \mathbb{R}$$

Las medidas, para los polinomios clásicos, son

1. Hermite: $d\psi(x) = e^{-x^2} dx$ en $\mathbb{R}$ (distribución Gaussiana).
2. Laguerre: $d\psi(x) = x^\alpha e^{-x} dx, \alpha > -1$ en $[0, \infty)$ (distribución Gamma).
3. Jacobi: $d\psi(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx, \alpha, \beta > -1$ en $[-1, 1]$ (distribución Beta).

CASO DISCRETO-CONTINUO (2,2M)

El caso $(2, 4)$ fue resuelto por H. L. Krall en 1940. En 1982 se dio un ejemplo en el caso $(2, 6)$ por L. L. Littlejohn y más adelante también se estudiaron otros casos de orden $(2, 2m), m \geq 3$.

CASO DISCRETO-CONTINUO (2,2M)

El caso $(2,4)$ fue resuelto por H. L. Krall en 1940. En 1982 se dio un ejemplo en el caso $(2,6)$ por L. L. Littlejohn y más adelante también se estudiaron otros casos de orden $(2,2m), m \geq 3$.

Aparte de los ejemplos clásicos, los únicos ejemplos en el caso $(2,4)$ son

- De tipo Laguerre: el peso es de la forma $e^{-x} + M\delta(x)$ en $[0,\infty)$.
- De tipo Jacobi: el peso es de la forma $(1-x)^{\alpha} + M\delta(x)$ en $[0,1]$.
- De tipo Legendre: el peso es de la forma $1/2 + M\delta(x-1) + M\delta(x+1)$ en $[-1,1]$.

CASO DISCRETO-CONTINUO (2,2M)

El caso $(2,4)$ fue resuelto por H. L. Krall en 1940. En 1982 se dio un ejemplo en el caso $(2,6)$ por L. L. Littlejohn y más adelante también se estudiaron otros casos de orden $(2,2m), m \geq 3$.

Aparte de los ejemplos clásicos, los únicos ejemplos en el caso $(2,4)$ son

- De tipo Laguerre: el peso es de la forma $e^{-x} + M\delta(x)$ en $[0,\infty)$.
- De tipo Jacobi: el peso es de la forma $(1-x)^{\alpha} + M\delta(x)$ en $[0,1]$.
- De tipo Legendre: el peso es de la forma $1/2 + M\delta(x-1) + M\delta(x+1)$ en $[-1,1]$.

En [Grünbaum-Haine, 1996] usaron la transformación de Darboux (discreta) para calcular los polinomios ortogonales de Krall a partir de los ejemplos clásicos de polinomios ortogonales.

PROBLEMA ABIERTO: ¿clasificación de ejemplos para el caso $(2,2m), m \geq 3$?

Orthogonal Polynomials Satisfying Differential Equations: The Role of the Darboux Transformation

F. Alberto Grünbaum and Luc Haine

Introduction and statement of results

The classical result of S. Bochner [4] characterizing the "classical orthogonal polynomials" (Jacobi, Hermite, Laguerre and Bessel) as the only ones that satisfy a second order differential equation of the form

$$(1) \qquad \sum_{i=0}^{2} a_i(k) D^i p_n(k) = \theta_n p_n(k) \quad D = \frac{d}{dk} \quad n = 0,1,2,\ldots$$

can be seen as the motivation for at least two lines of work that have found important applications.

TRANSFORMACIÓN DE DARBOUX DISCRETA

Sea J un operador en diferencias de segundo orden de la forma $J = \mathfrak{S}_1 + b_n + a_{n-1}\mathfrak{S}_{-1}$. La ecuación $Jp = \lambda p$ con $p = (p_0, p_1, \ldots)^T$, se puede escribir de la forma

$$Jp = \begin{pmatrix} b_1 & 1 & 0 & & \\ a_1 & b_2 & 1 & 0 & \\ 0 & a_2 & b_3 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \lambda p$$

TRANSFORMACIÓN DE DARBOUX DISCRETA

Sea J un operador en diferencias de segundo orden de la forma $J = \mathfrak{S}_1 + b_n + a_{n-1}\mathfrak{S}_{-1}$. La ecuación $Jp = \lambda p$ con $p = (p_0, p_1, \ldots)^T$, se puede escribir de la forma

$$Jp = \begin{pmatrix} b_1 & 1 & 0 & & \\ a_1 & b_2 & 1 & 0 & \\ 0 & a_2 & b_3 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \lambda p$$

A continuación se hace la factorización UL (con autovalor λ) de J (igual para la factorización LU)

$$J - \lambda I = J_U J_L = (\mathfrak{S}_1 + \alpha_n) \circ (\beta_n \mathfrak{S}_{-1} + 1)$$

En otras palabras

$$J - \lambda I = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 1 & & & \\ 0 & \alpha_2 & 1 & & \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \\ \beta_1 & 1 & 0 & & \\ 0 & \beta_2 & 1 & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} = J_U J_L$$

TRANSFORMACIÓN DE DARBOUX DISCRETA

Sea J un operador en diferencias de segundo orden de la forma $J = \mathfrak{S}_1 + b_n + a_{n-1}\mathfrak{S}_{-1}$. La ecuación $Jp = \lambda p$ con $p = (p_0, p_1, \ldots)^T$, se puede escribir de la forma

$$Jp = \begin{pmatrix} b_1 & 1 & 0 & & \\ a_1 & b_2 & 1 & 0 & \\ 0 & a_2 & b_3 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \lambda p$$

A continuación se hace la factorización UL (con autovalor λ) de J (igual para la factorización LU)

$$J - \lambda I = J_U J_L = (\mathfrak{S}_1 + \alpha_n) \circ (\beta_n \mathfrak{S}_{-1} + 1)$$

En otras palabras

$$J - \lambda I = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 1 & & & \\ 0 & \alpha_2 & 1 & & \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \\ \beta_1 & 1 & 0 & & \\ 0 & \beta_2 & 1 & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} = J_U J_L$$

La transformación de Darboux discreta de J es un nuevo operador $\widetilde{J} = J_L J_U + \lambda I$ cuyos nuevos coeficientes $\widetilde{b}_n, \widetilde{a}_n$ verifican

$$\widetilde{b}_n = b_n + \beta_{n-1} - \beta_n, \quad n \geq 1, \quad \widetilde{a}_1 = \alpha_1 \beta_1, \quad \widetilde{a}_n = a_{n-1}\beta_n/\beta_{n-1}, \quad n \geq 2$$

En este caso aparece un parámetro libre α_1 (al contrario que en la factorización LU), aparte del autovalor λ. En muchos caso se toma $\lambda = 0$ en cuyo caso la autofunción inicial está en el $\ker(J)$.

