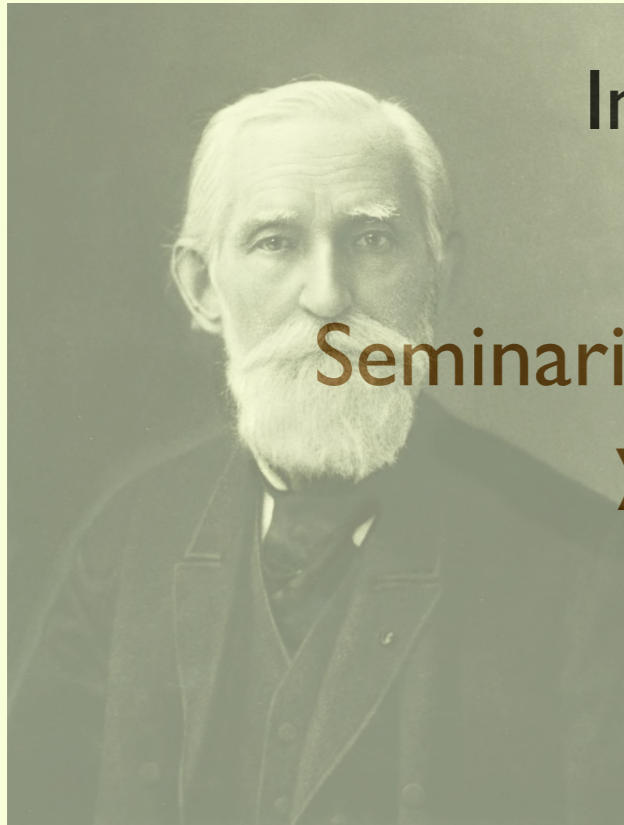


# Historia y aplicaciones de polinomios ortogonales



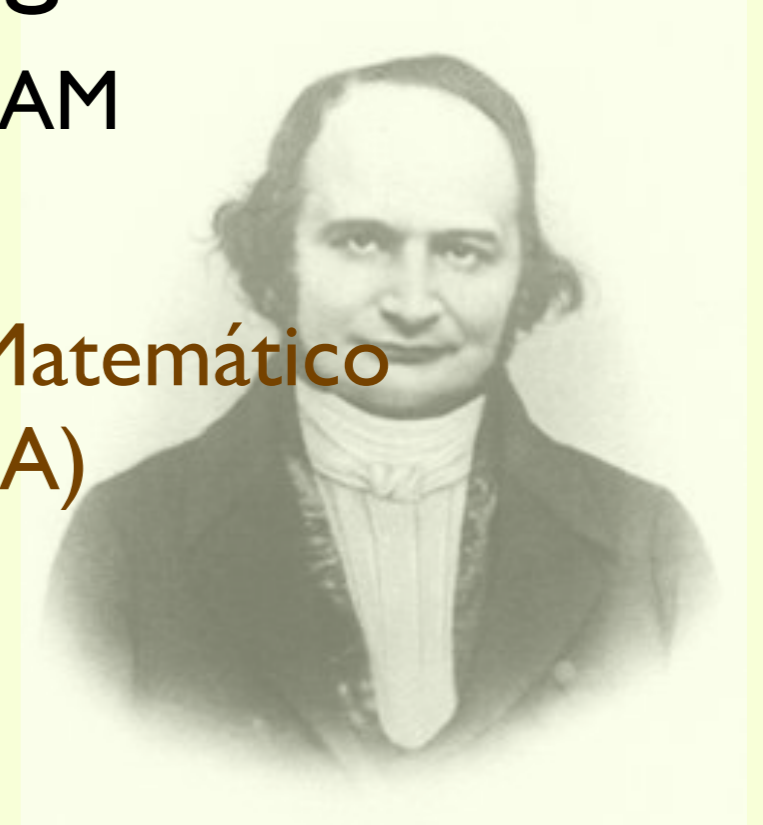
Manuel Domínguez de la Iglesia

Instituto de Matemáticas, CU, UNAM



Seminario Iberoamericano de Análisis Matemático  
y Matemática Aplicada (GAMMA)

11 de febrero de 2022



1. Polinomios de Legendre (1782)
  - Potencial gravitatorio o eléctrico
2. Polinomios de Chebyshev (1854-1874)
  - Interpolación polinómica
3. Polinomios de Hermite (1859–1864)
  - Oscilador armónico cuántico
4. Polinomios de Laguerre (1859–1880)
  - Átomo de hidrógeno
5. Polinomios de Jacobi (1859)
  - Equilibrio electrostático

# DEFINICIÓN DE POLINOMIOS ORTOGONALES

Dada una sucesión de polinomios  $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$  tal que  $\deg P_n = n$ , decimos que es una **sucesión de polinomios ortogonales** con respecto a una medida  $\mu$  soportada en la recta real si se cumple que

$$\int_{\mathbb{R}} P_n(x)P_m(x)d\mu(x) = K_n\delta_{n,m}, \quad n, m \geq 0$$

donde  $\delta_{n,m}$  es la delta de Kronecker.

Si la medida  $\mu$  es positiva, entonces  $K_n > 0, n \geq 0$ , y  $d_n = \sqrt{K_n}, n \geq 0$ , se le denomina la norma del polinomio  $P_n$ . Cuando la medida  $\mu$  es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue, entonces existe una función continua  $\rho$  tal que

$$d\mu(x) = \rho(x)dx$$

En este caso la función  $\rho$  se denomina **función peso**.

# POLINOMIOS DE LEGENDRE

A. M. Legendre, *Sur l'attraction des sphéroïdes homogènes*, 1782.



RECHERCHES  
SUR  
L'ATTRACTION  
DES  
SPHÉROÏDES HOMOGÈNES,  
PAR M. LE GENDRE.

M. MACLAURIN est le premier qui ait déterminé l'attraction d'un Sphéroïde elliptique pour les points situés dans son intérieur ou à sa surface. Les propositions qu'il a établies à ce sujet, & d'où résulte une solution si simple du problème de la figure de la Terre, servent de base à son excellente Pièce sur le Flux & le Reflux de la Mer, & sont connues de tous les Géomètres. Le même Auteur a considéré aussi l'attraction des Sphéroïdes elliptiques sur les points situés au dehors; mais il s'est borné aux points situés sur l'axe ou sur l'équateur pour les Sphéroïdes de révolution, & seulement aux points placés dans la direction d'un des trois axes, lorsque le Sphéroïde a toutes ses coupes elliptiques. Ces deux objets se trouvent compris dans un théorème remarquable, dont M. Maclaurin

Fff ij



# POLINOMIOS DE LEGENDRE

A. M. Legendre, *Sur l'attraction des sphéroïdes homogènes*, 1782.



RECHERCHES  
SUR  
L'ATTRACTION  
DES  
SPHÉROÏDES HOMOGÈNES,  
PAR M. LE GENDRE.

M. MACLAURIN est le premier qui ait déterminé l'attraction d'un Sphéroïde elliptique pour les points situés dans son intérieur ou à sa surface. Les propositions qu'il a établies à ce sujet, & d'où résulte une solution si simple du problème de la figure de la Terre, servent de base à son excellente Pièce sur le Flux & le Reflux de la Mer, & sont connues de tous les Géomètres. Le même Auteur a considéré aussi l'attraction des Sphéroïdes elliptiques sur les points situés au dehors; mais il s'est borné aux points situés sur l'axe ou sur l'équateur pour les Sphéroïdes de révolution, & seulement aux points placés dans la direction d'un des trois axes, lorsque le Sphéroïde a toutes ses coupes elliptiques. Ces deux objets se trouvent compris dans un théorème remarquable, dont M. Maclaurin

Fff ij



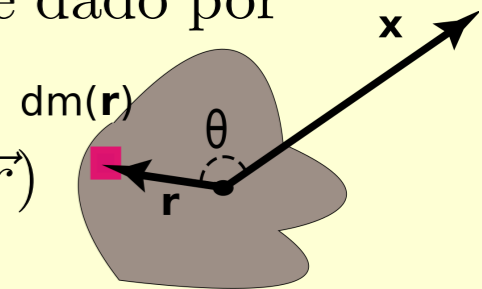
# POLINOMIOS DE LEGENDRE

A. M. Legendre, *Sur l'attraction des sphéroïdes homogènes*, 1782.

El potencial gravitatorio  $V(\vec{x})$  asociado a un punto de masa  $M$  en un punto  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$  (o también el potencial de Coulomb asociado a un punto de carga) es el trabajo que hay que realizar para traer una masa unitaria del infinito a ese punto  $\vec{x}$ .

Si la distribución de masa viene dada por  $M = \int_{\mathbb{R}^3} dm(\vec{r})$ , el potencial viene dado por

$$V(\vec{x}) = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{G}{|\vec{x} - \vec{r}|} dm(\vec{r}) = - \frac{1}{|\vec{x}|} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{G}{\sqrt{1 - 2 \frac{|\vec{r}|}{|\vec{x}|} \cos \theta + \frac{|\vec{r}|^2}{|\vec{x}|^2}}} dm(\vec{r})$$



donde  $G$  es la constante de gravitación universal,  $|\vec{x}|$  es la distancia euclídea y  $\theta$  es el ángulo entre  $\vec{x}$  y  $\vec{r}$ .

Legendre observó, llamando  $Z = |\vec{r}|/|\vec{x}|$ , que si  $|Z| < 1$  entonces se tiene la expansión

$$(1 - 2Z \cos \theta + Z^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} Z^n P_n(\cos \theta)$$

donde  $(P_n)_n$  era cierta sucesión de polinomios (**polinomios de Legendre**), dados por

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \quad \dots$$

Se tiene entonces que el potencial  $V(\vec{x})$  viene dado por

$$\begin{aligned} V(\vec{x}) &= -\frac{G}{|\vec{x}|} \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{|\vec{r}|}{|\vec{x}|} \right)^n P_n(\cos \theta) dm(\vec{r}) \\ &= -\frac{G}{|\vec{x}|} \int_{\mathbb{R}^3} \left( 1 + \frac{|\vec{r}|}{|\vec{x}|} \cos \theta + \frac{|\vec{r}|^2}{|\vec{x}|^2} \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} + \dots \right) dm(\vec{r}) \\ &= -\frac{GM}{|\vec{x}|} - \frac{G}{|\vec{x}|^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\vec{r}|^2}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) dm(\vec{r}) + \dots \end{aligned}$$

donde se observa cómo el potencial puede venir afectado por la forma que tenga el cuerpo de masa  $M$  (esto se llama *desarrollo multipolar*).

Inicialmente descubrió los de grado par, pero luego los extendió a cualquier grado y observó (1784) que tenían la siguiente propiedad

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm}$$

es decir, eran **ortogonales**.

