Teoría de la aproximación para funciones matriciales

Manuel Domínguez de la Iglesia

Instituto de Matemáticas C.U., UNAM

Instituto Tecnológico Autónomo de México (ITAM)
Ciudad de México, 7 de octubre de 2016

Índice

Índice

Polinomios ortogonales

Sea ω una medida positiva sobre $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$. Asociado a ω se considera el espacio de funciones ponderado

$$L^2_\omega(\mathcal{S}) = \left\{ f : \mathcal{S} \to \mathbb{R} : \int_{\mathcal{S}} f^2(x) d\omega(x) < \infty \right\}$$

$L^2_\omega(\mathcal{S})$ es un espacio de Hilbert con el producto interno ponderado y norma

$$(f, g)_\omega = \int_{\mathcal{S}} f(x) g(x) d\omega(x), \quad \|f\|^2_\omega = (f, f)_\omega$$

Siempre va a ser posible construir una sucesión $(p_n)_n$ de polinomios tal que $\deg p_n = n$ y que sean ortogonales con respecto al producto escalar $(\cdot, \cdot)_\omega$ (Gram-Schmidt, momentos, etc)

$$(p_n, p_m)_\omega = \int_{\mathcal{S}} p_n(x) p_m(x) d\omega(x) = \|p_n\|^2_\omega \delta_{nm}, \quad n, m \geq 0$$

Toda $f \in L^2_\omega(\mathcal{S})$ se puede aproximar mediante la llamada serie generalizada de Fourier de f

$$(Sf)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}_k p_k(x), \quad \hat{f}_k = \frac{(f, p_k)_\omega}{\|p_k\|^2_\omega}$$

Polinomios ortogonales

Sea ω una medida positiva sobre $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$. Asociado a ω se considera el espacio de funciones ponderado

$$L^2_\omega(\mathcal{S}) = \left\{ f : \mathcal{S} \to \mathbb{R} : \int_{\mathcal{S}} f^2(x) d\omega(x) < \infty \right\}$$

$L^2_\omega(\mathcal{S})$ es un espacio de Hilbert con el producto interno ponderado y norma

$$(f, g)_\omega = \int_{\mathcal{S}} f(x) g(x) d\omega(x), \quad \|f\|^2_\omega = (f, f)_\omega$$

Siempre va a ser posible construir una sucesión $(p_n)_n$ de polinomios tal que $\deg p_n = n$ y que sean ortogonales con respecto al producto escalar $(\cdot, \cdot)_\omega$ (Gram-Schmidt, momentos, etc)

$$(p_n, p_m)_\omega = \int_{\mathcal{S}} p_n(x) p_m(x) d\omega(x) = \|p_n\|^2_\omega \delta_{nm}, \quad n, m \geq 0$$

Toda $f \in L^2_\omega(\mathcal{S})$ se puede aproximar mediante la llamada serie generalizada de Fourier de f

$$(Sf)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}_k p_k(x), \quad \hat{f}_k = \frac{(f, p_k)_\omega}{\|p_k\|^2_\omega}$$

Polinomios ortogonales

Sea ω una medida positiva sobre $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$. Asociado a ω se considera el espacio de funciones ponderado

$$L^2_\omega(\mathcal{S}) = \left\{ f : \mathcal{S} \to \mathbb{R} : \int_{\mathcal{S}} f^2(x) d\omega(x) < \infty \right\}$$

$L^2_\omega(\mathcal{S})$ es un espacio de Hilbert con el producto interno ponderado y norma

$$(f, g)_\omega = \int_{\mathcal{S}} f(x) g(x) d\omega(x), \quad \|f\|^2_\omega = (f, f)_\omega$$

Siempre va a ser posible construir una sucesión $(p_n)_n$ de polinomios tal que $\deg p_n = n$ y que sean ortogonales con respecto al producto escalar $(\cdot, \cdot)_\omega$ (Gram-Schmidt, momentos, etc)

$$(p_n, p_m)_\omega = \int_{\mathcal{S}} p_n(x) p_m(x) d\omega(x) = \|p_n\|^2_\omega \delta_{nm}, \quad n, m \geq 0$$

Toda $f \in L^2_\omega(\mathcal{S})$ se puede aproximar mediante la llamada serie generalizada de Fourier de f

$$(Sf)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}_k p_k(x), \quad \hat{f}_k = \frac{(f, p_k)_\omega}{\|p_k\|^2_\omega}$$

Polinomios ortogonales

El polinomio $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \hat{f}_k p_k(x)$ converge en norma a f, i.e.

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_\omega = 0$$

Además el polinomio $f_n(x)$ verifica la propiedad de minimización

$$\|f - f_n\|_\omega = \min_{q\in\mathbb{P}_n} \|f - q\|_\omega$$

Es importante entonces calcular los coeficientes $\hat{f}_k$. Una manera de hacerlo es usar cuadraturas Gaussianas para aproximar integrales de la forma

$$\int_{\mathcal{S}} f(x)d\omega(x) \approx \sum_{k=0}^{N} \lambda_k f(x_k)$$

Es bien sabido que los nodos x_k que mejor aproximan la integral anterior son los ceros del polinomio ortogonal $p_{N+1}(x)$.

Polinomios ortogonales

El polinomio $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \hat{f}_k p_k(x)$ converge en norma a f, i.e.

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_\omega = 0$$

Además el polinomio $f_n(x)$ verifica la propiedad de minimización

$$\|f - f_n\|_\omega = \min_{q\in\mathbb{P}_n} \|f - q\|_\omega$$

Es importante entonces calcular los coeficientes $\hat{f}_k$. Una manera de hacerlo es usar cuadraturas Gaussianas para aproximar integrales de la forma

$$\int_{\mathcal{S}} f(x)d\omega(x) \approx \sum_{k=0}^{N} \lambda_k f(x_k)$$

Es bien sabido que los nodos x_k que mejor aproximan la integral anterior son los ceros del polinomio ortogonal $p_{N+1}(x)$.

Polinomios ortogonales

Entre las propiedades más importantes de polinomios ortogonales es que siempre verifican una ecuación en diferencias de segundo orden o relación de recurrencia a tres términos de la forma ($p_{-1} = 0$)

$$xp_n(x) = a_n p_{n+1}(x) + b_n p_n(x) + c_n p_{n-1}(x), \quad n \geq 0$$

donde

$$a_n = \frac{(xp_n, p_{n+1})_\omega}{(p_{n+1}, p_{n+1})_\omega}, \quad b_n = \frac{(xp_n, p_n)_\omega}{(p_n, p_n)_\omega}, \quad c_n = \frac{(xp_n, p_{n-1})_\omega}{(p_{n-1}, p_{n-1})_\omega}$$

Esta relación de recurrencia es equivalente a que los PO $(p_n)_n$ son autofunciones de un operador de Jacobi (tridiagonal) en el espacio $\ell^2_\pi(\mathbb{N})$

$$Jp = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & & \\ c_1 & b_1 & a_1 & \\ & c_2 & b_2 & a_2 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0(x) \\ p_1(x) \\ p_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} p_0(x) \\ p_1(x) \\ p_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = xp, \quad x \in S$$

El resultado contrario también es cierto (Teorema de Favard o espectral) ya que J es un operador autoadjunto en $\ell^2_\pi(\mathbb{N})$, donde π es el vector de las normas inversas de los polinomios p_n.

Polinomios ortogonales

Entre las propiedades más importantes de polinomios ortogonales es que siempre verifican una ecuación en diferencias de segundo orden o relación de recurrencia a tres términos de la forma ($p_{-1} = 0$)

$$xp_n(x) = a_n p_{n+1}(x) + b_n p_n(x) + c_n p_{n-1}(x), \quad n \geq 0$$

donde

$$a_n = \frac{(xp_n, p_{n+1})_\omega}{(p_{n+1}, p_{n+1})_\omega}, \quad b_n = \frac{(xp_n, p_n)_\omega}{(p_n, p_n)_\omega}, \quad c_n = \frac{(xp_n, p_{n-1})_\omega}{(p_{n-1}, p_{n-1})_\omega}$$

Esta relación de recurrencia es equivalente a que los PO $(p_n)_n$ son autofunciones de un operador de Jacobi (tridiagonal) en el espacio $\ell^2_\pi(\mathbb{N})$

$$Jp = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & & & \\ c_1 & b_1 & a_1 & & \\ & c_2 & b_2 & a_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0(x) \\ p_1(x) \\ p_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} p_0(x) \\ p_1(x) \\ p_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = xp, \quad x \in \mathcal{S}$$

El resultado contrario también es cierto (Teorema de Favard o espectral) ya que J es un operador autoadjunto en $\ell^2_\pi(\mathbb{N})$, donde π es el vector de las normas inversas de los polinomios p_n.