TRANSFORMACIÓN DE DARBOUX DISCRETA

Al igual que antes, se puede aplicar la transformación de Darboux discreta al nuevo operador $\widetilde{J}$ con respecto a otro autovalor. Las autofunciones de la última transformación se pueden expresar en términos de autofunciones del primer operador J mediante determinantes de Casorati (versión discreta de los Wronskianos), que se definen para funciones discretas $g_1(n), \ldots, g_m(n)$ como

$$W_n(g_1, \ldots, g_m) = \begin{vmatrix} g_1(n) & g_1(n-1) & \cdots & g_1(n-m+1) \\ g_2(n) & g_2(n-1) & \cdots & g_2(n-m+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_m(n) & g_m(n-1) & \cdots & g_m(n-m+1) \end{vmatrix}$$

aunque otras maneras de definirlo (subiendo los índices en vez de bajarlos).

TRANSFORMACIÓN DE DARBOUX DISCRETA

Al igual que antes, se puede aplicar la transformación de Darboux discreta al nuevo operador $\widetilde{J}$ con respecto a otro autovalor. Las autofunciones de la última transformación se pueden expresar en términos de autofunciones del primer operador J mediante determinantes de Casorati (versión discreta de los Wronskianos), que se definen para funciones discretas $g_1(n), \ldots, g_m(n)$ como

$$W_n(g_1, \ldots, g_m) = \begin{vmatrix} g_1(n) & g_1(n-1) & \cdots & g_1(n-m+1) \\ g_2(n) & g_2(n-1) & \cdots & g_2(n-m+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_m(n) & g_m(n-1) & \cdots & g_m(n-m+1) \end{vmatrix}$$

aunque otras maneras de definirlo (subiendo los índices en vez de bajarlos).

Como ya vimos, el Teorema Espectral proporciona una correspondencia uno-a-uno entre operadores tridiagonales J (Jacobi) y medidas positivas ψ soportadas en la recta real. La transformación de Darboux discreta (UL o LU) proporciona un nuevo operador tridiagonal $\widetilde{J}$ (Jacobi) y por lo tanto tendrá una nueva medida $\widetilde{\psi}$ asociada.

TRANSFORMACIÓN DE DARBOUX DISCRETA

Al igual que antes, se puede aplicar la transformación de Darboux discreta al nuevo operador $\widetilde{J}$ con respecto a otro autovalor. Las autofunciones de la última transformación se pueden expresar en términos de autofunciones del primer operador J mediante determinantes de Casorati (versión discreta de los Wronskianos), que se definen para funciones discretas $g_1(n), \ldots, g_m(n)$ como

$$W_n(g_1, \ldots, g_m) = \begin{vmatrix} g_1(n) & g_1(n-1) & \cdots & g_1(n-m+1) \\ g_2(n) & g_2(n-1) & \cdots & g_2(n-m+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_m(n) & g_m(n-1) & \cdots & g_m(n-m+1) \end{vmatrix}$$

aunque otras maneras de definirlo (subiendo los índices en vez de bajarlos).

Como ya vimos, el Teorema Espectral proporciona una correspondencia uno-a-uno entre operadores tridiagonales J (Jacobi) y medidas positivas ψ soportadas en la recta real. La transformación de Darboux discreta (UL o LU) proporciona un nuevo operador tridiagonal $\widetilde{J}$ (Jacobi) y por lo tanto tendrá una nueva medida $\widetilde{\psi}$ asociada.

Una cuestión natural es estudiar cómo se transforman las correspondientes medidas espectrales:

- Caso UL: $J \leftrightarrow \psi(x) \quad \Rightarrow \quad \widetilde{J} \leftrightarrow \dfrac{\psi(x)}{x-\lambda} + M(\alpha_1)\delta(x-\lambda)$ (transformación de Geronimus).
- Caso LU: $J \leftrightarrow \psi(x) \quad \Rightarrow \quad \widetilde{J} \leftrightarrow (x-\lambda)\psi(x)$ (transformación de Christoffel).

CASO DISCRETO-DISCRETO (2,2)

El caso biespectral discreto-discreto de orden $(2, 2)$ fue clasificado por O. E. Lancaster en 1941.

CASO DISCRETO-DISCRETO (2,2)

El caso biespectral discreto-discreto de orden $(2,2)$ fue clasificado por O. E. Lancaster en 1941.

ORTHOGONAL POLYNOMIALS DEFINED BY DIFFERENCE EQUATIONS.*†

By Otis E. Lancaster.

---

1. Introduction: Many analogous properties of differential and difference equations have been studied. Here these analogies are extended to include some ideas relative to orthogonal solutions of difference equations.

Although some general theorems are given, the main study is confined to polynomial solutions of difference equations of the form

$$(1) \qquad (ax^2+bx+c)\underset{h}{\Delta^2}y(x)+(dx+f)\underset{h}{\Delta}y(x)+\lambda y(x+h)=0$$

where $h>0$ is the interval of difference, a, b, c, d, and f are constants and λ is a parameter which is determined so as to insure polynomial solutions.[1]

CASO DISCRETO-DISCRETO (2,2)

El caso biespectral discreto-discreto de orden $(2,2)$ fue clasificado por O. E. Lancaster en 1941.