Si existe una densidad de masa continua  $\rho(\vec{r})$  tal que  $dm(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) d\vec{r}$ , donde  $d\vec{r}$  es el elemento de volumen euclídeo y además se anula fuera de una región acotada, entonces  $\rho(\vec{r})$  se puede recuperar mediante la fórmula

$$\rho(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi G} \Delta V(\vec{x})$$

donde  $\Delta$  el **operador de Laplace**.  $V(\vec{x})$  verifica entonces la *ecuación de Poisson*, que se puede resolver usando la *función de Green*.

Otra manera de resolver el problema es entonces resolviendo la ecuación de Laplace

$$\Delta V(\vec{x}) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Haciendo el cambio a coordenadas esféricas  $(x, y, z) \mapsto (r, \theta, \phi)$  y usando el *método de separación de variables* podemos suponer que  $V = V(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ , donde cada una de estas funciones es solución de las ecuaciones

$$r^2 R''(r) + 2rR'(r) - \lambda R(r) = 0$$

$$\Theta''(\theta) + \alpha\Theta(\theta) = 0$$

$$\Phi''(\phi) + \frac{\cos \phi}{\sin \phi} \Phi'(\phi) + \left( \lambda - \frac{\alpha}{\sin^2 \phi} \right) \Phi(\phi) = 0$$

La primera (Cauchy-Euler) y la segunda (oscilador armónico) se pueden resolver explícitamente. La periodicidad de  $\Theta$  hace que  $\alpha = m^2$  con  $m \geq 0$  un entero no negativo. La tercera sin embargo no es tan sencilla de resolver.

Para  $\alpha = 0$  y haciendo el cambio de variables  $x = \cos \phi$ , se llega a que  $f(x) = \Phi(\phi) = \Phi(\arccos x)$  satisface la **ecuación diferencial de Legendre**

$$(1 - x^2)f''(x) - 2xf'(x) + \lambda f(x) = 0$$

Las soluciones acotadas de esta ecuación vienen dadas para un espectro discreto  $\lambda = n(n + 1)$ ,  $n \geq 0$  por los polinomios de Legendre  $f(x) = f_n(x) = P_n(x)$ .



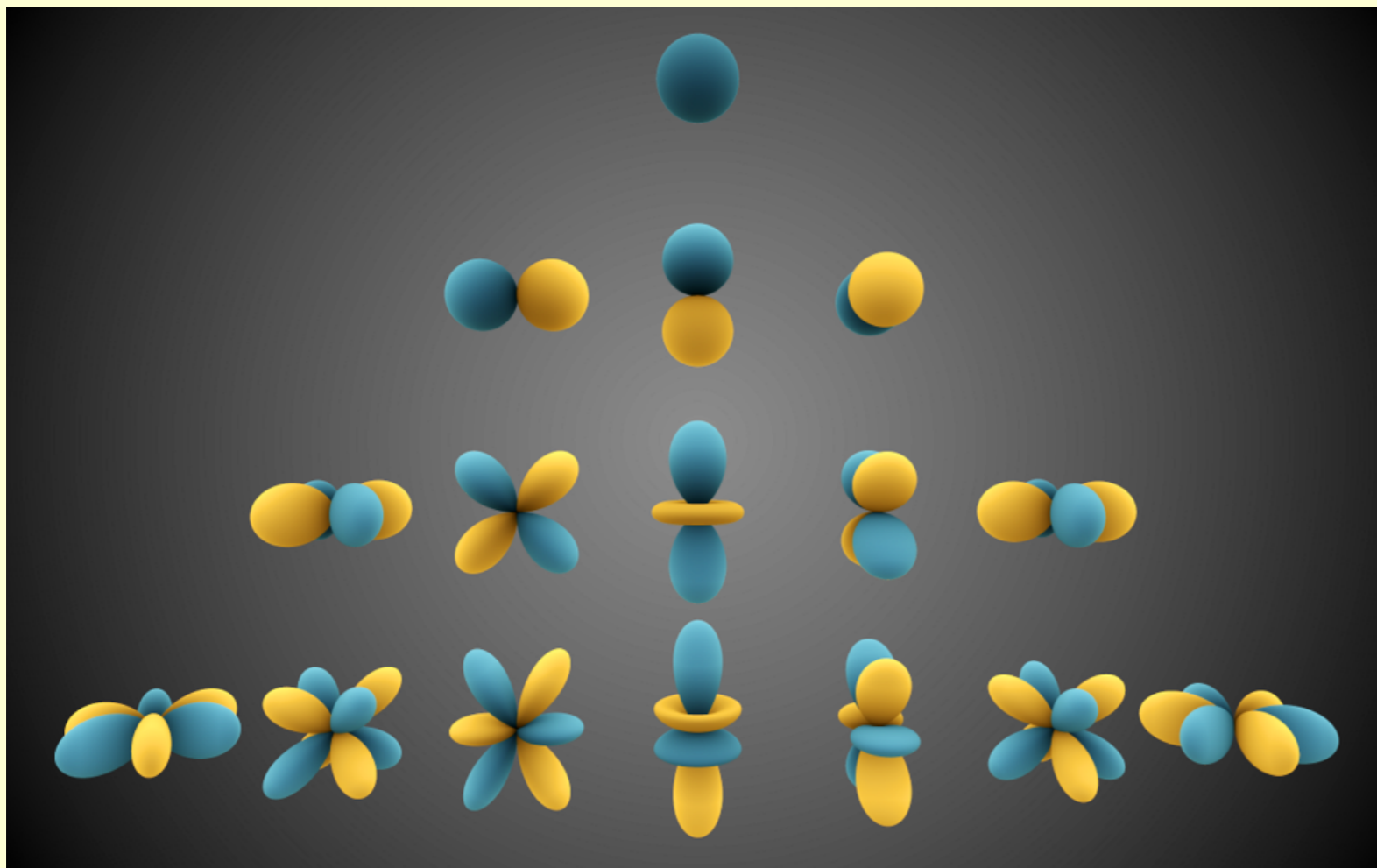
Para otros valores de  $\alpha = m^2$ , Legendre (1790) ya observó que las correspondientes soluciones se podían escribir en función de los llamados *polinomios asociados* y que se pueden escribir en términos de los polinomios de Legendre

$$Q_{n,m}(x) = (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} (P_n(x))$$

Por lo tanto la parte angular de la solución del potencial  $V$  se puede escribir como superposición de las funciones

$$Y_n^m(\phi, \theta) = Q_{n,m}(\cos \phi) e^{im\theta}$$

que son los conocidos **armónicos esféricos** que fueron estudiados por Laplace en 1782.

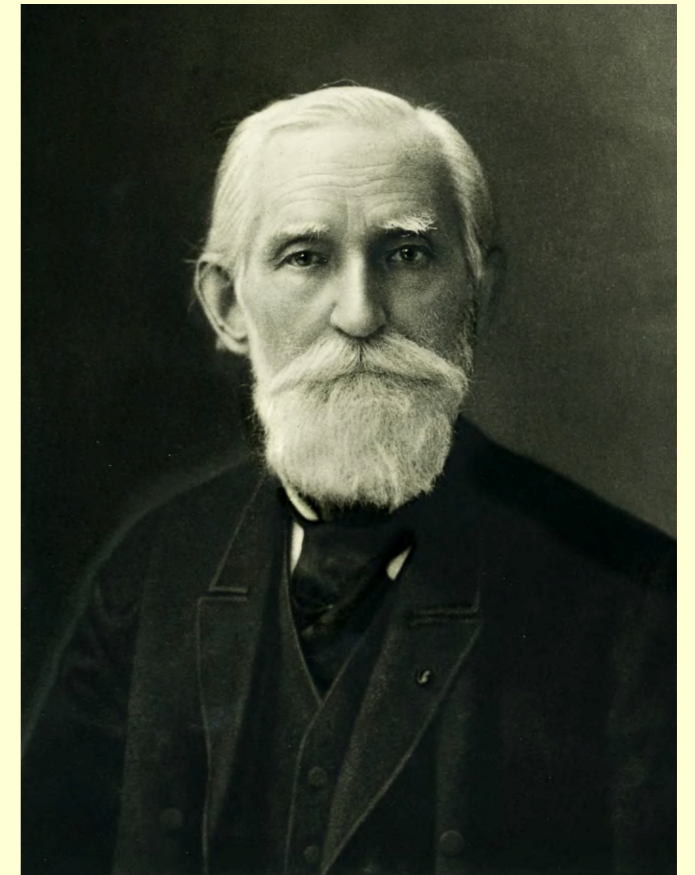


# POLINOMIOS DE CHEBYSHEV

P. L. Chebyshev, *Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes*, 1854.

## Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes.

§ 1. Quand il s'agit d'assurer la direction du mouvement rectiligne d'une pièce soumise à un effort oblique, il ne suffit pas de rendre les inégalités des guides peu sensibles à la mesure; les déviations, qui ne sont pas appréciables à l'oeil nu, se manifestent clairement par les résistances passives qui en résultent. En guidant la tige du piston de la machine à vapeur à l'aide de coulisses ou glissoires, on prend un soin particulier de les exécuter avec une perfection aussi grande que possible. En remplaçant ces guides par le parallélogramme, on est de même obligé à augmenter le plus possible la précision de son jeu, et cela d'autant plus, que même dans les circonstances les plus favorables il présente des déviations bien plus grandes que celles qu'on ne saurait jamais admettre dans le mouvement de la tige guidée par les coulisses ou glissoires. Les efforts latéraux qui résultent du défaut du jeu du parallélogramme se manifestent souvent même par la formation d'une certaine ellipticité dans la boîte à étoupes.



# POLINOMIOS DE CHEBYSHEV

P. L. Chebyshev, *Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes*, 1854.

Originalmente Chebyshev los utilizó para estudiarlos en *mecánica de bisagras*. Posteriormente (en 1859 y 1874) estudió más a fondo todas sus propiedades y las usó para estudiar interpolación de funciones.