Polinomios ortogonales

Entre las propiedades más importantes de polinomios ortogonales es que siempre verifican una ecuación en diferencias de segundo orden o relación de recurrencia a tres términos de la forma ($p_{-1}=0$)

$$xp_n(x)=a_np_{n+1}(x)+b_np_n(x)+c_np_{n-1}(x),\quad n\geq 0$$

donde

$$a_n=\frac{(xp_n,p_{n+1})_\omega}{(p_{n+1},p_{n+1})_\omega},\quad b_n=\frac{(xp_n,p_n)_\omega}{(p_n,p_n)_\omega},\quad c_n=\frac{(xp_n,p_{n-1})_\omega}{(p_{n-1},p_{n-1})_\omega}$$

Esta relación de recurrencia es equivalente a que los PO $(p_n)_n$ son autofunciones de un operador de Jacobi (tridiagonal) en el espacio $\ell^2_\pi(\mathbb{N})$

$$Jp=\begin{pmatrix} b_0 & a_0 & & & \\ c_1 & b_1 & a_1 & & \\ & c_2 & b_2 & a_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_0(x)\\ p_1(x)\\ p_2(x)\\ \vdots\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix} p_0(x)\\ p_1(x)\\ p_2(x)\\ \vdots\end{pmatrix}=xp,\quad x\in\mathcal{S}$$

El resultado contrario también es cierto (Teorema de Favard o espectral) ya que J es un operador autoadjunto en $\ell^2_\pi(\mathbb{N})$, donde π es el vector de las normas inversas de los polinomios p_n.

Ecuaciones diferenciales

Entre todas las familias de PO existen unas pocas que tienen especial importancia. Estas verifican normalmente una propiedad extra.

Bochner (1929) (Routh (1884)): caracterizar $(p_n)_n$ verificando

$$dp_n \equiv f_2(x)p_n''(x) + f_1(x)p_n'(x) = \lambda_n p_n(x)$$

donde $\deg f_2 \leq 2$ y $\deg f_1 = 1$.

Esto es equivalente a la simetría (autoadjunto) del operador diferencial de segundo orden

$$d = f_2(x)\partial_x^2 + f_1(x)\partial_x^1$$

con respecto al producto escalar $(\cdot,\cdot)_\omega$,i.e.

$$(dp_n, p_m)_\omega = (p_n, dp_m)_\omega, \quad n, m \geq 0$$

La relación entre los coeficientes del operador diferencial d y la medida ω viene dada por la denominada ecuación de Pearson

$$(f_2(x)\omega(x))' = f_1(x)\omega(x)$$

más ciertas condiciones de contorno.

Ecuaciones diferenciales

Entre todas las familias de PO existen unas pocas que tienen especial importancia. Estas verifican normalmente una propiedad extra.

Bochner (1929) (Routh (1884)): caracterizar $(p_n)_n$ verificando

$$dp_n \equiv f_2(x)p_n''(x) + f_1(x)p_n'(x) = \lambda_n p_n(x)$$

donde $\deg f_2 \leq 2$ y $\deg f_1 = 1$.

Esto es equivalente a la simetría (autoadjunto) del operador diferencial de segundo orden

$$d = f_2(x)\partial_x^2 + f_1(x)\partial_x^1$$

con respecto al producto escalar $(\cdot,\cdot)_\omega$,i.e.

$$(dp_n, p_m)_\omega = (p_n, dp_m)_\omega, \quad n, m \geq 0$$

La relación entre los coeficientes del operador diferencial d y la medida ω viene dada por la denominada ecuación de Pearson

$$(f_2(x)\omega(x))' = f_1(x)\omega(x)$$

más ciertas condiciones de contorno.

Ecuaciones diferenciales

Entre todas las familias de PO existen unas pocas que tienen especial importancia. Estas verifican normalmente una propiedad extra.

Bochner (1929) (Routh (1884)): caracterizar $(p_n)_n$ verificando

$$dp_n \equiv f_2(x)p_n''(x) + f_1(x)p_n'(x) = \lambda_n p_n(x)$$

donde $\deg f_2 \leq 2$ y $\deg f_1 = 1$.

Esto es equivalente a la simetría (autoadjunto) del operador diferencial de segundo orden

$$d = f_2(x)\partial_x^2 + f_1(x)\partial_x^1$$

con respecto al producto escalar $(\cdot,\cdot)_\omega$,i.e.

$$(dp_n, p_m)_\omega = (p_n, dp_m)_\omega, \quad n, m \geq 0$$

La relación entre los coeficientes del operador diferencial d y la medida ω viene dada por la denominada ecuación de Pearson

$$(f_2(x)\omega(x))' = f_1(x)\omega(x)$$

más ciertas condiciones de contorno.

Ecuaciones diferenciales

Entre todas las familias de PO existen unas pocas que tienen especial importancia. Estas verifican normalmente una propiedad extra.

Bochner (1929) (Routh (1884)): caracterizar $(p_n)_n$ verificando

$$dp_n \equiv f_2(x)p_n''(x) + f_1(x)p_n'(x) = \lambda_n p_n(x)$$

donde $\deg f_2 \leq 2$ y $\deg f_1 = 1$.

Esto es equivalente a la simetría (autoadjunto) del operador diferencial de segundo orden

$$d = f_2(x)\partial_x^2 + f_1(x)\partial_x^1$$

con respecto al producto escalar $(\cdot,\cdot)_\omega$,i.e.

$$(dp_n, p_m)_\omega = (p_n, dp_m)_\omega, \quad n, m \geq 0$$

La relación entre los coeficientes del operador diferencial d y la medida ω viene dada por la denominada ecuación de Pearson

$$(f_2(x)\omega(x))' = f_1(x)\omega(x)$$

más ciertas condiciones de contorno.

Familias clásicas

Hermite: $f_2(x) = 1, d\omega(x) = e^{-x^2}dx,\ x \in \mathbb{R}$:

$$H_n(x)'' - 2xH_n(x)' = -2nH_n(x)$$

Laguerre: $f_2(x) = x, d\omega(x) = x^\alpha e^{-x}dx,\ \alpha > -1,\ x \in [0, \infty)$:

$$xL_n^\alpha(x)'' + (\alpha + 1 - x)L_n^\alpha(x)' = -nL_n^\alpha(x)$$

Jacobi: $f_2(x) = 1 - x^2, d\omega(x) = (1-x)^\alpha(1-x)^\beta dx,\ x \in [-1, 1]$:

$$(1-x^2)P_n^{(\alpha,\beta)}(x)'' + (\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x)P_n^{(\alpha,\beta)}(x)' =$$

$$-n(n + \alpha + \beta + 1)P_n^{(\alpha,\beta)}(x), \quad \alpha, \beta > -1$$

Entre los polinomios de Jacobi están los conocidos

- Polinomios de Chebychev: cuando $\alpha = \beta = -1/2$.
- Polinomios de Legendre o esféricos: cuando $\alpha = \beta = 0$.
- Polinomios de Gegenbauer o ultraesféricos: cuando $\alpha = \beta = \lambda - 1/2$.