1. Charlier: c_n^a son ortogonales con respecto a la *distribución de Poisson*

$$\omega_a(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{a^x}{x!}\delta_x, \quad a > 0$$

y verifican una ecuación en diferencias de segundo orden de la forma

$$-ac_n^a(x+1) + (x+a)c_n^a(x) - xc_n^a(x-1) = nc_n^a(x)$$

2. Meixner: $M_n^{\beta,c}$ son ortogonales con respecto a la *distribución de Pascal*

$$\omega_{\beta,c}(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\beta)_x}{x!}c^x\delta_x, \quad \beta > 0, \quad 0 < c < 1$$

3. Krawtchouk: $K_n^{p,N}$ son ortogonales con respecto a la *distribución binomial*

$$\omega_{p,N}(x) = \sum_{x=0}^{N} \binom{N}{x} p^x(1-p)^{N-x}\delta_x, \quad 0 < p < 1$$

4. Hahn: $Q_n^{\alpha,\beta,N}$ son ortogonales con respecto a la *distribución hipergeométrica*

$$\omega_{\alpha,\beta,N}(x) = \sum_{x=0}^{N} \binom{\alpha+x}{x}\binom{\beta+N-x}{N-x}\delta_x, \quad \alpha,\beta > -1, \quad \text{ó} \quad \alpha,\beta < -N$$

CASO DISCRETO-DISCRETO (2,2)

El caso biespectral discreto-discreto de orden $(2,2)$ fue clasificado por O. E. Lancaster en 1941.

1. Charlier: c_n^a son ortogonales con respecto a la *distribución de Poisson*

$$\omega_a(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{a^x}{x!}\delta_x, \quad a > 0$$

y verifican una ecuación en diferencias de segundo orden de la forma

$$-ac_n^a(x+1) + (x+a)c_n^a(x) - xc_n^a(x-1) = nc_n^a(x)$$

2. Meixner: $M_n^{\beta,c}$ son ortogonales con respecto a la *distribución de Pascal*

$$\omega_{\beta,c}(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\beta)_x}{x!}c^x\delta_x, \quad \beta > 0, \quad 0 < c < 1$$

3. Krawtchouk: $K_n^{p,N}$ son ortogonales con respecto a la *distribución binomial*

$$\omega_{p,N}(x) = \sum_{x=0}^{N} \binom{N}{x} p^x(1-p)^{N-x}\delta_x, \quad 0 < p < 1$$

4. Hahn: $Q_n^{\alpha,\beta,N}$ son ortogonales con respecto a la *distribución hipergeométrica*

$$\omega_{\alpha,\beta,N}(x) = \sum_{x=0}^{N} \binom{\alpha+x}{x}\binom{\beta+N-x}{N-x}\delta_x, \quad \alpha,\beta > -1, \quad \text{ó} \quad \alpha,\beta < -N$$

→ Sin embargo, para el caso de orden $(2,2m)$ con $m \geq 2$ no se encontraron ejemplos hasta muy recientemente (A. Durán, 2012).

ÍNDICE

1. El problema biespectral

1.1 La transformación de Darboux

1.2 Soluciones en términos de Wronskianos

ÍNDICE

1. El problema biespectral

1.1 La transformación de Darboux

1.2 Soluciones en términos de Wronskianos

2. $\mathcal{D}$-operadores

2.1 Soluciones en términos de determinantes de Casorati

2.2 Ejemplos: Charlier (discreto) y Laguerre (continuo)

$\mathcal{D}$-OPERADORES

Este método, introducido por [Durán, 2013], proporciona una manera de obtener autofunciones polinomiales de operadores diferenciales o en diferencias de órdenes mayores que 2 en términos de las autofunciones polinomiales de un operador conocido.

$\mathcal{D}$-OPERADORES

Este método, introducido por [Durán, 2013], proporciona una manera de obtener autofunciones polinomiales de operadores diferenciales o en diferencias de órdenes mayores que 2 en términos de las autofunciones polinomiales de un operador conocido.

ELSEVIER

CrossMark

Available online at www.sciencedirect.com

ScienceDirect

Journal of Approximation Theory 174 (2013) 10–53

Journal of Approximation Theory

www.elsevier.com/locate/jat

Full length article

Using $\mathcal{D}$-operators to construct orthogonal polynomials satisfying higher order difference or differential equations☆

Antonio J. Durán

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Sevilla, Apdo (P. O. BOX) 1160, 41080 Sevilla, Spain

$\mathcal{D}$-OPERADORES

Este método, introducido por [Durán, 2013], proporciona una manera de obtener autofunciones polinomiales de operadores diferenciales o en diferencias de órdenes mayores que 2 en términos de las autofunciones polinomiales de un operador conocido.

ELSEVIER

CrossMark

Available online at www.sciencedirect.com

ScienceDirect

Journal of Approximation Theory 174 (2013) 10–53

Journal of Approximation Theory

www.elsevier.com/locate/jat

Full length article

Using $\mathcal{D}$-operators to construct orthogonal polynomials satisfying higher order difference or differential equations☆

Antonio J. Durán

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Sevilla, Apdo (P. O. BOX) 1160, 41080 Sevilla, Spain

- El método no asegura que las correspondientes autofunciones tengan la propiedad biespectral. Sin embargo, en todos los ejemplos vistos hasta ahora, van a tener la propiedad biespectral.

$\mathcal{D}$-OPERADORES

Este método, introducido por [Durán, 2013], proporciona una manera de obtener autofunciones polinomiales de operadores diferenciales o en diferencias de órdenes mayores que 2 en términos de las autofunciones polinomiales de un operador conocido.