Los polinomios de Chebyshev (de primera especie) se definen como

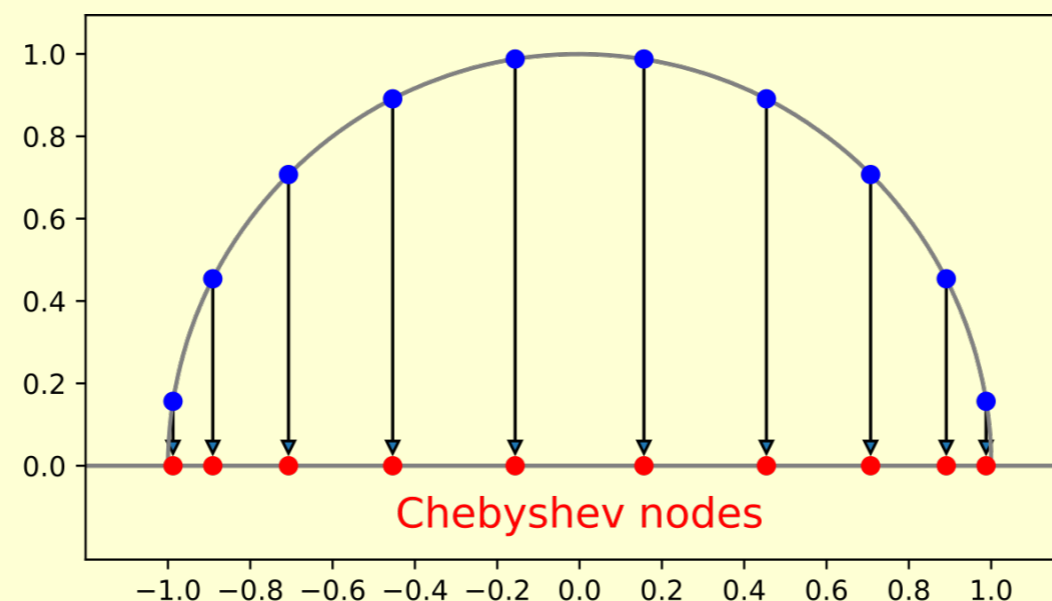
$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad x \in [-1, 1], \quad n \geq 0$$

Una manera de obtenerlos es por la fórmula de de Moivre  $e^{in\theta} = \cos n\theta + i \sin n\theta$ , aunque también se puede demostrar que satisfacen  $T_0(x) = 1$ ,  $T_1(x) = x$ , y

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n \geq 1$$

Los ceros de estos polinomios, llamados **nodos de Chebyshev** vienen dados por

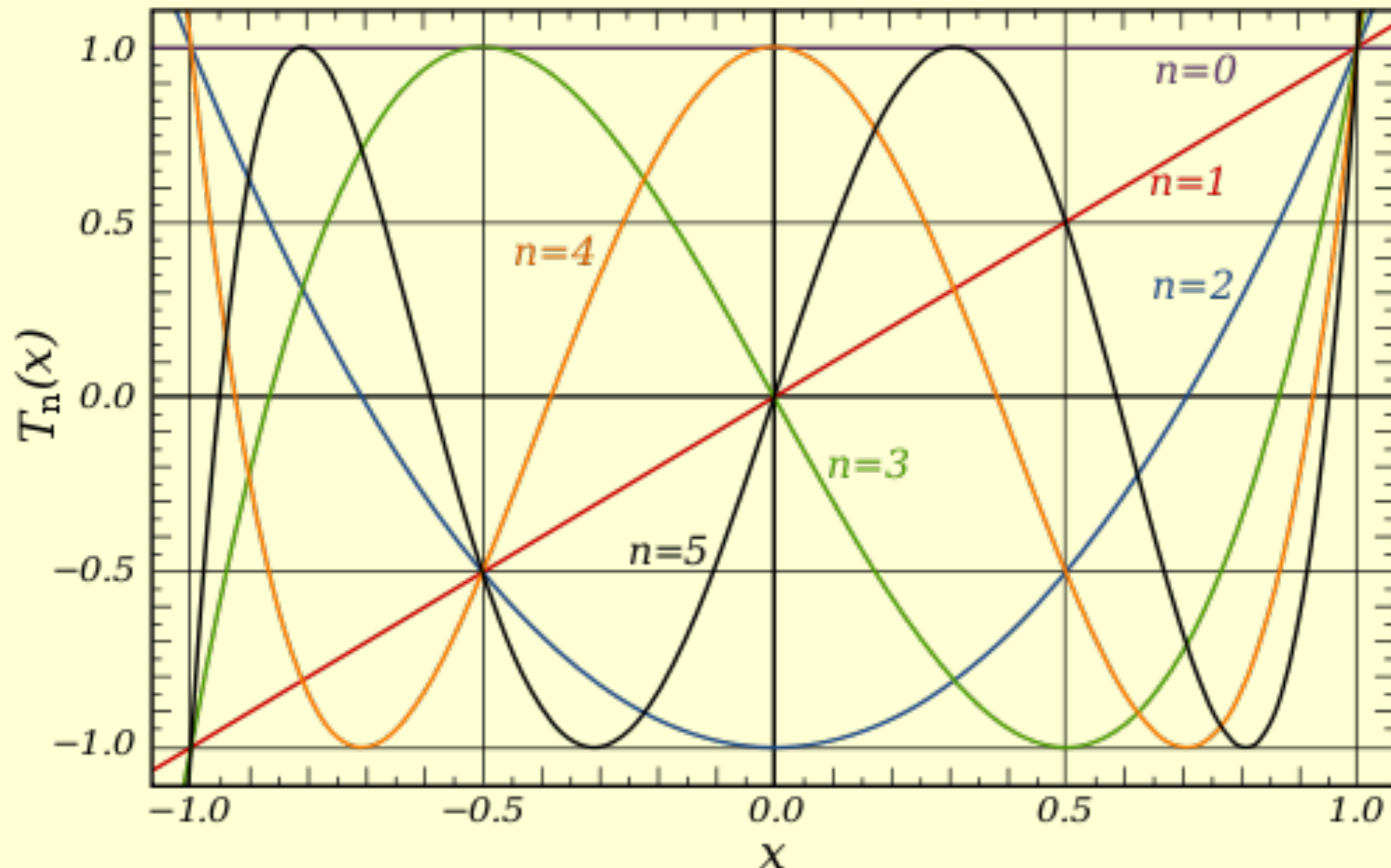
$$x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right), \quad k = 1, 2, \dots, n$$



Los polinomios de Chebyshev son óptimos y resuelven varios problemas de optimización para polinomios definidos en el intervalo  $[-1, 1]$ . En particular, si llamamos  $\widehat{T}_n(x) = 2^{1-n}T_n(x)$  al polinomio mónico, se tiene que

$$\max_{x \in [-1, 1]} |\widehat{T}_n(x)| = \min \left\{ \max_{x \in [-1, 1]} |q_n(x)| : q_n \text{ mónico de grado } n \right\}$$

Es decir,  $\widehat{T}_n(x)$  es el que presenta la *menor desviación del 0* entre todos los polinomios mónicos de ese grado.



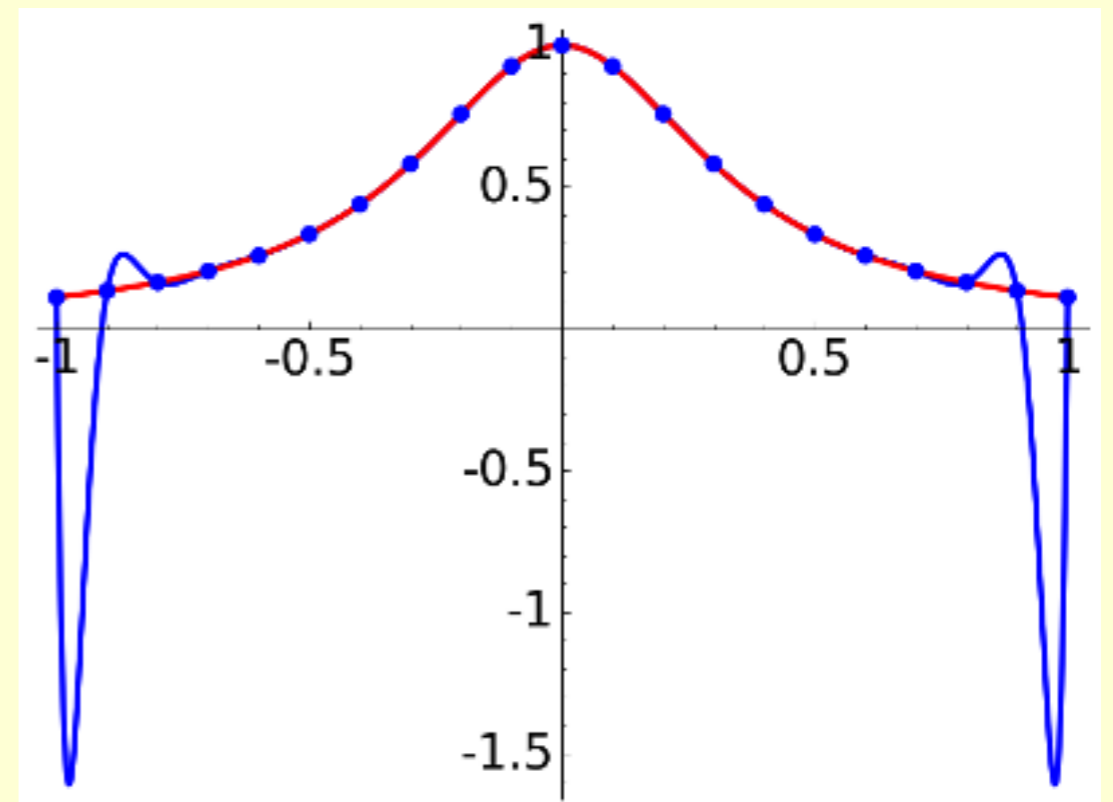
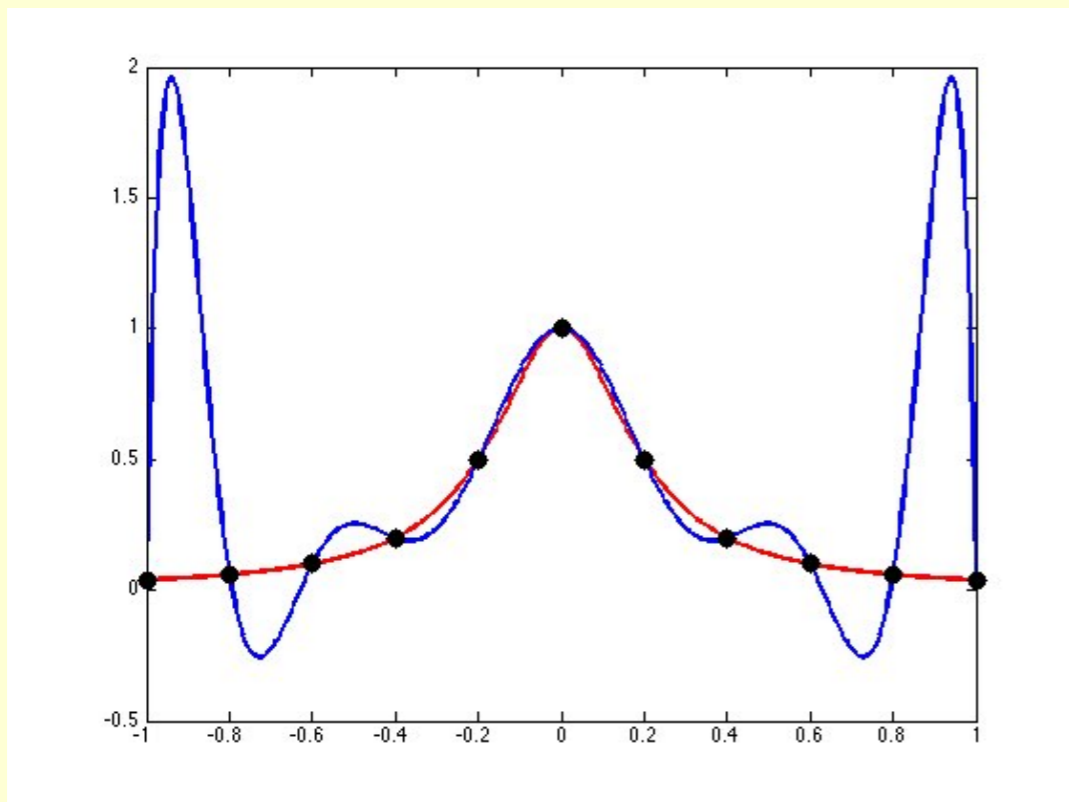
# INTERPOLACIÓN POLINÓMICA

Sea  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , queremos aproximar  $f$  por un polinomio  $p$  de grado fijo  $n$  y que coincida en una serie de puntos o nodos  $x_i \in [-1, 1]$ , i.e.  $f(x_i) = p(x_i)$ .