Familias clásicas

Hermite: $f_2(x) = 1, d\omega(x) = e^{-x^2}dx,\ x \in \mathbb{R}$:

$$H_n(x)'' - 2xH_n(x)' = -2nH_n(x)$$

Laguerre: $f_2(x) = x, d\omega(x) = x^\alpha e^{-x}dx,\ \alpha > -1,\ x \in [0, \infty)$:

$$xL_n^\alpha(x)'' + (\alpha + 1 - x)L_n^\alpha(x)' = -nL_n^\alpha(x)$$

Jacobi: $f_2(x) = 1 - x^2, d\omega(x) = (1-x)^\alpha(1-x)^\beta dx,\ x \in [-1, 1]$:

$$(1-x^2)P_n^{(\alpha,\beta)}(x)'' + (\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x)P_n^{(\alpha,\beta)}(x)' =$$

$$-n(n + \alpha + \beta + 1)P_n^{(\alpha,\beta)}(x), \quad \alpha, \beta > -1$$

Entre los polinomios de Jacobi están los conocidos

- Polinomios de Chebychev: cuando $\alpha = \beta = -1/2$.
- Polinomios de Legendre o esféricos: cuando $\alpha = \beta = 0$.
- Polinomios de Gegenbauer o ultraesféricos: cuando $\alpha = \beta = \lambda - 1/2$.

Familias clásicas

Hermite: $f_2(x) = 1, d\omega(x) = e^{-x^2}dx,\ x \in \mathbb{R}$:

$$H_n(x)'' - 2xH_n(x)' = -2nH_n(x)$$

Laguerre: $f_2(x) = x, d\omega(x) = x^\alpha e^{-x}dx,\ \alpha > -1,\ x \in [0, \infty)$:

$$xL_n^\alpha(x)'' + (\alpha + 1 - x)L_n^\alpha(x)' = -nL_n^\alpha(x)$$

Jacobi: $f_2(x) = 1 - x^2, d\omega(x) = (1 - x)^\alpha(1 - x)^\beta dx,\ x \in [-1, 1]$:

$$(1 - x^2)P_n^{(\alpha,\beta)}(x)'' + (\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x)P_n^{(\alpha,\beta)}(x)' =$$

$$-n(n + \alpha + \beta + 1)P_n^{(\alpha,\beta)}(x), \quad \alpha, \beta > -1$$

Entre los polinomios de Jacobi están los conocidos

- Polinomios de Chebychev: cuando $\alpha = \beta = -1/2$.
- Polinomios de Legendre o esféricos: cuando $\alpha = \beta = 0$.
- Polinomios de Gegenbauer o ultraesféricos: cuando $\alpha = \beta = \lambda - 1/2$.

Familias clásicas

Hermite: $f_2(x) = 1, d\omega(x) = e^{-x^2} dx,\ x \in \mathbb{R}$:

$$H_n(x)'' - 2xH_n(x)' = -2nH_n(x)$$

Laguerre: $f_2(x) = x, d\omega(x) = x^\alpha e^{-x} dx,\ \alpha > -1,\ x \in [0, \infty)$:

$$xL_n^\alpha(x)'' + (\alpha + 1 - x)L_n^\alpha(x)' = -nL_n^\alpha(x)$$

Jacobi: $f_2(x) = 1 - x^2, d\omega(x) = (1 - x)^\alpha (1 - x)^\beta dx,\ x \in [-1, 1]$:

$$(1 - x^2)P_n^{(\alpha,\beta)}(x)'' + (\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x)P_n^{(\alpha,\beta)}(x)' =$$

$$-n(n + \alpha + \beta + 1)P_n^{(\alpha,\beta)}(x), \quad \alpha, \beta > -1$$

Entre los polinomios de Jacobi están los conocidos

- Polinomios de Chebychev: cuando $\alpha = \beta = -1/2$.
- Polinomios de Legendre o esféricos: cuando $\alpha = \beta = 0$.
- Polinomios de Gegenbauer o ultraesféricos: cuando $\alpha = \beta = \lambda - 1/2$.

Aplicaciones

- Teoría de operadores: operadores de Jacobi, Hankel, Toeplitz.
- Fracciones continuas.
- Análisis numérico: fórmulas de cuadratura, aproximación de mínimos cuadrados.
- Teoría de representación grupos: funciones esféricas.
- Equilibrio electrostático con potencial logarítmico: ceros de PO.
- Mecánica cuántica: oscilador armónico cuántico, átomo de hidrógeno, etc.
- Análisis armónico: funciones de Hermite.
- Procesos estocásticos: cadenas de Markov de nacimiento y muerte y procesos de difusión.
- ...

Análisis armónico

Funciones de onda o de Hermite

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} e^{-x^2/2} H_n(x)$$

donde $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n)}$, son los polinomios de Hermite. $(\psi_n)_n$ es un conjunto ortonormal completo de $L^2(\mathbb{R})$, i.e $(\psi_n, \psi_m) = \delta_{nm}$, $n, m \geq 0$.

$(\psi_n)_n$ son autofunciones de un operador de Schrödinger

$$\psi_n''(x) - x^2\psi_n(x) = -(2n+1)\psi_n(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

y a la vez de la transformada de Fourier

$$\hat{\psi}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(t) e^{ixt} dt = (i)^n \psi_n(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Por lo tanto, definiendo los subespacios de $L^2(\mathbb{R})$

$$H_k = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : f = \sum_{n \in \mathbb{N}} (f, \psi_{4n+k}) \psi_{4n+k} \right\}$$

toda función $f \in L^2(\mathbb{R})$ se puede descomponer como una suma de 4 funciones ortogonales, cada una perteneciente al espacio H_k. Por lo tanto

$$L^2(\mathbb{R}) = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4$$

Análisis armónico

Funciones de onda o de Hermite

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} e^{-x^2/2} H_n(x)$$

donde $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}(e^{-x^2})^{(n)}$, son los polinomios de Hermite. $(\psi_n)_n$ es un conjunto ortonormal completo de $L^2(\mathbb{R})$, i.e $(\psi_n, \psi_m) = \delta_{nm}, n, m \geq 0$.
$(\psi_n)_n$ son autofunciones de un operador de Schrödinger

$$\psi_n''(x) - x^2\psi_n(x) = -(2n+1)\psi_n(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

y a la vez de la transformada de Fourier

$$\hat{\psi}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(t) e^{ixt} dt = (i)^n \psi_n(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Por lo tanto, definiendo los subespacios de $L^2(\mathbb{R})$

$$H_k = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : f = \sum_{n \in \mathbb{N}} (f, \psi_{4n+k})\psi_{4n+k} \right\}$$

toda función $f \in L^2(\mathbb{R})$ se puede descomponer como una suma de 4 funciones ortogonales, cada una perteneciente al espacio H_k. Por lo tanto

$$L^2(\mathbb{R}) = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4$$

Análisis armónico

Funciones de onda o de Hermite

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} e^{-x^2/2} H_n(x)$$

donde $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n)}$, son los polinomios de Hermite. $(\psi_n)_n$ es un conjunto ortonormal completo de $L^2(\mathbb{R})$, i.e $(\psi_n, \psi_m) = \delta_{nm}, n, m \geq 0$.
$(\psi_n)_n$ son autofunciones de un operador de Schrödinger

$$\psi_n''(x) - x^2 \psi_n(x) = -(2n+1)\psi_n(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

y a la vez de la transformada de Fourier

$$\hat{\psi}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(t) e^{ixt} dt = (i)^n \psi_n(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Por lo tanto, definiendo los subespacios de $L^2(\mathbb{R})$

$$H_k = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : f = \sum_{n \in \mathbb{N}} (f, \psi_{4n+k}) \psi_{4n+k} \right\}$$

toda función $f \in L^2(\mathbb{R})$ se puede descomponer como una suma de 4 funciones ortogonales, cada una perteneciente al espacio H_k. Por lo tanto

$$L^2(\mathbb{R}) = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4$$

Cadenas de nacimiento y muerte en $\mathbb{N}$

La matriz de transición de probabilidades P (tiempo discreto) y el operador infinitesimal $\mathcal{A}$ (tiempo continuo) son matrices de Jacobi (tridiagonales)

$$P = \begin{pmatrix} r_0 & p_0 & 0 & & \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & & \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

El objetivo es describir las transiciones de probabilidades a cualquier paso de tiempo (discreto) P^n ó $P(t)$, que verifica $P'(t) = \mathcal{A}P(t)$.