ELSEVIER

CrossMark

Available online at www.sciencedirect.com

ScienceDirect

Journal of Approximation Theory 174 (2013) 10–53

Journal of Approximation Theory

www.elsevier.com/locate/jat

Full length article

Using $\mathcal{D}$-operators to construct orthogonal polynomials satisfying higher order difference or differential equations☆

Antonio J. Durán

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Sevilla, Apdo (P. O. BOX) 1160, 41080 Sevilla, Spain

- El método no asegura que las correspondientes autofunciones tengan la propiedad biespectral. Sin embargo, en todos los ejemplos vistos hasta ahora, van a tener la propiedad biespectral.

- El método tuvo su origen en la búsqueda de polinomios de Krall discretos, que hasta la fecha no se había descubierto ninguno.

$\mathcal{D}$-OPERADORES

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de operadores (diferenciales o en diferencias) con coeficientes polinómicos. Supongamos que partimos de una familia de polinomios $(p_n)_n$ con $\deg p_n = n$ tal que existe un operador $D_p \in \mathcal{A}$ tal que $D_p(p_n) = \lambda_n p_n$ con $\lambda_n = n$.

⋆ *Desarrollamos el método para el caso en el que el autovalor inicial λ_n es lineal en n. Cuando λ_n no es lineal también se ha extendido el método, pero es un poco más complejo.*

$\mathcal{D}$-OPERADORES

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de operadores (diferenciales o en diferencias) con coeficientes polinómicos. Supongamos que partimos de una familia de polinomios $(p_n)_n$ con $\deg p_n = n$ tal que existe un operador $D_p \in \mathcal{A}$ tal que $D_p(p_n) = \lambda_n p_n$ con $\lambda_n = n$.

$\star$ *Desarrollamos el método para el caso en el que el autovalor inicial λ_n es lineal en n. Cuando λ_n no es lineal también se ha extendido el método, pero es un poco más complejo.*

Dada una sucesión de números $(\varepsilon_n)_n$ consideramos el operador

$$\mathcal{D}(p_n) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \varepsilon_n \cdots \varepsilon_{n-j} p_{n-j} = \varepsilon_n p_{n-1} - \varepsilon_n \varepsilon_{n-1} p_{n-2} + \cdots$$

$\mathcal{D}$-OPERADORES

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de operadores (diferenciales o en diferencias) con coeficientes polinómicos. Supongamos que partimos de una familia de polinomios $(p_n)_n$ con $\deg p_n = n$ tal que existe un operador $D_p \in \mathcal{A}$ tal que $D_p(p_n) = \lambda_n p_n$ con $\lambda_n = n$.

⋆ *Desarrollamos el método para el caso en el que el autovalor inicial λ_n es lineal en n. Cuando λ_n no es lineal también se ha extendido el método, pero es un poco más complejo.*

Dada una sucesión de números $(\varepsilon_n)_n$ consideramos el operador

$$\mathcal{D}(p_n) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \varepsilon_n \cdots \varepsilon_{n-j} p_{n-j} = \varepsilon_n p_{n-1} - \varepsilon_n \varepsilon_{n-1} p_{n-2} + \cdots$$

Se dice que $\mathcal{D}$ es un $\mathcal{D}$-operador asociado a $\mathcal{A}$ y $(p_n)_n$ si $\mathcal{D} \in \mathcal{A}$

$\mathcal{D}$-OPERADORES

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de operadores (diferenciales o en diferencias) con coeficientes polinómicos. Supongamos que partimos de una familia de polinomios $(p_n)_n$ con $\deg p_n = n$ tal que existe un operador $D_p \in \mathcal{A}$ tal que $D_p(p_n) = \lambda_n p_n$ con $\lambda_n = n$.

$\star$ *Desarrollamos el método para el caso en el que el autovalor inicial λ_n es lineal en n. Cuando λ_n no es lineal también se ha extendido el método, pero es un poco más complejo.*

Dada una sucesión de números $(\varepsilon_n)_n$ consideramos el operador

$$\mathcal{D}(p_n) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \varepsilon_n \cdots \varepsilon_{n-j} p_{n-j} = \varepsilon_n p_{n-1} - \varepsilon_n \varepsilon_{n-1} p_{n-2} + \cdots$$

Se dice que $\mathcal{D}$ es un $\mathcal{D}$-operador asociado a $\mathcal{A}$ y $(p_n)_n$ si $\mathcal{D} \in \mathcal{A}$

Ejemplos:

- Laguerre: $\varepsilon_n = -1 \Rightarrow \mathcal{D} = \dfrac{d}{dx} = \partial_x$.
- Charlier: $\varepsilon_n = 1 \Rightarrow \mathcal{D} = \nabla = \mathfrak{S}_0 - \mathfrak{S}_{-1}$.

Otras familias clásicas puede que tengan más de un $\mathcal{D}$-operador (Jacobi tiene 2 y Hahn tiene 4).

PROBLEMA ABIERTO: Demostrar que los únicos $\mathcal{D}$-operadores asociados a cada familia clásica (discreta y continua) son los que se conocen.

$\mathcal{D}$-OPERADORES

Sean $R_1, R_2, \ldots, R_m$, m polinomios arbitrarios y m $\mathcal{D}$-operadores $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \ldots, \mathcal{D}_m$ definidos por las sucesiones $(\varepsilon_n^h)_n$, $h = 1, \ldots, m$.
Se definen a su vez las funciones auxiliares $\xi_{n,i}^h$ por

$$\xi_{n,i}^h = \varepsilon_n^h \varepsilon_{n-1}^h \cdots \varepsilon_{n-i+1}^h$$

y asumimos que el siguiente determinante de tipo Casorati nunca se anula ($n \geq 0$)

$$\Omega(n) = \begin{vmatrix} \xi_{n-1,m-1}^1 R_1(n-1) & \xi_{n-2,m-2}^1 R_1(n-2) & \cdots & R_1(n-m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{n-1,m-1}^m R_m(n-1) & \xi_{n-2,m-2}^m R_m(n-2) & \cdots & R_m(n-m) \end{vmatrix} \neq 0$$