Una manera de obtener existencia y unicidad es mediante los *polinomios interpoladores de Lagrange* en  $n + 1$  nodos

$$p(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i)L_i(x), \quad L_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i}(x - x_j)}{\prod_{j \neq i}(x_i - x_j)}$$

A pesar de que  $p(x_i) = f(x_i)$  (ya que  $L_i(x_j) = \delta_{ij}$ ) la coincidencia no es en todo el intervalo, incluso si aumentamos el número de nodos. A esto se le conoce como el **fenómeno de Runge**. Por ejemplo, para la función  $f(x) = (1 + 25x^2)^{-1}$ , se tiene que



¿Existe alguna disposición de los nodos de la manera que la aproximación sea óptima en el sentido de que  $\max_{x \in [-1, 1]} |f(x) - p(x)|$  sea mínimo?

**TEOREMA:** Para cada  $n$  la mejor aproximación polinómica  $p_n$  de una función  $f$  tal que  $\max_{x \in [-1,1]} |f(x) - p_n(x)|$  sea mínimo viene dada por el polinomio de Chebyshev  $T_n(x)$  en los nodos de Chebychev, i.e.

$$x_k = \cos \left( \frac{2k + 1}{2n + 2} \pi \right), \quad k = 0, 1, \dots, n$$

Una explicación de este hecho viene dada por el **teorema de Cauchy** para el error, que dice que si  $f \in C^n$  y existe  $f^{(n+1)}$  para  $x \in (-1, 1)$ , entonces, para el polinomio  $p_n$  que interpola a  $f$  en los nodos  $x_0, x_1, \dots, x_n$  en  $[-1, 1]$  y para cada  $x \in [-1, 1]$  existe  $\xi_x \in (-1, 1)$  tal que

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \omega_n(x)$$

donde  $\omega_n(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_n)$  es el *polinomio nodal*.

La parte con  $\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$  no depende de los nodos  $x_i$ , mientras que  $\omega_n(x)$  no depende de la función  $f$ . Con lo cual debemos tomar los nodos tal que el polinomio nodal  $\omega_n(x)$ , que es mónico, sea el que tome valores más pequeños en el intervalo  $[-1, 1]$ . Ese polinomio es precisamente el polinomio de Chebyshev  $T_{n+1}(x)$ .

Los nodos de Chebyshev también aparecen en el problema de optimizar **fórmulas de cuadratura de Gauss** del tipo

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \sim \sum_{i=0}^n \lambda_i f(x_i)$$

En los nodos de Chebyshev se asegura un *grado de exactitud* igual a  $2n + 1$ , es decir, suponiendo que  $f$  es un polinomio, el grado máximo para que la fórmula sea exacta es  $2n+1$ . El peso  $1/\sqrt{1-x^2}$  es precisamente el que hace que los polinomios de Chebyshev sean **ortogonales**.

# POLINOMIOS DISCRETOS DE CHEBYSHEV

P. L. Chebyshev, *Sur une nouvelle série*, 1858.

## Sur une nouvelle série.

---

Dans mon Mémoire sur les fractions continues, présenté à l'Académie en 1855 et publié dans ses *Mémoires* (Tome III), je suis parvenu à une formule qui, d'après les valeurs données d'une fonction, affectées d'erreurs quelconques, fournit directement sa valeur sous la forme d'un polynome avec des coefficients indiqués par la *méthode des moindres carrés*. Cette formule comprend, comme cas particuliers, les développements connus des fonctions suivant les *cosinus* des arcs multiples et suivant les valeurs de certaines fonctions désignées par  $X^{(n)}$ . On tire de notre formule plusieurs autres séries, en faisant différentes hypothèses particulières sur la suite des valeurs connues de la fonction cherchée. Dans l'hypothèse la plus simple, où l'on suppose ces valeurs équidistantes, telles que

$$u_1 = f(h), \quad u_2 = f(2h), \dots, u_n = f(nh),$$

# POLINOMIOS DISCRETOS DE CHEBYSHEV

P. L. Chebyshev, *Sur une nouvelle série*, 1858.

P. L. Chebyshev, *Sur l'interpolation des valeurs équidistantes*, 1875.

## Sur l'interpolation des valeurs équidistantes.

§ 1. Si l'on cherche par la méthode des *moindres carrés* l'expression d'une certaine fonction  $f(x)$  sous la forme d'un polynôme, les valeurs de la fonction  $f(x)$  dont on se sert pour déterminer son expression étant

$$f(1), f(2), \dots, f(m-1),$$

le polynôme cherché, comme on le sait, est donné \*) par la formule

$$(1) \quad \frac{\sum_1^m \varphi_0(x) f(x)}{\sum_1^m \varphi_0^2(x)} \varphi_0(x) + \frac{\sum_1^m \varphi_1(x) f(x)}{\sum_1^m \varphi_1^2(x)} \varphi_1(x) + \dots,$$

où

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots$$



# POLINOMIOS DISCRETOS DE CHEBYSHEV

P. L. Chebyshev, *Sur une nouvelle série*, 1858.

P. L. Chebyshev, *Sur l'interpolation des valeurs équidistantes*, 1875.

Para una función  $F(x)$  Chebyshev buscaba la mejor aproximación polinómica dados los valores de  $F$  en ciertos puntos equidistantes  $x_1, x_2, \dots, x_N$ , usando el método de *mínimos cuadrados*. Para ello buscaba familias de polinomios  $P_n(x)$  tales que

$$F(x) \sim \sum_{n=1}^k A_n P_n(x), \quad k < N$$

y que el error cuadrático fuese mínimo. Además debía ocurrir que

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P_k(x_i) P_m(x_i) = \begin{cases} 0, & \text{si } k < m \\ 1, & \text{si } k = m \end{cases}$$

Esta idea se puede extender cuando se consideran *pesos* de la forma  $\rho(x_i) > 0$  con  $\sum_{i=1}^N \rho(x_i) = 1$  (distribución de probabilidad discreta) asignados a cada uno de los valores de  $F$ .

- Si  $\rho$  es binomial  $\rightarrow$  Polinomios de Krawtchouk.
- Si  $\rho$  es Poisson  $\rightarrow$  Polinomios de Charlier.
- Si  $\rho$  es Pascal  $\rightarrow$  Polinomios de Meixner.
- Si  $\rho$  es hipergeométrica  $\rightarrow$  Polinomios de Hahn.

Estos son los conocidos como *polinomios ortogonales clásicos de variable discreta*.

# POLINOMIOS DE HERMITE

P. L. Chebyshev, *Sur le Développement des Fonctions à une seule variable*, 1859.

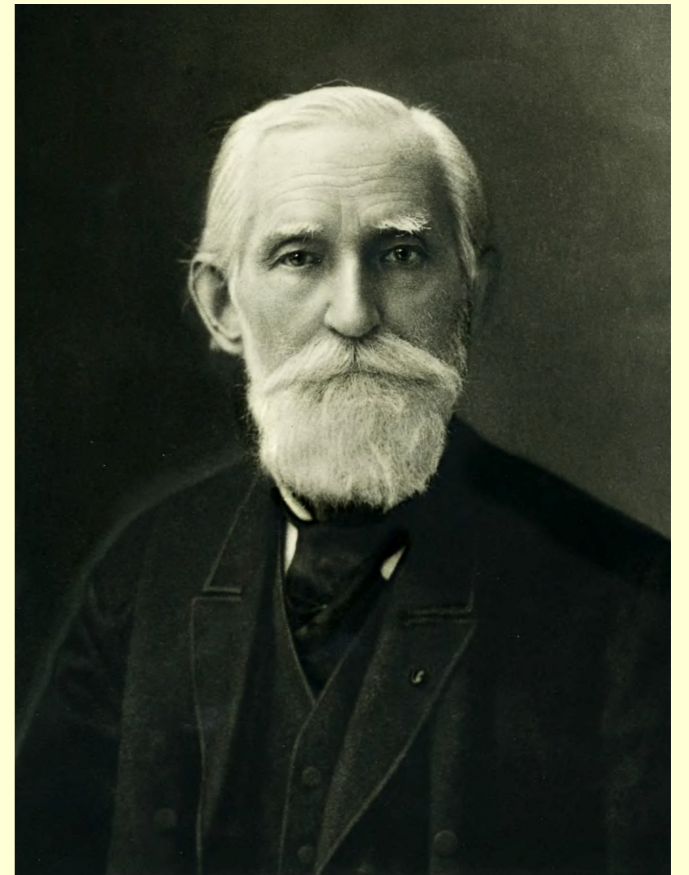
## Sur le développement des fonctions à une seule variable.