Para $x \in \mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$ (autovalor) construimos un vector dependiente de x (autovector) $Q = (Q_0(x), Q_1(x), \dots)^T$ tal que

$$PQ = xQ, \quad \mathcal{A}Q = -xQ$$

Normalizando a $Q_0(x) = 1$ se observa que $Q_n(x)$ es un polinomio en x de grado exactamente n y que verifican una relación de recurrencia a tres términos:

$$xQ_n(x) = p_nQ_{n+1}(x) + r_nQ_n(x) + q_nQ_{n-1}(x)$$
$$-xQ_n(x) = \lambda_nQ_{n+1}(x) - (\lambda_n+\mu_n)Q_n(x) + \mu_nQ_{n-1}(x)$$

Cadenas de nacimiento y muerte en $\mathbb{N}$

La matriz de transición de probabilidades P (tiempo discreto) y el operador infinitesimal $\mathcal{A}$ (tiempo continuo) son matrices de Jacobi (tridiagonales)

$$P = \begin{pmatrix} r_0 & p_0 & 0 & & \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & & \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

El objetivo es describir las transiciones de probabilidades a cualquier paso de tiempo (discreto) P^n ó $P(t)$, que verifica $P'(t) = \mathcal{A}P(t)$.

Para $x \in \mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$ (autovalor) construimos un vector dependiente de x (autovector) $Q = (Q_0(x), Q_1(x), \dots)^T$ tal que

$$PQ = xQ, \quad \mathcal{A}Q = -xQ$$

Normalizando a $Q_0(x) = 1$ se observa que $Q_n(x)$ es un polinomio en x de grado exactamente n y que verifican una relación de recurrencia a tres términos:

$$xQ_n(x) = p_n Q_{n+1}(x) + r_n Q_n(x) + q_n Q_{n-1}(x)$$
$$-xQ_n(x) = \lambda_n Q_{n+1}(x) - (\lambda_n+\mu_n) Q_n(x) + \mu_n Q_{n-1}(x)$$

Cadenas de nacimiento y muerte en $\mathbb{N}$

La matriz de transición de probabilidades P (tiempo discreto) y el operador infinitesimal $\mathcal{A}$ (tiempo continuo) son matrices de Jacobi (tridiagonales)

$$P = \begin{pmatrix} r_0 & p_0 & 0 & & \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & & \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

El objetivo es describir las transiciones de probabilidades a cualquier paso de tiempo (discreto) P^n ó $P(t)$, que verifica $P'(t) = \mathcal{A}P(t)$.

Para $x \in \mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$ (autovalor) construimos un vector dependiente de x (autovector) $Q = (Q_0(x), Q_1(x), \ldots)^T$ tal que

$$PQ = xQ, \quad \mathcal{A}Q = -xQ$$

Normalizando a $Q_0(x) = 1$ se observa que $Q_n(x)$ es un polinomio en x de grado exactamente n y que verifican una relación de recurrencia a tres términos:

$$xQ_n(x) = p_nQ_{n+1}(x) + r_nQ_n(x) + q_nQ_{n-1}(x)$$
$$-xQ_n(x) = \lambda_nQ_{n+1}(x) - (\lambda_n+\mu_n)Q_n(x) + \mu_nQ_{n-1}(x)$$

Cadenas de nacimiento y muerte en $\mathbb{N}$

El Teorema Espectral asegura que hay una correspondencia biyectiva entre operadores tridiagonales (como P o $\mathcal{A}$) autoadjuntos en $\ell^2_\pi(\mathbb{N})$ donde el vector π en el espacio $\ell^2_\pi(\mathbb{N})$ viene dado por $\pi_0 = 1$ y

$$\pi_i = \frac{p_0 p_1 \cdots p_{i-1}}{q_1 q_2 \cdots q_i}, \quad \left(\pi_i = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_i} \right)$$

y medidas positivas ψ con soporte $[-1, 1]$ (para P) ó $[0, \infty)$ (para $\mathcal{A}$).

Theorem (Representación integral de Karlin-McGregor)

Se tiene la siguiente representación integral de P^n (tiempo discreto)

$$P^n_{ij} = \mathbb{P}(X_n = j | X_0 = i) = \pi_j \int_{-1}^{1} x^n Q_i(x) Q_j(x) d\psi(x)$$

y de $P(t)$ (tiempo continuo)

$$P_{ij}(t) = \mathbb{P}(X_t = j | X_0 = i) = \pi_j \int_0^\infty e^{-xt} Q_i(x) Q_j(x) d\psi(x)$$

Además $\pi_j^{-1} = \|Q_j\|^2_\psi$ y la familia de polinomios $(Q_n)_n$ es ortogonal con respecto a ψ en el espacio $L^2_\psi([-1, 1])$ (para P) o $L^2_\psi([0, \infty))$ (para $\mathcal{A}$).

Ejemplos: cola $M/M/k$, modelos de urnas de Ehrenfest o Laplace-Bernoulli, procesos de nacimiento y muerte lineal, etc.

Cadenas de nacimiento y muerte en $\mathbb{N}$

El Teorema Espectral asegura que hay una correspondencia biyectiva entre operadores tridiagonales (como P o $\mathcal{A}$) autoadjuntos en $\ell^2_\pi(\mathbb{N})$ donde el vector π en el espacio $\ell^2_\pi(\mathbb{N})$ viene dado por $\pi_0 = 1$ y

$$\pi_i = \frac{p_0 p_1 \cdots p_{i-1}}{q_1 q_2 \cdots q_i}, \quad \left(\pi_i = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_i}\right)$$

y medidas positivas ψ con soporte $[-1, 1]$ (para P) ó $[0, \infty)$ (para $\mathcal{A}$).

Theorem (Representación integral de Karlin-McGregor)

Se tiene la siguiente representación integral de P^n (tiempo discreto)

$$P^n_{ij} = \mathbb{P}(X_n = j | X_0 = i) = \pi_j \int_{-1}^{1} x^n Q_i(x) Q_j(x) d\psi(x)$$

y de $P(t)$ (tiempo continuo)

$$P_{ij}(t) = \mathbb{P}(X_t = j | X_0 = i) = \pi_j \int_{0}^{\infty} e^{-xt} Q_i(x) Q_j(x) d\psi(x)$$

Además $\pi_j^{-1} = \|Q_j\|^2_\psi$ y la familia de polinomios $(Q_n)_n$ es ortogonal con respecto a ψ en el espacio $L^2_\psi([-1, 1])$ (para P) o $L^2_\psi([0, \infty))$ (para $\mathcal{A}$).

Ejemplos: cola $M/M/k$, modelos de urnas de Ehrenfest o Laplace-Bernoulli, procesos de nacimiento y muerte lineal, etc.

Cadenas de nacimiento y muerte en $\mathbb{N}$

El Teorema Espectral asegura que hay una correspondencia biyectiva entre operadores tridiagonales (como P o $\mathcal{A}$) autoadjuntos en $\ell^2_\pi(\mathbb{N})$ donde el vector π en el espacio $\ell^2_\pi(\mathbb{N})$ viene dado por $\pi_0 = 1$ y

$$\pi_i = \frac{p_0 p_1 \cdots p_{i-1}}{q_1 q_2 \cdots q_i}, \quad \left(\pi_i = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_i} \right)$$

y medidas positivas ψ con soporte $[-1, 1]$ (para P) ó $[0, \infty)$ (para $\mathcal{A}$).

Theorem (Representación integral de Karlin-McGregor)

Se tiene la siguiente representación integral de P^n (tiempo discreto)

$$P^n_{ij} = \mathbb{P}(X_n = j | X_0 = i) = \pi_j \int_{-1}^{1} x^n Q_i(x) Q_j(x) d\psi(x)$$

y de $P(t)$ (tiempo continuo)

$$P_{ij}(t) = \mathbb{P}(X_t = j | X_0 = i) = \pi_j \int_{0}^{\infty} e^{-xt} Q_i(x) Q_j(x) d\psi(x)$$

Además $\pi_j^{-1} = \|Q_j\|^2_\psi$ y la familia de polinomios $(Q_n)_n$ es ortogonal con respecto a ψ en el espacio $L^2_\psi([-1, 1])$ (para P) o $L^2_\psi([0, \infty))$ (para $\mathcal{A}$).

Ejemplos: cola $M/M/k$, modelos de urnas de Ehrenfest o Laplace-Bernoulli, procesos de nacimiento y muerte lineal, etc.