$\mathcal{D}$-OPERADORES

Sean $R_1, R_2, \ldots, R_m$, m polinomios arbitrarios y m $\mathcal{D}$-operadores $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \ldots, \mathcal{D}_m$ definidos por las sucesiones $(\varepsilon_n^h)_n$, $h = 1, \ldots, m$.
Se definen a su vez las funciones auxiliares $\xi_{n,i}^h$ por

$$\xi_{n,i}^h = \varepsilon_n^h \varepsilon_{n-1}^h \cdots \varepsilon_{n-i+1}^h$$

y asumimos que el siguiente determinante de tipo Casorati nunca se anula ($n \geq 0$)

$$\Omega(n) = \begin{vmatrix} \xi_{n-1,m-1}^1 R_1(n-1) & \xi_{n-2,m-2}^1 R_1(n-2) & \cdots & R_1(n-m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{n-1,m-1}^m R_m(n-1) & \xi_{n-2,m-2}^m R_m(n-2) & \cdots & R_m(n-m) \end{vmatrix} \neq 0$$

Sea ahora una sucesión de polinomios $(q_n)_n$ definidos por

$$q_n(x) = \begin{vmatrix} p_n(x) & -p_{n-1}(x) & \cdots & (-1)^m p_{n-m}(x) \\ \xi_{n,m}^1 R_1(n) & \xi_{n-1,m-1}^1 R_1(n-1) & \cdots & R_1(n-m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{n,m}^m R_m(n) & \xi_{n-1,m-1}^m R_m(n-1) & \cdots & R_m(n-m) \end{vmatrix}$$

Observación: q_n es una combinación lineal de $m+1$ polinomios p_n consecutivos de la forma

$$q_n = \Omega(n) p_n + \beta_{n,1} p_{n-1} + \beta_{n,2} p_{n-2} + \cdots + \beta_{n,m} p_{n-m}$$

y además $\deg q_n = n$ por la hipótesis.

$\mathcal{D}$-OPERADORES

Sean $R_1, R_2, \ldots, R_m$, m polinomios arbitrarios y m $\mathcal{D}$-operadores $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \ldots, \mathcal{D}_m$ definidos por las sucesiones $(\varepsilon_n^h)_n$, $h = 1, \ldots, m$.
Se definen a su vez las funciones auxiliares $\xi_{n,i}^h$ por

$$\xi_{n,i}^h = \varepsilon_n^h \varepsilon_{n-1}^h \cdots \varepsilon_{n-i+1}^h$$

y asumimos que el siguiente determinante de tipo Casorati nunca se anula ($n \geq 0$)

$$\Omega(n) = \begin{vmatrix} \xi_{n-1,m-1}^1 R_1(n-1) & \xi_{n-2,m-2}^1 R_1(n-2) & \cdots & R_1(n-m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{n-1,m-1}^m R_m(n-1) & \xi_{n-2,m-2}^m R_m(n-2) & \cdots & R_m(n-m) \end{vmatrix} \neq 0$$

Sea ahora una sucesión de polinomios $(q_n)_n$ definidos por

$$q_n(x) = \begin{vmatrix} p_n(x) & -p_{n-1}(x) & \cdots & (-1)^m p_{n-m}(x) \\ \xi_{n,m}^1 R_1(n) & \xi_{n-1,m-1}^1 R_1(n-1) & \cdots & R_1(n-m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{n,m}^m R_m(n) & \xi_{n-1,m-1}^m R_m(n-1) & \cdots & R_m(n-m) \end{vmatrix}$$

Observación: q_n es una combinación lineal de $m+1$ polinomios p_n consecutivos de la forma

$$q_n = \Omega(n) p_n + \beta_{n,1} p_{n-1} + \beta_{n,2} p_{n-2} + \cdots + \beta_{n,m} p_{n-m}$$

y además $\deg q_n = n$ por la hipótesis.

$\mathcal{D}$-OPERADORES

Definamos para $h = 1, \ldots, m$, las siguientes funciones

$$M_h(x) = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{h+j} \xi^h_{x,m-j} \det \left(\xi^l_{x+j-r,m-r} R_l(x+j-r) \right) \left\{ \begin{array}{l} l \neq h \\ r \neq j \end{array} \right\}$$

Observación: M_h son combinaciones lineales de determinantes adjuntos de $\Omega(x)$.

$\mathcal{D}$-OPERADORES

Definamos para $h = 1, \ldots, m$, las siguientes funciones

$$M_h(x) = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{h+j} \xi^h_{x,m-j} \det \left(\xi^l_{x+j-r,m-r} R_l(x+j-r) \right) \left\{ \begin{array}{l} l \neq h \\ r \neq j \end{array} \right\}$$

Observación: M_h son combinaciones lineales de determinantes adjuntos de $\Omega(x)$.

TEOREMA [Durán-MdI, 2015]. Asumamos que $\Omega(x)$ y $M_h(x)$ son polinomios en x. Entonces existe un operador $D_q \in \mathcal{A}$ tal que

$$D_q(q_n) = P(n) q_n$$

con

$$P(n) - P(n-1) = \Omega(n)$$

y D_q viene dado por

$$D_q = P(D_p) + \sum_{h=1}^{m} M_h(D_p) \mathcal{D}_h R_h(D_p)$$

donde D_p es el operador inicial con $D_p(p_n) = n p_n$.

$\mathcal{D}$-OPERADORES

Definamos para $h = 1, \ldots, m$, las siguientes funciones

$$M_h(x) = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{h+j} \xi^h_{x,m-j} \det \left(\xi^l_{x+j-r,m-r} R_l(x+j-r) \right) \left\{ \begin{array}{l} l \neq h \\ r \neq j \end{array} \right\}$$

Observación: M_h son combinaciones lineales de determinantes adjuntos de $\Omega(x)$.