§ 1. Dans mon Mémoire *Sur les fractions continues* j'ai montré que si l'on cherche, d'après les valeurs données de la fonction  $F(x)$

$$F(x_1), F(x_2), \dots, F(x_n),$$

son expression approximative sous la forme d'un polynome de degré quelconque, avec des coefficients indiqués par la *méthode des moindres carrés*, on parvient au développement de  $F(x)$  en séries analogues à celles de Fourier, et qui sont ordonnées suivant les dénominateurs des réduites de la fraction continue résultant du développement de l'expression

$$\sum \frac{\theta^2(x_i)}{x - x_i},$$



# POLINOMIOS DE HERMITE

P. L. Chebyshev, *Sur le Développement des Fonctions à une seule variable*, 1859.

La misma idea de antes de aproximar una función  $F(x)$  mediante el método de mínimos cuadrados se puede aplicar a un número infinito de polinomios  $p_n(x)$  tales que

$$F(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n p_n(x)$$

y además los puntos estuviesen distribuidos acorde a una **distribución Gaussiana** de tal manera que

$$\int_{\mathbb{R}} p_n(x) p_m(x) e^{-x^2} = 0, \quad n \neq m$$

En ese caso Chebyshev determinó que los polinomios se podían encontrar como los denominadores de las acotaciones de la siguiente **fracción continua**

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{x-t} dt = \frac{2}{2x - \frac{2}{2x - \frac{4}{2x - \frac{6}{\ddots}}}} \sim \frac{\tilde{H}_n(x)}{H_n(x)}$$

Estos polinomios fueron previamente definidos de manera poco reconocible por Laplace (1810) en conexión con problemas de **teoría de probabilidad**. Los primeros polinomios vienen dados por

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2, \quad H_3(x) = 8x^3 - 12x, \quad \dots$$

C. Hermite (1864) *Sur un nouveau d'evveloppement en série des fonctions* los estudió para varias dimensiones y desde entonces llevan su nombre.

## SUR UN NOUVEAU DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE DES FONCTIONS.

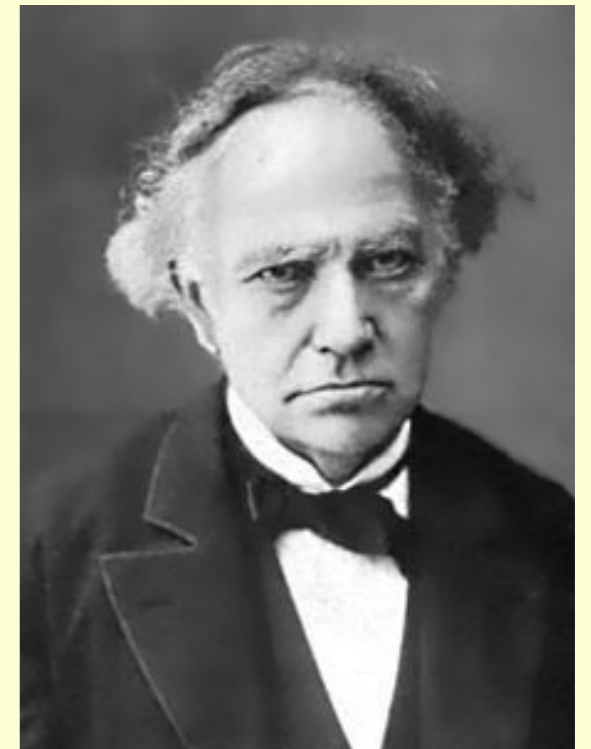
---

*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LVIII, 1864 (I),  
p. 93 et 266.

---

Les fonctions uniformes de plusieurs variables à périodes simultanées par lesquelles MM. Weierstrass et Riemann ont résolu le problème de l'inversion des intégrales de différentielles algébriques quelconques sont représentées, comme l'on sait, par le quotient de deux séries telles que

$$\sum e^{-\varphi(x+m, y+n, z+p, \dots)},$$



Estos polinomios fueron previamente definidos de manera poco reconocible por Laplace (1810) en conexión con problemas de **teoría de probabilidad**. Los primeros polinomios vienen dados por

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2, \quad H_3(x) = 8x^3 - 12x, \quad \dots$$

C. Hermite (1864) *Sur un nouveau d'evveloppement en série des fonctions* los estudió para varias dimensiones y desde entonces llevan su nombre.

Descubrió además que estos polinomios eran **ortogonales** con respecto a la **distribución Gaussiana**

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)H_m(x)e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}2^n n! \delta_{nm}$$

y que satisfacen la ecuación diferencial

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0$$

aparte de que se podían definir mediante la **fórmula de Rodrigues**

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$$

## OSCILADOR ARMÓNICO CUÁNTICO

La ecuación de Schrödinger no-relativista en mecánica cuántica viene dada por

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{x}, t) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{x}, t) \right] \Psi(\vec{x}, t)$$

donde  $i$  es la unidad imaginaria,  $\hbar = h/2\pi$  es la constante reducida de Planck,  $\Delta$  es el Laplaciano,  $\Psi$  es posición de una partícula de masa  $m$  sujeto a un potencial  $V$ .

En el caso unidimensional, cuando el potencial es cuadrático de la forma

$$V(x, t) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

donde  $\omega$  es la frecuencia angular, se tiene la ecuación de ondas para el *oscilador armónico cuántico*.

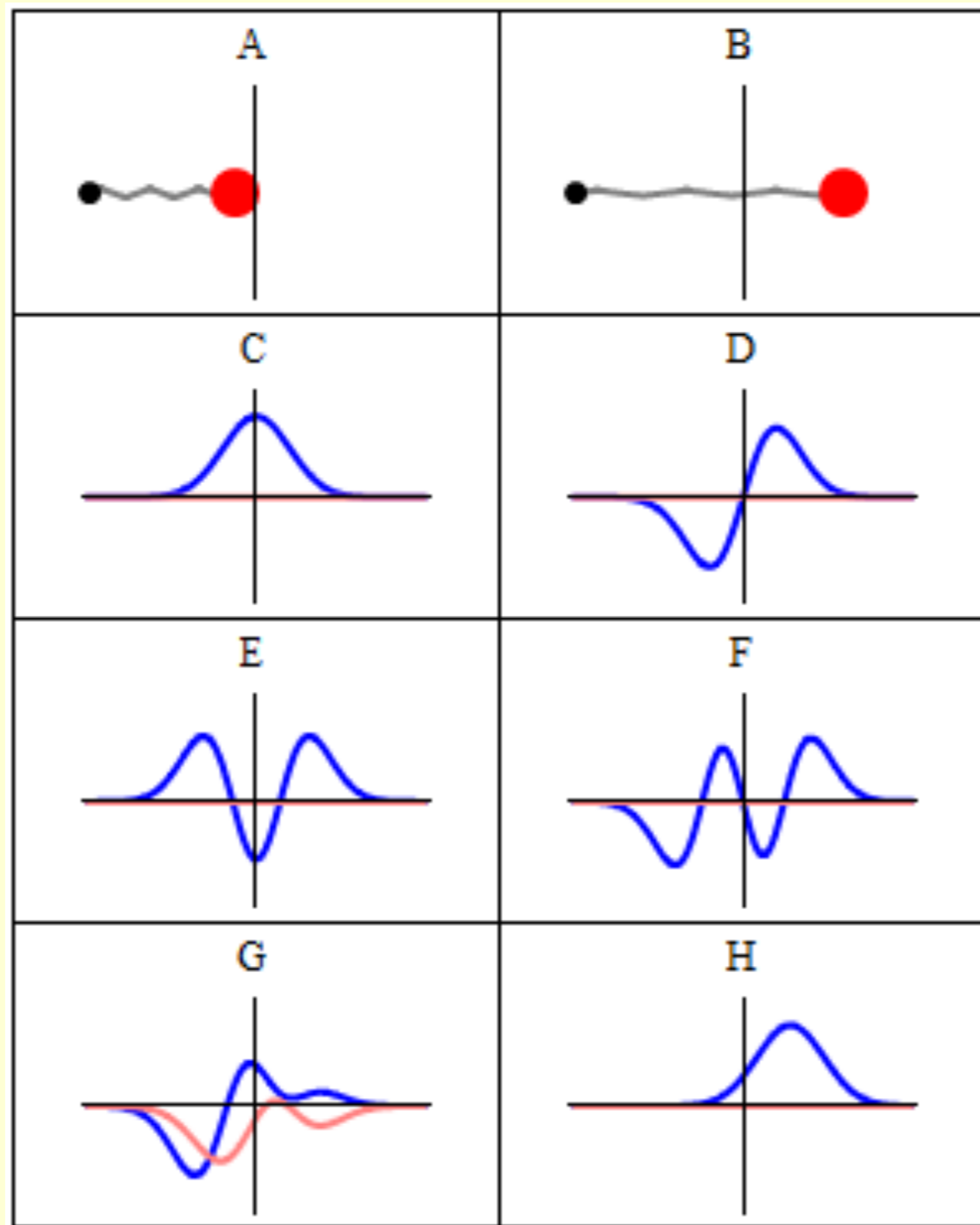
Normalizando  $\hbar = m\omega$  y haciendo separación de variables  $\Psi(x, t) = \varphi(t)\psi(x)$  se tiene que  $\psi(x)$  satisface la ecuación diferencial

$$\psi''(x) - x^2\psi(x) = \lambda\psi(x)$$

cuyas soluciones normalizadas vienen dadas por las **funciones de Hermite**

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} e^{-x^2/2} H_n(x)$$

donde  $H_n$  son los polinomios de Hermite. El espectro es discreto y viene dado por  $\lambda_n = -(2n + 1)$ , que corresponden con los niveles de energía (cuantificados).



Oscilador armónico newtoniano

Oscilador armónico cuántico  
(estados puros)

Estado coherente

Estas funciones de Hermite tienen la peculiaridad además de que son autofunciones de la **transformada de Fourier**

$$\hat{\psi}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(t) e^{ixt} dt = (i)^n \psi_n(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Aparecen también en combinatoria, proc. de Orstein-Uhlenbeck, matrices aleatorias...

# POLINOMIOS DE LAGUERRE

P. L. Chebyshev, *Sur le Développement des Fonctions à une seule variable*, 1859.

Con la misma motivación que para los polinomios de Hermite pero ahora para la **distribución exponencial** en  $[0, \infty)$ , Chebyshev también definió unos polinomios que se podían encontrar como los denominadores de las acotaciones de la siguiente fracción continua

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{x-t} dt = \frac{1}{x-1 - \frac{1^2}{x-3 - \frac{2^2}{x-5 - \frac{3^2}{\ddots}}}} \sim \frac{\tilde{L}_n(x)}{L_n(x)}$$

E. N. Laguerre, *Sur l'intégrale*  $\int_x^{\infty} \frac{e^{-x} dx}{x}$ , 1879.

*Sur l'intégrale*  $\int_x^{\infty} \frac{e^{-x} dx}{x}$ ; par M. LAGUERRE.

(Séances des 14 et 28 février 1879.)