Procesos de difusión

La densidad de transición de probabilidades $p(t; x, y)$ verifica la ecuación de retroceso de Kolmogorov

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \mathcal{A}p = \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \mu(x)\frac{\partial p}{\partial x}$$

Se hace separación de variables y se escribe el operador infinitesimal $\mathcal{A}$ como

$$\mathcal{A} = \frac{1}{m(x)}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\sigma^2(x)m(x)\frac{d}{dx}\right), \quad m(x) = \frac{2}{\sigma^2(x)}\exp\left(\int^x \frac{2\mu(z)}{\sigma^2(z)}dz\right)$$

El problema de encontrar autovalores y autofunciones de $\mathcal{A}$ (i.e. $\mathcal{A}\phi = \lambda\phi$) es un problema de Sturm-Liouville con ciertos valores frontera.

Si existe una sucesión de autofunciones ortogonales $(\phi_n)_n$ *completa* en $L^2_m(\mathcal{S})$ con sus correspondientes autovalores $(\lambda_n)_n$, la densidad de transición de probabilidades $p(t; x, y)$ admite la siguiente representación espectral

$$p(t; x, y) = m(y)\sum_{n=0}^{\infty} e^{\lambda_n t}\phi_n(x)\phi_n(y)$$

Ejemplos: Hermite (proceso de Orstein-Uhlenbeck), Laguerre (proceso cuadrático de Bessel), Jacobi (modelo de Wright-Fisher).

Procesos de difusión

La densidad de transición de probabilidades $p(t; x, y)$ verifica la ecuación de retroceso de Kolmogorov

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \mathcal{A}p = \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \mu(x)\frac{\partial p}{\partial x}$$

Se hace separación de variables y se escribe el operador infinitesimal $\mathcal{A}$ como

$$\mathcal{A} = \frac{1}{m(x)}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\sigma^2(x)m(x)\frac{d}{dx}\right), \quad m(x) = \frac{2}{\sigma^2(x)}\exp\left(\int^x \frac{2\mu(z)}{\sigma^2(z)}dz\right)$$

El problema de encontrar autovalores y autofunciones de $\mathcal{A}$ (i.e. $\mathcal{A}\phi = \lambda\phi$) es un problema de Sturm-Liouville con ciertos valores frontera.

Si existe una sucesión de autofunciones ortogonales $(\phi_n)_n$ *completa* en $L^2_m(\mathcal{S})$ con sus correspondientes autovalores $(\lambda_n)_n$, la densidad de transición de probabilidades $p(t; x, y)$ admite la siguiente representación espectral

$$p(t; x, y) = m(y)\sum_{n=0}^{\infty} e^{\lambda_n t}\phi_n(x)\phi_n(y)$$

Ejemplos: Hermite (proceso de Orstein-Uhlenbeck), Laguerre (proceso cuadrático de Bessel), Jacobi (modelo de Wright-Fisher).

Procesos de difusión

La densidad de transición de probabilidades $p(t; x, y)$ verifica la ecuación de retroceso de Kolmogorov

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \mathcal{A}p = \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \mu(x)\frac{\partial p}{\partial x}$$

Se hace separación de variables y se escribe el operador infinitesimal $\mathcal{A}$ como

$$\mathcal{A} = \frac{1}{m(x)}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\sigma^2(x)m(x)\frac{d}{dx}\right), \quad m(x) = \frac{2}{\sigma^2(x)}\exp\left(\int^x \frac{2\mu(z)}{\sigma^2(z)}dz\right)$$

El problema de encontrar autovalores y autofunciones de $\mathcal{A}$ (i.e. $\mathcal{A}\phi = \lambda\phi$) es un problema de Sturm-Liouville con ciertos valores frontera.

Si existe una sucesión de autofunciones ortogonales $(\phi_n)_n$ *completa* en $L^2_m(\mathcal{S})$ con sus correspondientes autovalores $(\lambda_n)_n$, la densidad de transición de probabilidades $p(t; x, y)$ admite la siguiente representación espectral

$$p(t; x, y) = m(y)\sum_{n=0}^{\infty} e^{\lambda_n t}\phi_n(x)\phi_n(y)$$

Ejemplos: Hermite (proceso de Orstein-Uhlenbeck), Laguerre (proceso cuadrático de Bessel), Jacobi (modelo de Wright-Fisher).

Índice

Polinomios ortogonales matriciales

Polinomios matriciales sobre la recta real:

$$\boldsymbol{P}(x) = \boldsymbol{K}_n x^n + \boldsymbol{K}_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \boldsymbol{K}_0, \quad \boldsymbol{K}_i \in \mathbb{C}^{N \times N}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Krein (1949): Polinomios ortogonales matriciales (POM).

Ortogonalidad: matriz peso $\boldsymbol{W}$ soportada en $\mathbb{R}$ (semi-definida positiva con momentos finitos) y un producto interno matricial. Sea $(\boldsymbol{P}_n)_n$ una sucesión de polinomios matriciales con deg $\boldsymbol{P}_n$ y coeficiente líder no singular tal que son ortogonales en el siguiente sentido

$$\langle \boldsymbol{P}_n, \boldsymbol{P}_m \rangle_{\boldsymbol{W}} = \int_{\mathbb{R}} \boldsymbol{P}_n(x) d\boldsymbol{W}(x) \boldsymbol{P}_m^*(x) = \boldsymbol{0}_N, \quad n \neq m$$

Esto es una *forma sesquilinear* y no un producto escalar usual, pero tiene propiedades parecidas a la de espacio de Hilbert

Ahora tenemos un espacio de funciones matriciales ponderado

$$L^2_{\boldsymbol{W}}(\mathbb{R}; \mathbb{C}^{N \times N}) = \left\{ \boldsymbol{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{N \times N} : \int_{\mathbb{R}} \boldsymbol{F}(x) d\boldsymbol{W}(x) \boldsymbol{F}^*(x) < \infty \right\}$$

que es un espacio de Hilbert con la norma $\|\boldsymbol{F}\|^2_{\boldsymbol{W}} = \mathrm{Tr}\langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{F} \rangle_{\boldsymbol{W}}$.

Polinomios ortogonales matriciales

Polinomios matriciales sobre la recta real:

$$\boldsymbol{P}(x)=\boldsymbol{K}_n x^n+\boldsymbol{K}_{n-1}x^{n-1}+\cdots+\boldsymbol{K}_0,\quad \boldsymbol{K}_i\in\mathbb{C}^{N\times N},\quad x\in\mathbb{R}$$

Krein (1949): Polinomios ortogonales matriciales (POM).

Ortogonalidad: matriz peso $\boldsymbol{W}$ soportada en $\mathbb{R}$ (semi-definida positiva con momentos finitos) y un producto interno matricial. Sea $(\boldsymbol{P}_n)_n$ una sucesión de polinomios matriciales con deg $\boldsymbol{P}_n$ y coeficiente líder no singular tal que son ortogonales en el siguiente sentido

$$\langle \boldsymbol{P}_n,\boldsymbol{P}_m\rangle_{\boldsymbol{W}}=\int_{\mathbb{R}}\boldsymbol{P}_n(x)d\boldsymbol{W}(x)\boldsymbol{P}_m^*(x)=\boldsymbol{0}_N,\quad n\neq m$$

Esto es una *forma sesquilinear* y no un producto escalar usual, pero tiene propiedades parecidas a la de espacio de Hilbert

Ahora tenemos un espacio de funciones matriciales ponderado

$$L^2_{\boldsymbol{W}}(\mathbb{R};\mathbb{C}^{N\times N})=\left\{\boldsymbol{F}:\mathbb{R}\to\mathbb{C}^{N\times N}:\int_{\mathbb{R}}\boldsymbol{F}(x)d\boldsymbol{W}(x)\boldsymbol{F}^*(x)<\infty\right\}$$

que es un espacio de Hilbert con la norma $\|\boldsymbol{F}\|^2_{\boldsymbol{W}}=\mathrm{Tr}\langle\boldsymbol{F},\boldsymbol{F}\rangle_{\boldsymbol{W}}$.