TEOREMA [Durán-MdI, 2015]. Asumamos que $\Omega(x)$ y $M_h(x)$ son polinomios en x. Entonces existe un operador $D_q \in \mathcal{A}$ tal que

$$D_q(q_n) = P(n) q_n$$

con

$$P(n) - P(n-1) = \Omega(n)$$

y D_q viene dado por

$$D_q = P(D_p) + \sum_{h=1}^{m} M_h(D_p) \mathcal{D}_h R_h(D_p)$$

donde D_p es el operador inicial con $D_p(p_n) = n p_n$.

El orden del operador D_q viene dado por $\mathrm{ord}(D_p)[\deg \Omega + 1]$.

PROPIEDAD BIESPECTRAL: CASO DISCRETO

Veamos en qué situaciones tenemos que los polinomios q_n son biespectrales de orden $(2, 2m)$ y en cuyo caso serán ortogonales con respecto a una medida $\widetilde{\omega}$.

Los polinomios q_n dependen de m polinomios arbitrarios $R_1, \ldots, R_m$. Sólo para una elección apropiada de esos polinomios se tendrá que son, además, ortogonales.

PROPIEDAD BIESPECTRAL: CASO DISCRETO

Veamos en qué situaciones tenemos que los polinomios q_n son biespectrales de orden $(2, 2m)$ y en cuyo caso serán ortogonales con respecto a una medida $\widetilde{\omega}$.

Los polinomios q_n dependen de m polinomios arbitrarios $R_1, \ldots, R_m$. Sólo para una elección apropiada de esos polinomios se tendrá que son, además, ortogonales.

Si ω es la medida de ortogonalidad original de los p_n, la medida asociada a q_n se va a identificar con una transformación de Christoffel de ω, i.e.

$$\widetilde{\omega} = \prod_{f \in F} (x - f)\, \omega(x)$$

para cierto conjunto F de números enteros positivos (sin repetir).

PROPIEDAD BIESPECTRAL: CASO DISCRETO

Veamos en qué situaciones tenemos que los polinomios q_n son biespectrales de orden $(2, 2m)$ y en cuyo caso serán ortogonales con respecto a una medida $\widetilde{\omega}$.

Los polinomios q_n dependen de m polinomios arbitrarios $R_1, \ldots, R_m$. Sólo para una elección apropiada de esos polinomios se tendrá que son, además, ortogonales.

Si ω es la medida de ortogonalidad original de los p_n, la medida asociada a q_n se va a identificar con una transformación de Christoffel de ω, i.e.

$$\widetilde{\omega} = \prod_{f \in F} (x - f)\, \omega(x)$$

para cierto conjunto F de números enteros positivos (sin repetir).

Asociado a este conjunto F va a haber otro G que define mediante

$$G = I(F) = \{1, 2, \ldots, f_k\} \setminus \{f_k - f, f \in F\}, \quad f_k = \max F, \quad k = \#(F)$$

y que va a estar muy relacionado con los grados de los polinomios arbitrarios $R_1, \ldots, R_m$. Cuantos más huecos en el conjunto F, más elementos habrán en el conjunto G. Por ejemplo

$$I(\{1, 2, 3, \ldots, k\}) = \{k\}, \qquad I(\{1, k\}) = \{1, 2, \ldots, k-2, k\}$$

POLINOMIOS DE KRALL-CHARLIER

La elección de polinomios R_j que hace que q_n sean ortogonales con respecto a una medida viene dada por

$$R_j(x) = c_j^{-a}(-x-1), \quad j \geq 0$$

POLINOMIOS DE KRALL-CHARLIER

La elección de polinomios R_j que hace que q_n sean ortogonales con respecto a una medida viene dada por

$$R_j(x) = c_j^{-a}(-x-1), \quad j \geq 0$$

Sea entonces $F \subset \mathbb{N}$ finito y $G = I(F) = \{g_1, \ldots, g_m\}$. Sea ω_a la medida de Charlier y $(c_n^a)_n$ sus correspondientes polinomios. Asumamos que $\Omega_G(n) = \det\left(c_{g_l}^{-a}(-n-j-1)\right)_{l,j=1}^{m} \neq 0$.

Los polinomios $(q_n)_n$ definidos por

$$q_n(x) = \begin{vmatrix} c_n^a(x) & -c_{n-1}^a(x) & \cdots & (-1)^m c_{n-m}^a(x) \\ c_{g_1}^{-a}(-n-1) & c_{g_1}^{-a}(-n) & \cdots & c_{g_1}^{-a}(-n+m-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{g_m}^{-a}(-n-1) & c_{g_m}^{-a}(-n) & \cdots & c_{g_m}^{-a}(-n+m-1) \end{vmatrix}$$

son ortogonales con respecto a la medida

$$\omega_a^F = \prod_{f \in F}(x-f)\omega_a$$

y además son autofunciones de un operador en diferencias D_q de orden $2m$ donde

$$m = \sum_{f \in F} f - \frac{k(k-1)}{2} + 1, \quad k = \#(F).$$

Por lo tanto tienen la propiedad biespectral discreta-discreta de orden $(2, 2m)$.