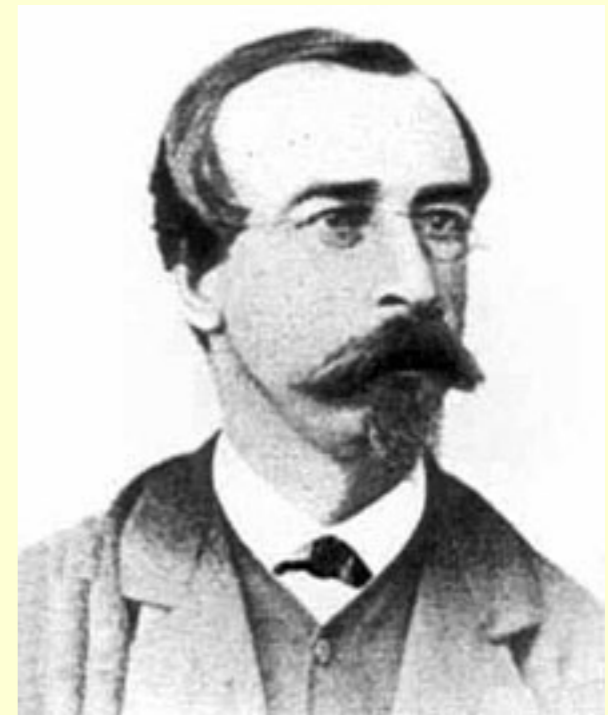
I.

1. L'intégration par parties donne, en posant

$$F(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1 \cdot 2}{x^3} - \dots \pm \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)}{x^n},$$

la relation suivante :

$$(1) \quad \int_x^{\infty} \frac{e^{-x} dx}{x} = e^{-x} F(x) \mp 1 \cdot 2 \dots n \int_x^{\infty} \frac{e^{-x} dx}{x^{n+1}}.$$





# POLINOMIOS DE LAGUERRE

P. L. Chebyshev, *Sur le Développement des Fonctions à une seule variable*, 1859.

Con la misma motivación que para los polinomios de Hermite pero ahora para la **distribución exponencial** en  $[0, \infty)$ , Chebyshev también definió unos polinomios que se podían encontrar como los denominadores de las acotaciones de la siguiente fracción continua

$$\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{x-t} dt = \frac{1}{x-1 - \frac{1^2}{x-3 - \frac{2^2}{x-5 - \frac{3^2}{\ddots}}}} \sim \frac{\tilde{L}_n(x)}{L_n(x)}$$

E. N. Laguerre, *Sur l'intégrale*  $\int_x^\infty \frac{e^{-x} dx}{x}$ , 1879.

Lo novedoso de Laguerre es que estudia propiedades generales de estos polinomios, como que verifican la ecuación diferencial

$$xL_n''(x) + (1-x)L_n'(x) + nL_n(x) = 0$$

y además son **ortogonales** con respecto a la función exponencial negativa

$$\int_0^\infty L_n(x)L_m(x)e^{-x} dx = \delta_{nm}$$

Posteriormente un alumno de Chebyshev, N. Y. Sonin, los estudió de manera general dependientes de un parámetro  $\alpha > -1$ , para los cuales eran ortogonales con respecto al peso  $x^\alpha e^{-x}$ , la **distribución Gamma**.

## FUNCIONES DE ONDA ESTACIONARIAS PARA EL ÁTOMO DE HIDRÓGENO

En la misma línea que para el oscilador armónico cuántico, las funciones de onda vienen dada por la ecuación de Schrödinger

$$\left[ -\frac{\hbar}{2\mu} \Delta - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right] \Psi(r, \vartheta, \varphi) = E\Psi(r, \vartheta, \varphi)$$

para ciertas constantes asociadas al sistema y  $\Delta$  es el Laplaciano en coordenadas esféricas.

Haciendo separación de variables se tiene que las funciones de onda vienen dadas por

$$\psi_{n,l,m}(r, \vartheta, \varphi) = C e^{-cr} r^l L_{n-l-1}^{(2l+1)}(cr) Y_{l,m}(\vartheta, \varphi)$$

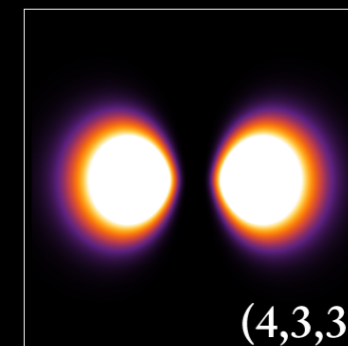
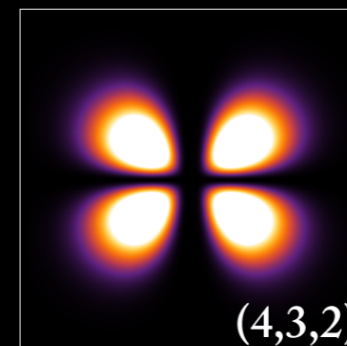
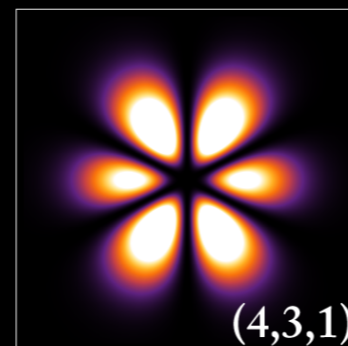
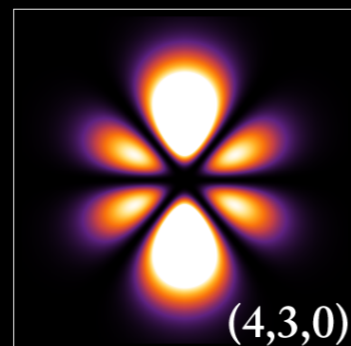
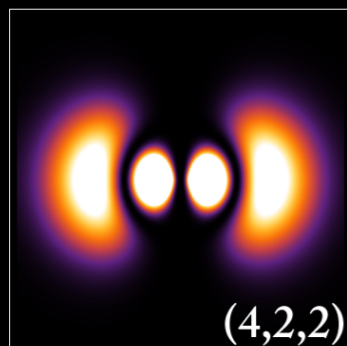
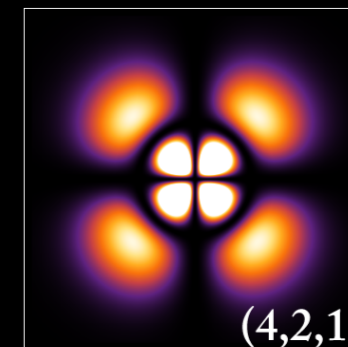
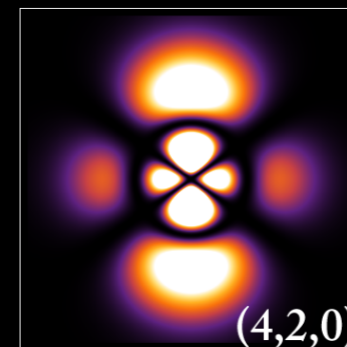
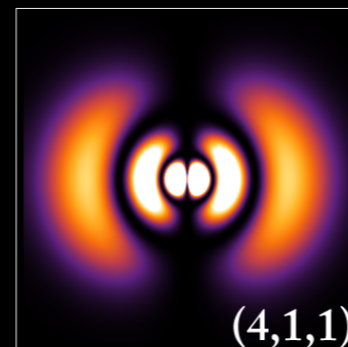
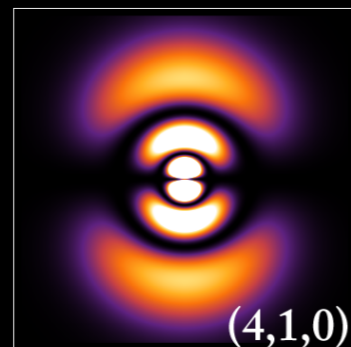
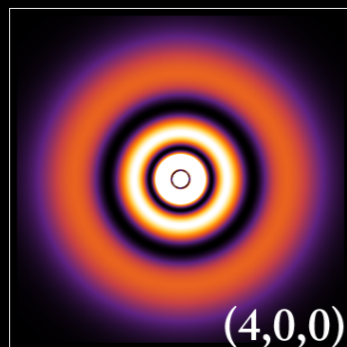
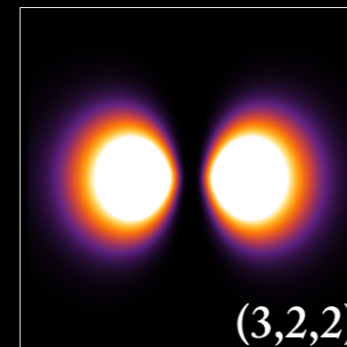
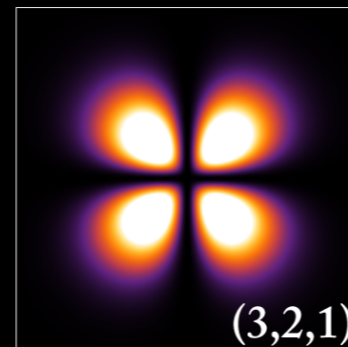
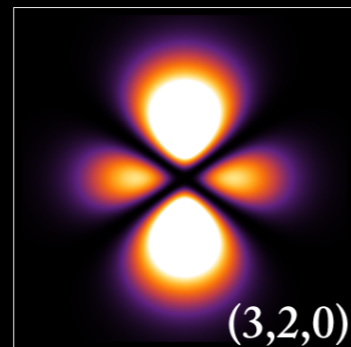
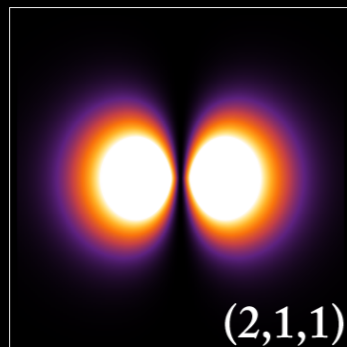
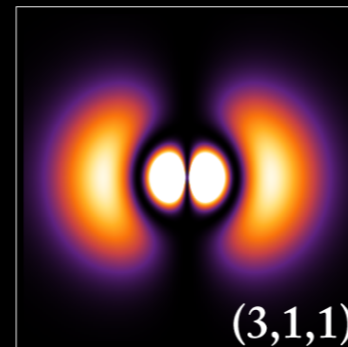
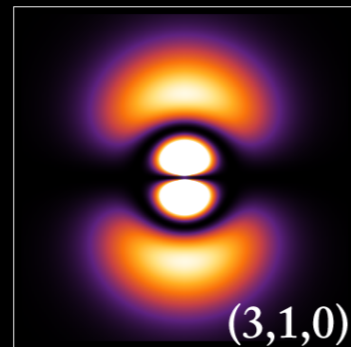
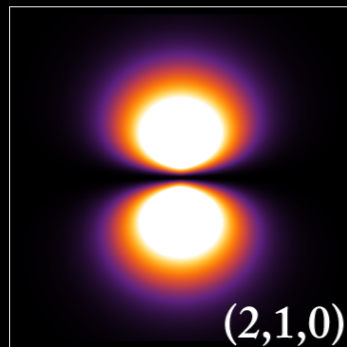
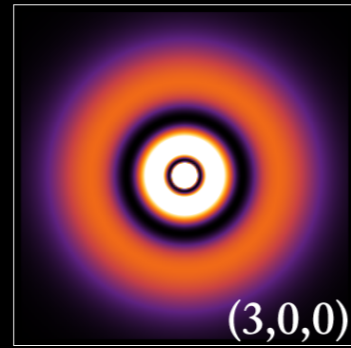
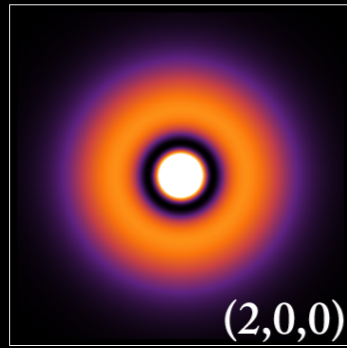
donde  $C$  y  $c$  son ciertas constantes que dependen de  $n, l, m$ ,  $L_n^{(\alpha)}$  son los polinomios de Laguerre y  $Y_l^m$  son los **armónicos esféricos**. La energía (cuantificada) viene dada por

$$E = -\frac{1}{2(n+l+1)^2}$$

# Hydrogen Wave Function

Probability density plots.