Polinomios ortogonales matriciales

Polinomios matriciales sobre la recta real:

$$\boldsymbol{P}(x) = \boldsymbol{K}_n x^n + \boldsymbol{K}_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \boldsymbol{K}_0, \quad \boldsymbol{K}_i \in \mathbb{C}^{N\times N}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Krein (1949): Polinomios ortogonales matriciales (POM).
Ortogonalidad: matriz peso $\boldsymbol{W}$ soportada en $\mathbb{R}$ (semi-definida positiva con momentos finitos) y un producto interno matricial. Sea $(\boldsymbol{P}_n)_n$ una sucesión de polinomios matriciales con deg $\boldsymbol{P}_n$ y coeficiente líder no singular tal que son ortogonales en el siguiente sentido

$$\langle \boldsymbol{P}_n, \boldsymbol{P}_m \rangle_{\boldsymbol{W}} = \int_{\mathbb{R}} \boldsymbol{P}_n(x) d\boldsymbol{W}(x) \boldsymbol{P}_m^*(x) = \boldsymbol{0}_N, \quad n \neq m$$

Esto es una *forma sesquilinear* y no un producto escalar usual, pero tiene propiedades parecidas a la de espacio de Hilbert
Ahora tenemos un espacio de funciones matriciales ponderado

$$L^2_{\boldsymbol{W}}(\mathbb{R}; \mathbb{C}^{N\times N}) = \left\{ \boldsymbol{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{N\times N} : \int_{\mathbb{R}} \boldsymbol{F}(x) d\boldsymbol{W}(x) \boldsymbol{F}^*(x) < \infty \right\}$$

que es un espacio de Hilbert con la norma $\|\boldsymbol{F}\|^2_{\boldsymbol{W}} = \mathrm{Tr}\langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{F} \rangle_{\boldsymbol{W}}$.

Polinomios ortogonales matriciales

Polinomios matriciales sobre la recta real:

$$\boldsymbol{P}(x) = \boldsymbol{K}_n x^n + \boldsymbol{K}_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \boldsymbol{K}_0, \quad \boldsymbol{K}_i \in \mathbb{C}^{N \times N}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Krein (1949): Polinomios ortogonales matriciales (POM).
Ortogonalidad: matriz peso $\boldsymbol{W}$ soportada en $\mathbb{R}$ (semi-definida positiva con momentos finitos) y un producto interno matricial. Sea $(\boldsymbol{P}_n)_n$ una sucesión de polinomios matriciales con deg $\boldsymbol{P}_n$ y coeficiente líder no singular tal que son ortogonales en el siguiente sentido

$$\langle \boldsymbol{P}_n, \boldsymbol{P}_m \rangle_{\boldsymbol{W}} = \int_{\mathbb{R}} \boldsymbol{P}_n(x) d\boldsymbol{W}(x) \boldsymbol{P}_m^*(x) = \boldsymbol{0}_N, \quad n \neq m$$

Esto es una *forma sesquilinear* y no un producto escalar usual, pero tiene propiedades parecidas a la de espacio de Hilbert
Ahora tenemos un espacio de funciones matriciales ponderado

$$L^2_{\boldsymbol{W}}(\mathbb{R}; \mathbb{C}^{N \times N}) = \left\{ \boldsymbol{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{N \times N} : \int_{\mathbb{R}} \boldsymbol{F}(x) d\boldsymbol{W}(x) \boldsymbol{F}^*(x) < \infty \right\}$$

que es un espacio de Hilbert con la norma $\|\boldsymbol{F}\|^2_{\boldsymbol{W}} = \mathrm{Tr}\langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{F} \rangle_{\boldsymbol{W}}$.

Polinomios ortogonales matriciales

Polinomios matriciales sobre la recta real:

$$\boldsymbol{P}(x) = \boldsymbol{K}_n x^n + \boldsymbol{K}_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \boldsymbol{K}_0, \quad \boldsymbol{K}_i \in \mathbb{C}^{N\times N}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Krein (1949): Polinomios ortogonales matriciales (POM).
Ortogonalidad: matriz peso $\boldsymbol{W}$ soportada en $\mathbb{R}$ (semi-definida positiva con momentos finitos) y un producto interno matricial. Sea $(\boldsymbol{P}_n)_n$ una sucesión de polinomios matriciales con deg $\boldsymbol{P}_n$ y coeficiente líder no singular tal que son ortogonales en el siguiente sentido

$$\langle \boldsymbol{P}_n, \boldsymbol{P}_m \rangle_{\boldsymbol{W}} = \int_{\mathbb{R}} \boldsymbol{P}_n(x) d\boldsymbol{W}(x) \boldsymbol{P}_m^*(x) = \boldsymbol{0}_N, \quad n \neq m$$

Esto es una *forma sesquilinear* y no un producto escalar usual, pero tiene propiedades parecidas a la de espacio de Hilbert
Ahora tenemos un espacio de funciones matriciales ponderado

$$L^2_{\boldsymbol{W}}(\mathbb{R}; \mathbb{C}^{N\times N}) = \left\{ \boldsymbol{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{N\times N} : \int_{\mathbb{R}} \boldsymbol{F}(x) d\boldsymbol{W}(x) \boldsymbol{F}^*(x) < \infty \right\}$$

que es un espacio de Hilbert con la norma $\|\boldsymbol{F}\|^2_{\boldsymbol{W}} = \mathrm{Tr}\langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{F} \rangle_{\boldsymbol{W}}$.

Polinomios ortogonales matriciales

De manera similar, para $\boldsymbol{F} \in L^2_{\boldsymbol{W}}(\mathbb{R};\mathbb{C}^{N\times N})$, la serie matricial

$$(S\boldsymbol{F})(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\boldsymbol{F}}_k \boldsymbol{P}_k(x), \quad \hat{\boldsymbol{F}}_k = \langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{P}_k \rangle_{\boldsymbol{W}} \langle \boldsymbol{P}_k, \boldsymbol{P}_k \rangle_{\boldsymbol{W}}^{-1}$$

es la *serie matricial generalizada de Fourier de* $\boldsymbol{F}$.

La ortogonalidad de $(\boldsymbol{P}_n)_n$ con respecto a la matriz peso $\boldsymbol{W}$ es equivalente ahora a una relación de recurrencia a tres términos

$$x\boldsymbol{P}_n(x) = \boldsymbol{A}_n\boldsymbol{P}_{n+1}(x) + \boldsymbol{B}_n\boldsymbol{P}_n(x) + \boldsymbol{C}_n\boldsymbol{P}_{n-1}(x), \quad \boldsymbol{P}_{-1} = \boldsymbol{0}_N$$

donde $\boldsymbol{A}_n$ and $\boldsymbol{C}_n$ son matrices no singulares y $\boldsymbol{B}_n = \boldsymbol{B}_n^*$.
Los POM son entonces autofunciones de un operador de Jacobi tridiagonal por bloques:

$$x\boldsymbol{P} = x\begin{pmatrix} \boldsymbol{P}_0(x) \\ \boldsymbol{P}_1(x) \\ \boldsymbol{P}_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_0 & \boldsymbol{A}_0 & & & \\ \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{A}_1 & & \\ & \boldsymbol{C}_2 & \boldsymbol{B}_2 & \boldsymbol{A}_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{P}_0(x) \\ \boldsymbol{P}_1(x) \\ \boldsymbol{P}_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = \boldsymbol{J}\boldsymbol{P}$$

Al contrario también es cierto (Teorema de Favard o espectral**)

Polinomios ortogonales matriciales

De manera similar, para $\boldsymbol{F} \in L^2_{\boldsymbol{W}}(\mathbb{R}; \mathbb{C}^{N\times N})$, la serie matricial

$$(S\boldsymbol{F})(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\boldsymbol{F}}_k \boldsymbol{P}_k(x), \quad \hat{\boldsymbol{F}}_k = \langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{P}_k \rangle_{\boldsymbol{W}} \langle \boldsymbol{P}_k, \boldsymbol{P}_k \rangle_{\boldsymbol{W}}^{-1}$$

es la *serie matricial generalizada de Fourier de* $\boldsymbol{F}$.

La ortogonalidad de $(\boldsymbol{P}_n)_n$ con respecto a la matriz peso $\boldsymbol{W}$ es equivalente ahora a una relación de recurrencia a tres términos

$$x\boldsymbol{P}_n(x) = \boldsymbol{A}_n \boldsymbol{P}_{n+1}(x) + \boldsymbol{B}_n \boldsymbol{P}_n(x) + \boldsymbol{C}_n \boldsymbol{P}_{n-1}(x), \quad \boldsymbol{P}_{-1} = \boldsymbol{0}_N$$

donde $\boldsymbol{A}_n$ and $\boldsymbol{C}_n$ son matrices no singulares y $\boldsymbol{B}_n = \boldsymbol{B}_n^*$.