POLINOMIOS DISCRETOS DE LAGUERRE-SOBOLEV

Sean $L_n^\alpha(x)$ los polinomios de Laguerre y definamos el siguiente determinante de tipo Casorati

$$q_n(x) = \begin{vmatrix} L_n^\alpha(x) & L_{n-1}^\alpha(x) & \cdots & L_{n-m}^\alpha(x) \\ \mathcal{R}_1(n) & \mathcal{R}_1(n-1) & \cdots & \mathcal{R}_1(n-m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{R}_m(n) & \mathcal{R}_m(n-1) & \cdots & \mathcal{R}_m(n-m) \end{vmatrix}, \quad n \geq 0$$

POLINOMIOS DISCRETOS DE LAGUERRE-SOBOLEV

Sean $L_n^\alpha(x)$ los polinomios de Laguerre y definamos el siguiente determinante de tipo Casorati

$$q_n(x) = \begin{vmatrix} L_n^\alpha(x) & L_{n-1}^\alpha(x) & \cdots & L_{n-m}^\alpha(x) \\ \mathcal{R}_1(n) & \mathcal{R}_1(n-1) & \cdots & \mathcal{R}_1(n-m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{R}_m(n) & \mathcal{R}_m(n-1) & \cdots & \mathcal{R}_m(n-m) \end{vmatrix}, \quad n \geq 0$$

Sea $m \geq 1$, y $M = (M_{i,j})_{i,j=0}^{m-1}$ una matriz de dimensión $m \times m$. Para $\alpha \neq m-1, m-2, \ldots$ existe una elección de *funciones* $R_1, \ldots, R_m$, dada por

$$\mathcal{R}_l(x) = \frac{\Gamma(\alpha - m + l)}{(m-l)!}(x+1)_{m-l} + (l-1)!\frac{\Gamma(\alpha+1+x)}{\Gamma(1+x)}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{(-1)^i M_{l-1,i}}{\Gamma(\alpha+i+1)}(x-i+1)_i$$

tal que q_n son ortogonales con respecto a una forma *bilineal discreta de tipo Laguerre-Sobolev*

$$\langle p, q\rangle = \int_0^\infty p(x)q(x)x^{\alpha-m}e^{-x}dx + (p(0), \ldots, p^{(m-1)}(0))M\begin{pmatrix} q(0) \\ \vdots \\ q^{(m-1)}(0) \end{pmatrix}$$

siempre y cuando que $\Omega(n) = \det(\mathcal{R}_i(n-j))_{i,j=1}^m \neq 0, n \geq 0$.

POLINOMIOS DISCRETOS DE LAGUERRE-SOBOLEV

Cuando $\alpha \geq m$ es un entero entonces las funciones $R_1, \ldots, R_m$ pasan a ser polinomios de la forma

$$\mathcal{R}_l(x) = \frac{(\alpha - m + l - 1)!}{(m-l)!}(x+1)_{m-l} + (l-1)!(x+1)_\alpha \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(-1)^i M_{l-1,i}}{(\alpha+i)!}(x-i+1)_i$$

Con lo cual existe un operador diferencial de orden mayor que 2 para el cual los polinomios q_n son autofunciones.

POLINOMIOS DISCRETOS DE LAGUERRE-SOBOLEV

Cuando $\alpha \geq m$ es un entero entonces las funciones $R_1, \ldots, R_m$ pasan a ser polinomios de la forma

$$\mathcal{R}_l(x) = \frac{(\alpha - m + l - 1)!}{(m-l)!}(x+1)_{m-l} + (l-1)!(x+1)_\alpha \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(-1)^i M_{l-1,i}}{(\alpha+i)!}(x-i+1)_i$$

Con lo cual existe un operador diferencial de orden mayor que 2 para el cual los polinomios q_n son autofunciones.

POLINOMIOS DISCRETOS DE LAGUERRE-SOBOLEV

Cuando $\alpha \geq m$ es un entero entonces las funciones $R_1, \ldots, R_m$ pasan a ser polinomios de la forma

$$\mathcal{R}_l(x) = \frac{(\alpha - m + l - 1)!}{(m-l)!}(x+1)_{m-l} + (l-1)!(x+1)_\alpha \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(-1)^i M_{l-1,i}}{(\alpha+i)!}(x-i+1)_i$$

Con lo cual existe un operador diferencial de orden mayor que 2 para el cual los polinomios q_n son autofunciones.

Para el caso en el que la matrix M es *simétrica* con entradas $M_{i,j} = a_{i+j}$ para $i + j \leq m - 1$ y $M_{i,j} = 0$ para $i + j > m - 1$, la forma bilineal se reduce al producto interno definido por el funcional de momentos

$$x^{\alpha-m}e^{-x} + \sum_{i=0}^{m-1} a_i \delta_0^{(i)}$$

POLINOMIOS DISCRETOS DE LAGUERRE-SOBOLEV

Cuando $\alpha \geq m$ es un entero entonces las funciones $R_1, \ldots, R_m$ pasan a ser polinomios de la forma

$$\mathcal{R}_l(x) = \frac{(\alpha - m + l - 1)!}{(m-l)!}(x+1)_{m-l} + (l-1)!(x+1)_\alpha \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(-1)^i M_{l-1,i}}{(\alpha+i)!}(x-i+1)_i$$

Con lo cual existe un operador diferencial de orden mayor que 2 para el cual los polinomios q_n son autofunciones.

Para el caso en el que la matrix M es *simétrica* con entradas $M_{i,j} = a_{i+j}$ para $i + j \leq m - 1$ y $M_{i,j} = 0$ para $i + j > m - 1$, la forma bilineal se reduce al producto interno definido por el funcional de momentos

$$x^{\alpha-m}e^{-x} + \sum_{i=0}^{m-1} a_i \delta_0^{(i)}$$

Observación final: Cuando $R_1, \ldots, R_m$ no se eligen de esa manera también (en los casos de Charlier y Laguerre) se ha probado recientemente (A. Durán para el caso Charlier y A. Durán-MdI para el caso Laguerre) que los polinomios definidos mediante ese determinante de tipo Casorati son biespectrales de orden $(2l, 2m)$ e incluso se ha identificado cierta forma bilineal para la cual los polinomios tienen ciertas propiedades de ortogonalidad.

POLINOMIOS DISCRETOS DE LAGUERRE-SOBOLEV

Cuando $\alpha \geq m$ es un entero entonces las funciones $R_1, \ldots, R_m$ pasan a ser polinomios de la forma

$$\mathcal{R}_l(x) = \frac{(\alpha - m + l - 1)!}{(m-l)!}(x+1)_{m-l} + (l-1)!(x+1)_\alpha \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(-1)^i M_{l-1,i}}{(\alpha+i)!}(x-i+1)_i$$

Con lo cual existe un operador diferencial de orden mayor que 2 para el cual los polinomios q_n son autofunciones.