$$\psi_{nlm}(r, \vartheta, \varphi) = \sqrt{\left(\frac{2}{na_0}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]} e^{-\rho/2} \rho^l L_{n-l-1}^{2l+1}(\rho) \cdot Y_{lm}(\vartheta, \varphi)}$$



# POLINOMIOS DE JACOBI

K. G. J. Jacobi, *Untersunshungen über die Differentialgleichung de hypergeometrischen Reihe*, 1859.

## Untersuchungen über die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe \*).

(Aus den hinterlassenen Papieren von C. G. J. Jacobi mitgetheilt durch Herrn E. Heine.)

### §. 1.

**E**s ist seit *Euler* bekannt, dafs das bestimmte Integral

$$y = \int_0^1 V du,$$

in welchem

$$V = u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}$$

gesetzt ist, der Differentialgleichung

$$(1.) \quad x(1-x)y'' + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)x)y' - \alpha\beta y = 0$$



# POLINOMIOS DE JACOBI

K. G. J. Jacobi, *Untersunshungen über die Differentialgleichung de hypergeometrischen Reihe*, 1859.

Generaliza los polinomios de Legendre haciéndolos depender de 2 parámetros  $\alpha, \beta > -1$ . Están relacionados con las soluciones polinómicas de la **ecuación hipergeométrica de Gauss**

$$x(1-x)y''(x) + (\gamma - (\alpha + \beta + 1))y'(x) - \alpha\beta y(x) = 0$$

cuyas soluciones se pueden escribir en términos de la **función hipergeométrica de Gauss**

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma|x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{x^2}{2} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{x^n}{n!}$$

Jacobi demostró que los polinomios definidos por

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)} {}_2F_1 \left( -n, n + \alpha + \beta + 1; \alpha + 1 \left| \frac{1-x}{2} \right. \right)$$

eran **ortogonales** en el intervalo  $[-1, 1]$  con respecto al peso  $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ . Además verificaban la ecuación diferencial

$$(1-x^2)(P_n^{(\alpha, \beta)}(x))'' + (\beta - \alpha + x(\alpha + \beta + 2))(P_n^{(\alpha, \beta)}(x))' + n(n + \alpha + \beta + 1)P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = 0$$

El caso particular de  $\alpha = \beta = 0$  recupera los polinomios de Legendre y el de  $\alpha = \beta = -1/2$  el de los polinomios de Chebyshev.

## EQUILIBRIO ELECTROSTÁTICO

(Stieltjes, 1885) Se considera una barra de longitud 2 y llamamos  $-1$  y  $1$  a sus extremos

- En cada uno de los extremos ponemos una carga positiva **fija** de masa  $(\beta + 1)/2$  y  $(\alpha + 1)/2$  respectivamente,  $\alpha, \beta > -1$ .
- Ahora se colocan  **$n$  cargas positivas** de masa 1 a lo largo del segmento  $[-1, 1]$  en las posiciones iniciales  $x_1, \dots, x_n$  con  $-1 < x_1 < \dots < x_n < 1$ .
- Dejamos que se muevan las cargas **libremente**.

Como la fuerza es inversamente proporcional a la distancia relativa (1D), la energía total del sistema  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  tiene dos componentes, una de la interacción de las cargas internas y otra de la interacción con las cargas fijas en los extremos. Por lo tanto

$$E(X) = E_m(X) + \sum_{k=1}^n \varphi(x_k)$$

donde

$$E_m(X) = - \sum_{1 \leq k < j \leq n} \log |x_k - x_j|, \quad \varphi(x) = -\frac{\beta + 1}{2} \log |x + 1| - \frac{\alpha + 1}{2} \log |x - 1|$$

¿Cuáles son las posiciones de equilibrio  $X^* = \{x_1^*, \dots, x_n^*\}$  del sistema que hacen que la energía  $E(X)$  sea mínima?

**TEOREMA:** Sea  $X^* = \{x_1^*, \dots, x_n^*\}$  las posiciones de equilibrio del problema electrostático. Entonces  $x_k^*, k = 1, \dots, n$ , son los ceros o raíces del polinomio ortogonal de Jacobi  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ .

d. Si  $X^*$  es la configuración del mínimo de energía se debe tener que

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_k} E(X) \right|_{X=X^*} = 0, \quad k = 1, \dots, n$$

Sea  $y(x) = \prod_{j=1}^n (x - x_j^*)$ . Se tiene, por un lado, que

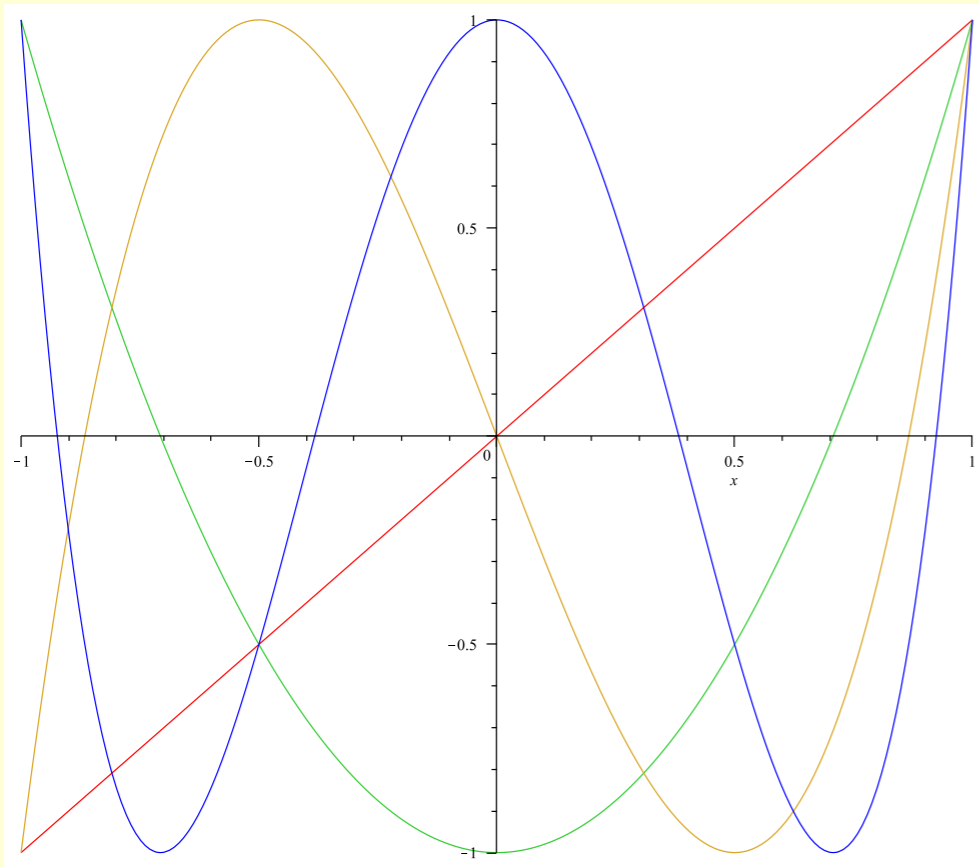
$$\left. \frac{\partial}{\partial x_k} E_m(X) \right|_{X=X^*} = - \sum_{1 \leq j \leq n, j \neq k} \frac{1}{x_k^* - x_j^*} = - \frac{y''(x_k^*)}{2y'(x_k^*)}$$

y por otro lado

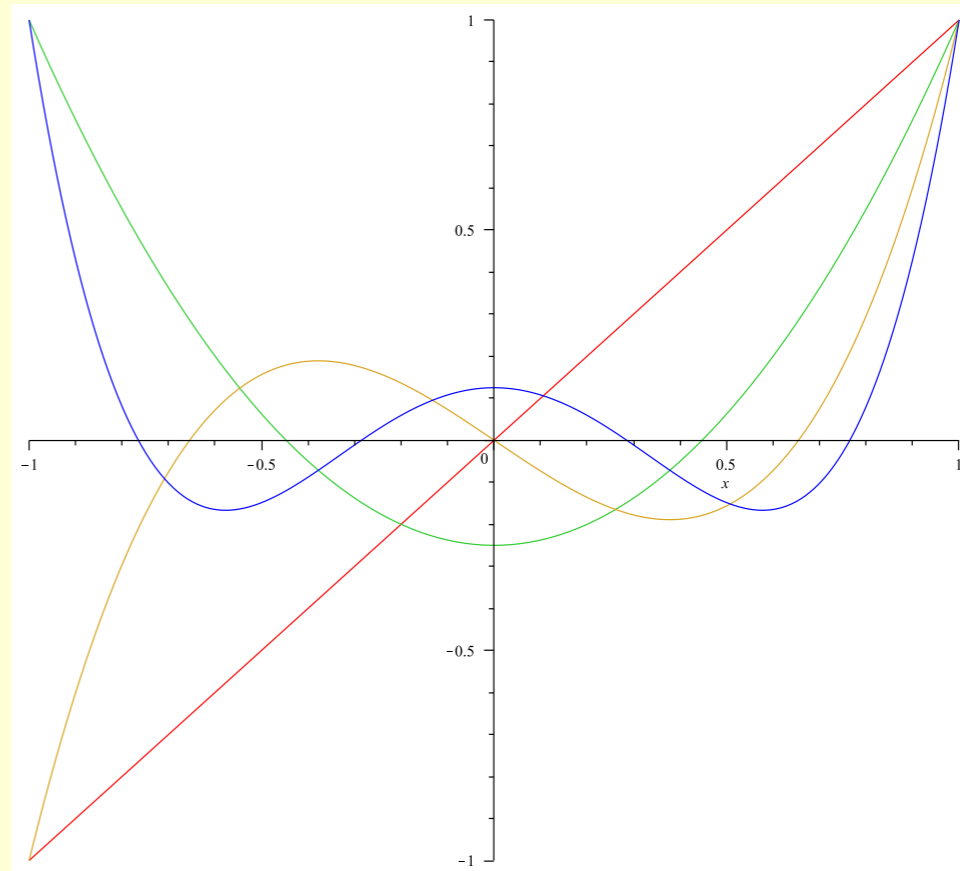
$$\varphi'(x_k^*) = -\frac{1}{2} \left( \frac{\beta + 1}{x_k^* + 1} + \frac{\alpha + 1}{x_k^* - 1} \right)$$

Por lo tanto  $\left. \frac{\partial}{\partial x_k} E(X) \right|_{X=X^*} = 0$  si y sólo si  $y''(x_k^*) - 2\varphi'(x_k^*)y'(x_k^*) = 0$ .