Los POM son entonces autofunciones de un operador de Jacobi tridiagonal por bloques:

$$xP = x\begin{pmatrix} P_0(x) \\ P_1(x) \\ P_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_0 & A_0 & & & \\ C_1 & B_1 & A_1 & & \\ & C_2 & B_2 & A_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0(x) \\ P_1(x) \\ P_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = JP$$

Al contrario también es cierto (Teorema de Favard o espectral**)

Polinomios ortogonales matriciales

De manera similar, para $\boldsymbol{F} \in L^2_{\boldsymbol{W}}(\mathbb{R};\mathbb{C}^{N\times N})$, la serie matricial

$$(S\boldsymbol{F})(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\boldsymbol{F}}_k \boldsymbol{P}_k(x), \quad \hat{\boldsymbol{F}}_k = \langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{P}_k \rangle_{\boldsymbol{W}} \langle \boldsymbol{P}_k, \boldsymbol{P}_k \rangle_{\boldsymbol{W}}^{-1}$$

es la *serie matricial generalizada de Fourier de* $\boldsymbol{F}$.

La ortogonalidad de $(\boldsymbol{P}_n)_n$ con respecto a la matriz peso $\boldsymbol{W}$ es equivalente ahora a una relación de recurrencia a tres términos

$$x\boldsymbol{P}_n(x) = \boldsymbol{A}_n\boldsymbol{P}_{n+1}(x) + \boldsymbol{B}_n\boldsymbol{P}_n(x) + \boldsymbol{C}_n\boldsymbol{P}_{n-1}(x), \quad \boldsymbol{P}_{-1} = \boldsymbol{0}_N$$

donde $\boldsymbol{A}_n$ and $\boldsymbol{C}_n$ son matrices no singulares y $\boldsymbol{B}_n = \boldsymbol{B}_n^*$.
Los POM son entonces autofunciones de un operador de Jacobi tridiagonal por bloques:

$$x\boldsymbol{P} = x\begin{pmatrix} \boldsymbol{P}_0(x) \\ \boldsymbol{P}_1(x) \\ \boldsymbol{P}_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_0 & \boldsymbol{A}_0 & & & \\ \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{A}_1 & & \\ & \boldsymbol{C}_2 & \boldsymbol{B}_2 & \boldsymbol{A}_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{P}_0(x) \\ \boldsymbol{P}_1(x) \\ \boldsymbol{P}_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = \boldsymbol{J}\boldsymbol{P}$$

Al contrario también es cierto (Teorema de Favard o espectral**)

Polinomios ortogonales matriciales

De manera similar, para $\boldsymbol{F} \in L^2_{\boldsymbol{W}}(\mathbb{R}; \mathbb{C}^{N\times N})$, la serie matricial

$$(S\boldsymbol{F})(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\boldsymbol{F}}_k \boldsymbol{P}_k(x), \quad \hat{\boldsymbol{F}}_k = \langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{P}_k \rangle_{\boldsymbol{W}} \langle \boldsymbol{P}_k, \boldsymbol{P}_k \rangle_{\boldsymbol{W}}^{-1}$$

es la *serie matricial generalizada de Fourier de* $\boldsymbol{F}$.

La ortogonalidad de $(\boldsymbol{P}_n)_n$ con respecto a la matriz peso $\boldsymbol{W}$ es equivalente ahora a una relación de recurrencia a tres términos

$$x\boldsymbol{P}_n(x) = \boldsymbol{A}_n \boldsymbol{P}_{n+1}(x) + \boldsymbol{B}_n \boldsymbol{P}_n(x) + \boldsymbol{C}_n \boldsymbol{P}_{n-1}(x), \quad \boldsymbol{P}_{-1} = \boldsymbol{0}_N$$

donde $\boldsymbol{A}_n$ and $\boldsymbol{C}_n$ son matrices no singulares y $\boldsymbol{B}_n = \boldsymbol{B}_n^*$.
Los POM son entonces autofunciones de un operador de Jacobi tridiagonal por bloques:

$$x\boldsymbol{P} = x\begin{pmatrix} \boldsymbol{P}_0(x) \\ \boldsymbol{P}_1(x) \\ \boldsymbol{P}_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_0 & \boldsymbol{A}_0 & & & \\ \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{A}_1 & & \\ & \boldsymbol{C}_2 & \boldsymbol{B}_2 & \boldsymbol{A}_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{P}_0(x) \\ \boldsymbol{P}_1(x) \\ \boldsymbol{P}_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = \boldsymbol{J}\boldsymbol{P}$$

Al contrario también es cierto (Teorema de Favard o espectral**)

Propiedades diferenciales

Durán (1997): caracterizar familias no triviales de POM $(\boldsymbol{P}_n)_n$ verificando

$$\mathcal{D}\boldsymbol{P}_n(x) \equiv \boldsymbol{F}_2(x)\boldsymbol{P}_n''(x) + \boldsymbol{F}_1(x)\boldsymbol{P}_n'(x) + \boldsymbol{F}_0(x)\boldsymbol{P}_n(x) = \boldsymbol{P}_n(x)\boldsymbol{\Gamma}_n$$

donde $\deg \boldsymbol{F}_2(x) \leq 2, \deg \boldsymbol{F}_1(x) = 1$, $\boldsymbol{F}_0(x)$ es una matriz constante y $\boldsymbol{\Gamma}_n$ es una matriz hermítica.

En esta sección estaremos usando el producto interno

$$(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q})_{\boldsymbol{W}} = \int_S \boldsymbol{Q}^*(x)\boldsymbol{W}(x)\boldsymbol{P}(x)\,dx, \quad (\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q})_{\boldsymbol{W}} = \langle \boldsymbol{P}^*, \boldsymbol{Q}^* \rangle_{\boldsymbol{W}}^*$$

Equivalente a la simetría del operador diferencial de segundo orden

$$\mathcal{D} = \boldsymbol{F}_2(x)\partial_x^2 + \boldsymbol{F}_1(x)\partial_x^1 + \boldsymbol{F}_0(x)$$
$$\text{con} \quad \mathcal{D}\boldsymbol{P}_n = \boldsymbol{P}_n\boldsymbol{\Gamma}_n$$

$\mathcal{D}$ es simétrico con respecto a $\boldsymbol{W}$ si $(\mathcal{D}\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q})_{\boldsymbol{W}} = (\boldsymbol{P}, \mathcal{D}\boldsymbol{Q})_{\boldsymbol{W}}$.

Propiedades diferenciales

Durán (1997): caracterizar familias no triviales de POM $(\boldsymbol{P}_n)_n$ verificando

$$\mathcal{D}\boldsymbol{P}_n(x) \equiv \boldsymbol{F}_2(x)\boldsymbol{P}_n''(x) + \boldsymbol{F}_1(x)\boldsymbol{P}_n'(x) + \boldsymbol{F}_0(x)\boldsymbol{P}_n(x) = \boldsymbol{P}_n(x)\boldsymbol{\Gamma}_n$$

donde $\deg \boldsymbol{F}_2(x) \leq 2, \deg \boldsymbol{F}_1(x) = 1$, $\boldsymbol{F}_0(x)$ es una matriz constante y $\boldsymbol{\Gamma}_n$ es una matriz hermítica.

En esta sección estaremos usando el producto interno

$$(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q})_{\boldsymbol{W}} = \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{Q}^*(x)\boldsymbol{W}(x)\boldsymbol{P}(x)\, dx, \quad (\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q})_{\boldsymbol{W}} = \langle \boldsymbol{P}^*, \boldsymbol{Q}^* \rangle_{\boldsymbol{W}}^*$$

Equivalente a la simetría del operador diferencial de segundo orden

$$\mathcal{D} = \boldsymbol{F}_2(x)\partial_x^2 + \boldsymbol{F}_1(x)\partial_x^1 + \boldsymbol{F}_0(x)$$
$$\text{con} \quad \mathcal{D}\boldsymbol{P}_n = \boldsymbol{P}_n\boldsymbol{\Gamma}_n$$

$\mathcal{D}$ es simétrico con respecto a $\boldsymbol{W}$ si $(\mathcal{D}\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q})_{\boldsymbol{W}} = (\boldsymbol{P}, \mathcal{D}\boldsymbol{Q})_{\boldsymbol{W}}$.