Para el caso en el que la matrix M es *simétrica* con entradas $M_{i,j} = a_{i+j}$ para $i + j \leq m - 1$ y $M_{i,j} = 0$ para $i + j > m - 1$, la forma bilineal se reduce al producto interno definido por el funcional de momentos

$$x^{\alpha-m}e^{-x} + \sum_{i=0}^{m-1} a_i \delta_0^{(i)}$$

Observación final: Cuando $R_1, \ldots, R_m$ no se eligen de esa manera también (en los casos de Charlier y Laguerre) se ha probado recientemente (A. Durán para el caso Charlier y A. Durán-MdI para el caso Laguerre) que los polinomios definidos mediante ese determinante de tipo Casorati son biespectrales de orden $(2l, 2m)$ e incluso se ha identificado cierta forma bilineal para la cual los polinomios tienen ciertas propiedades de ortogonalidad.

PROBLEMA ABIERTO: Estudio de las álgebras de operadores diferenciales (o en diferencias) asociadas a estos ejemplos de tipo Krall, así como el estudio de álgebras de operadores de recurrencia.

RESUMEN

RESUMEN

- Hemos definido el origen del problema biespectral y su solución (para el caso continuo-continuo) de orden $(2, m)$ usando iteraciones de transformaciones de Darboux.

RESUMEN

- Hemos definido el origen del problema biespectral y su solución (para el caso continuo-continuo) de orden $(2, m)$ usando iteraciones de transformaciones de Darboux.

- Para el caso del problema biespectral discreto-continuo nos centramos en soluciones donde las autofunciones son polinómicas. El caso de orden $(2, 2)$ corresponde a las familias clásicas. Los casos de orden $(2, 2m)$ también se hallan en términos de iteraciones de transformaciones discretas de Darboux.

RESUMEN

- Hemos definido el origen del problema biespectral y su solución (para el caso continuo-continuo) de orden $(2, m)$ usando iteraciones de transformaciones de Darboux.

- Para el caso del problema biespectral discreto-continuo nos centramos en soluciones donde las autofunciones son polinómicas. El caso de orden $(2, 2)$ corresponde a las familias clásicas. Los casos de orden $(2, 2m)$ también se hallan en términos de iteraciones de transformaciones discretas de Darboux.

- Hemos definido el método de los $\mathcal{D}$-operadores que proporciona una manera más sistemática de obtener autofunciones polinomiales definidas mediante un determinante de tipo Casorati en términos de las autofunciones polinomiales de un operador conocido.

RESUMEN

- Hemos definido el origen del problema biespectral y su solución (para el caso continuo-continuo) de orden $(2, m)$ usando iteraciones de transformaciones de Darboux.

- Para el caso del problema biespectral discreto-continuo nos centramos en soluciones donde las autofunciones son polinómicas. El caso de orden $(2, 2)$ corresponde a las familias clásicas. Los casos de orden $(2, 2m)$ también se hallan en términos de iteraciones de transformaciones discretas de Darboux.

- Hemos definido el método de los $\mathcal{D}$-operadores que proporciona una manera más sistemática de obtener autofunciones polinomiales definidas mediante un determinante de tipo Casorati en términos de las autofunciones polinomiales de un operador conocido.

- Estos polinomios definidos mediante un determinante de tipo Casorati tienen la propiedad biespectral de orden $(2l, 2m)$ en el caso discreto-discreto (Charlier) y en el caso discreto-continuo (Laguerre).

RESUMEN

- Hemos definido el origen del problema biespectral y su solución (para el caso continuo-continuo) de orden $(2, m)$ usando iteraciones de transformaciones de Darboux.

- Para el caso del problema biespectral discreto-continuo nos centramos en soluciones donde las autofunciones son polinómicas. El caso de orden $(2, 2)$ corresponde a las familias clásicas. Los casos de orden $(2, 2m)$ también se hallan en términos de iteraciones de transformaciones discretas de Darboux.

- Hemos definido el método de los $\mathcal{D}$-operadores que proporciona una manera más sistemática de obtener autofunciones polinomiales definidas mediante un determinante de tipo Casorati en términos de las autofunciones polinomiales de un operador conocido.

- Estos polinomios definidos mediante un determinante de tipo Casorati tienen la propiedad biespectral de orden $(2l, 2m)$ en el caso discreto-discreto (Charlier) y en el caso discreto-continuo (Laguerre).

- Para cierta elección de polinomios arbitrarios $R_1, \ldots, R_m$ se tiene que son biespectrales de orden $(2, 2m)$ y por lo tanto ortogonales con respecto a una medida (Krall-Charlier) o funcional de momentos (Krall-Laguerre).

REFERENCIAS

Bochner, S., *Über Sturm-Liouvillesche polynomsystem*, Math. Z. **29** (1929), 730–736.

Duistermaat, J. J. y Grünbaum, F. A., *Differential equations in the spectral parameter*, Commun. Math. Phys. **103** (1986), 177–240.

Durán, A. J., *Using $\mathcal{D}$-operators to construct orthogonal polynomials satisfying higher order difference or differential equations*, J. Approx. Theory **174** (2013), 10–53.

Durán, A. J. y de la Iglesia, M. D., *Constructing bispectral orthogonal polynomials from the classical discrete families of Charlier, Meixner and Krawtchouk*, Constr. Approx. **41** (2015), 49–91.

Durán, A. J. y de la Iglesia, M. D., *Differential equations for discrete Laguerre-Sobolev orthogonal polynomials*, J. Approx. Theory **195** (2015), 70–88.

Grünbaum, F. A. y Haine, L., *Orthogonal polynomials satisfying differential equations: the role of the Darboux transformation*, CRM Proceedings and Lecture Notes. Vol **9**, pages 143–154, 1996.

GRACIAS