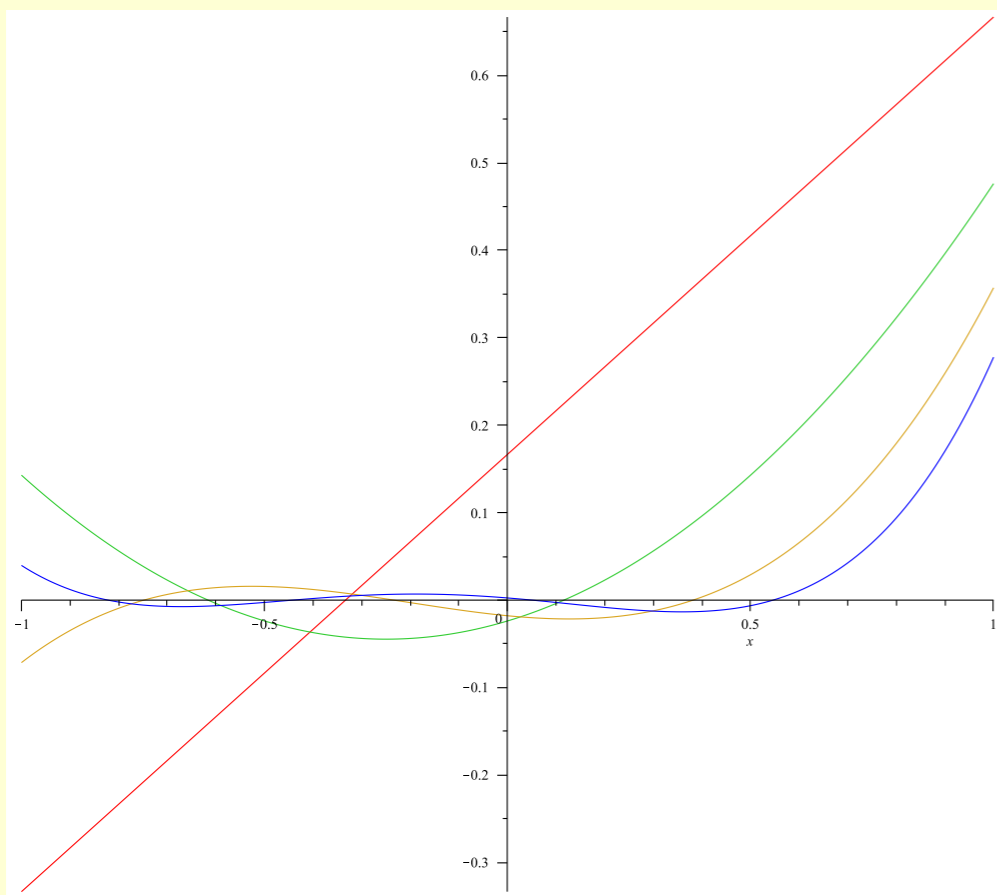
Esta ecuación diferencial se identifica con la de Jacobi y por lo tanto debe ser igual a  $\lambda_n y(x_k^*) / (1 - (x_k^*)^2)$ . Para que sea 0 debe implicar que  $x_k^*$  coincida con un cero o raíz del polinomio de Jacobi  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ .



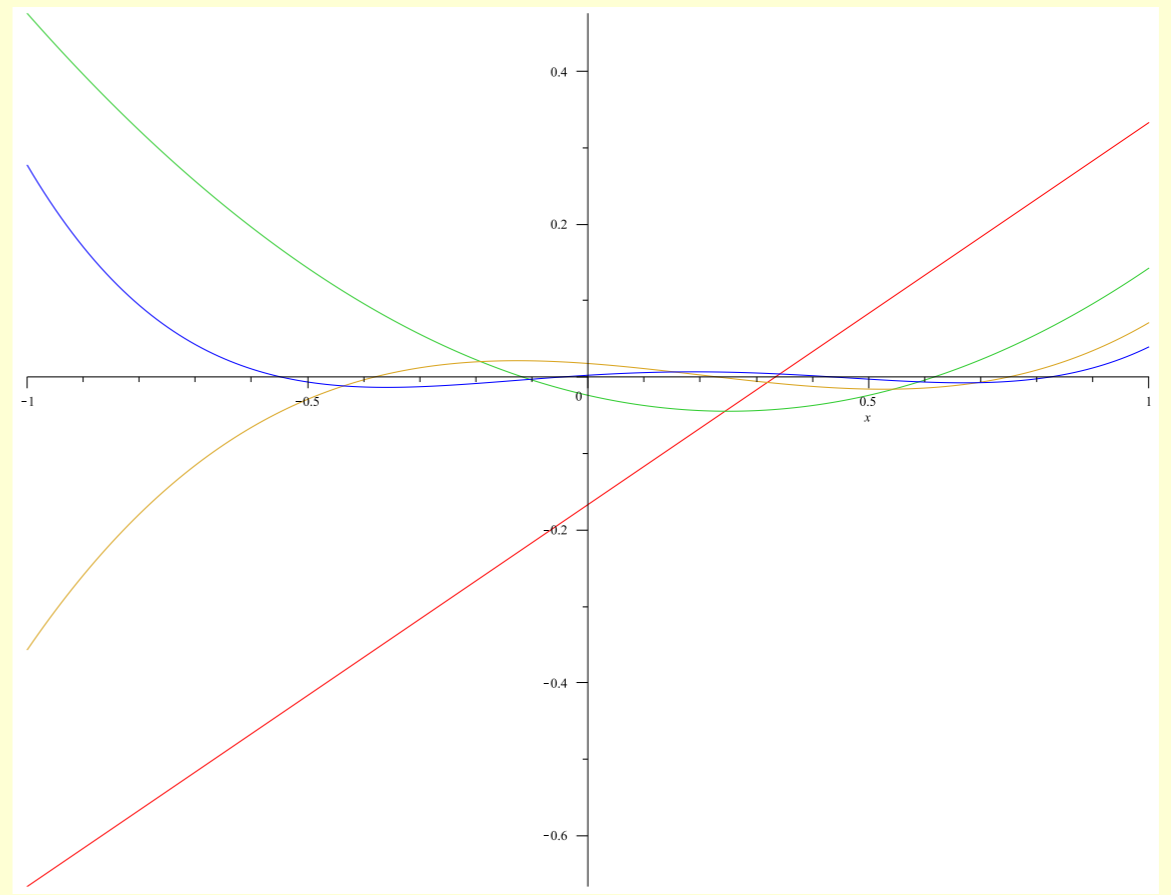
$$\alpha = \beta = -1/2$$



$$\alpha = \beta = 1$$



$$\alpha = 3, \beta = 1$$



$$\alpha = 1, \beta = 3$$



A partir de 1894 con T. S. Stieltjes comienza la teoría general de polinomios ortogonales con respecto a cualquier distribución  $d\mu(x)$ . En particular, toda familia de polinomios ortonormales verifica una **relación de recurrencia a tres términos**

$$xp_n(x) = a_{n+1}p_{n+1}(x) + b_np_n(x) + a_np_{n-1}(x), \quad p_{-1} = 0, \quad p_0 = 1$$

donde  $a_n > 0$  y  $b_n \in \mathbb{R}$ . Existe una correspondencia uno a uno entre medidas de probabilidad y operadores de Jacobi construidos a partir de  $a_n, b_n$  (teorema espectral o Teorema de Favard, 1935).

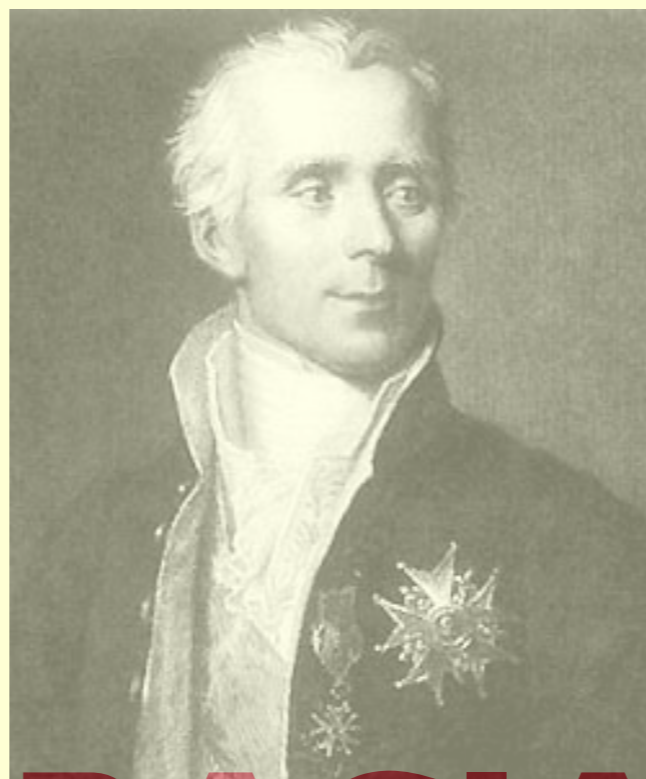
En 1939 aparece la monografía de G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, que consolidó la teoría general como la conocemos hoy en día.

## OTRAS APLICACIONES

- Teoría de operadores.
- Fracciones continuas.
- Problemas de momentos.
- Teoría de representación grupos.
- Combinatoria.
- Información cuántica.
- Procesos estocásticos.
- Matrices aleatorias.
- ...

## EXTENSIONES

- Polinomios ortogonales discretos.
- $q$ -polinomios ortogonales.
- Polinomios ortogonales en varias variables.
- Polinomios ortogonales en el círculo unidad.
- Polinomios ortogonales a valores matriciales.
- Polinomios ortogonales múltiples.
- Polinomios ortogonales de Sobolev.
- ...



**GRACIAS**