PROPIEDADES DIFERENCIALES

Durán (1997): caracterizar familias no triviales de POM $(\boldsymbol{P}_n)_n$ verificando

$$\mathcal{D}\boldsymbol{P}_n(x) \equiv \boldsymbol{F}_2(x)\boldsymbol{P}_n''(x) + \boldsymbol{F}_1(x)\boldsymbol{P}_n'(x) + \boldsymbol{F}_0(x)\boldsymbol{P}_n(x) = \boldsymbol{P}_n(x)\boldsymbol{\Gamma}_n$$

donde $\deg \boldsymbol{F}_2(x) \leq 2, \deg \boldsymbol{F}_1(x) = 1$, $\boldsymbol{F}_0(x)$ es una matriz constante y $\boldsymbol{\Gamma}_n$ es una matriz hermítica.

En esta sección estaremos usando el producto interno

$$(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q})_{\boldsymbol{W}} = \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{Q}^*(x)\boldsymbol{W}(x)\boldsymbol{P}(x)\, dx, \quad (\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q})_{\boldsymbol{W}} = \langle \boldsymbol{P}^*, \boldsymbol{Q}^* \rangle_{\boldsymbol{W}}^*$$

Equivalente a la simetría del operador diferencial de segundo orden

$$\mathcal{D} = \boldsymbol{F}_2(x)\partial_x^2 + \boldsymbol{F}_1(x)\partial_x^1 + \boldsymbol{F}_0(x)$$
$$\text{con} \quad \mathcal{D}\boldsymbol{P}_n = \boldsymbol{P}_n\boldsymbol{\Gamma}_n$$

$\mathcal{D}$ es simétrico con respecto a $\boldsymbol{W}$ si $(\mathcal{D}\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q})_{\boldsymbol{W}} = (\boldsymbol{P}, \mathcal{D}\boldsymbol{Q})_{\boldsymbol{W}}$.

Cómo generar ejemplos

- Teoría de representación de grupos: búsqueda de funciones esféricas matriciales asociadas a diferentes grupos (Grünbaum, Pacharoni, Tirao, Román, Zurrián, Koelink).
- Ecuaciones de momentos: a partir de las ecuaciones de simetría resolver las correspondientes ecuaciones (Durán, Grünbaum, MdI). Usado en Durán-MdI (2008) para generar ejemplos de POM ortogonales con respecto a un peso matricial más una delta de Dirac en un punto.
- Problema biespectral matricial: resolviendo las llamadas *ad-conditions* ($\mathrm{ad}_J^{k+1}(\boldsymbol{\Gamma}) = \mathbf{0}$) donde k es el orden del operador diferencial (Castro, Grünbaum, Tirao). Usado para generar ejemplos de orden $k = 1$ en Castro-Grünbaum (2005, 2008).

Cómo generar ejemplos

- Teoría de representación de grupos: búsqueda de funciones esféricas matriciales asociadas a diferentes grupos (Grünbaum, Pacharoni, Tirao, Román, Zurrián, Koelink).
- Ecuaciones de momentos: a partir de las ecuaciones de simetría resolver las correspondientes ecuaciones (Durán, Grünbaum, MdI). Usado en Durán-MdI (2008) para generar ejemplos de POM ortogonales con respecto a un peso matricial más una delta de Dirac en un punto.
- Problema biespectral matricial: resolviendo las llamadas *ad-conditions* ($\mathrm{ad}_{\boldsymbol{J}}^{k+1}(\boldsymbol{\Gamma}) = \mathbf{0}$) donde k es el orden del operador diferencial (Castro, Grünbaum, Tirao). Usado para generar ejemplos de orden $k = 1$ en Castro-Grünbaum (2005, 2008).

Cómo generar ejemplos

- Teoría de representación de grupos: búsqueda de funciones esféricas matriciales asociadas a diferentes grupos (Grünbaum, Pacharoni, Tirao, Román, Zurrián, Koelink).
- Ecuaciones de momentos: a partir de las ecuaciones de simetría resolver las correspondientes ecuaciones (Durán, Grünbaum, MdI). Usado en Durán-MdI (2008) para generar ejemplos de POM ortogonales con respecto a un peso matricial más una delta de Dirac en un punto.
- Problema biespectral matricial: resolviendo las llamadas *ad-conditions* ($\mathrm{ad}_{\boldsymbol{J}}^{k+1}(\boldsymbol{\Gamma}) = \boldsymbol{0}$) donde k es el orden del operador diferencial (Castro, Grünbaum, Tirao). Usado para generar ejemplos de orden $k = 1$ en Castro-Grünbaum (2005, 2008).

- Durán-Grünbaum (2004): resolviendo las ecuaciones de simetría (ecuaciones de Pearson matriciales):

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_2^*(x)\boldsymbol{W}(x) &= \boldsymbol{W}(x)\boldsymbol{F}_2(x)\\
\boldsymbol{F}_1^*(x)\boldsymbol{W}(x) &= 2(\boldsymbol{W}(x)\boldsymbol{F}_2(x))' - \boldsymbol{W}(x)\boldsymbol{F}_1(x)\\
\boldsymbol{F}_0^*(x)\boldsymbol{W}(x) &= (\boldsymbol{W}(x)\boldsymbol{F}_2(x))'' - (\boldsymbol{W}(x)\boldsymbol{F}_1(x))' + \boldsymbol{W}(x)\boldsymbol{F}_0(x)
\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to t}\boldsymbol{W}(x)\boldsymbol{F}_2(x) = \boldsymbol{0} = \lim_{x\to t}(\boldsymbol{W}(x)\boldsymbol{F}_1(x) - \boldsymbol{F}_1^*(x)\boldsymbol{W}(x)), \quad t = a, b$$

A continuación describimos un método general para resolverlas en el caso en el que el coeficiente líder $\boldsymbol{F}_2(x) = f_2(x)\boldsymbol{I}$. Para ello factorizamos

$$\boldsymbol{W}(x) = \omega(x)\boldsymbol{T}(x)\boldsymbol{T}^*(x),$$

donde ω es un peso escalar (Hermite, Laguerre o Jacobi) y $\boldsymbol{T}$ es una función matricial solución de

$$\boldsymbol{T}'(x) = \boldsymbol{G}(x)\boldsymbol{T}(x), \quad \boldsymbol{T}(c) = \boldsymbol{I}, \quad c \in (a, b)$$

- Durán-Grünbaum (2004): resolviendo las ecuaciones de simetría (ecuaciones de Pearson matriciales):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_2^*(x)\boldsymbol{W}(x) &= \boldsymbol{W}(x)\boldsymbol{F}_2(x) \\ \boldsymbol{F}_1^*(x)\boldsymbol{W}(x) &= 2(\boldsymbol{W}(x)\boldsymbol{F}_2(x))' - \boldsymbol{W}(x)\boldsymbol{F}_1(x) \\ \boldsymbol{F}_0^*(x)\boldsymbol{W}(x) &= (\boldsymbol{W}(x)\boldsymbol{F}_2(x))'' - (\boldsymbol{W}(x)\boldsymbol{F}_1(x))' + \boldsymbol{W}(x)\boldsymbol{F}_0(x) \end{aligned}$$

$$\lim_{x\to t} \boldsymbol{W}(x)\boldsymbol{F}_2(x) = \boldsymbol{0} = \lim_{x\to t}(\boldsymbol{W}(x)\boldsymbol{F}_1(x) - \boldsymbol{F}_1^*(x)\boldsymbol{W}(x)), \quad t = a, b$$

A continuación describimos un método general para resolverlas en el caso en el que el coeficiente líder $\boldsymbol{F}_2(x) = f_2(x)\boldsymbol{I}$. Para ello factorizamos

$$\boldsymbol{W}(x) = \omega(x)\boldsymbol{T}(x)\boldsymbol{T}^*(x),$$

donde ω es un peso escalar (Hermite, Laguerre o Jacobi) y $\boldsymbol{T}$ es una función matricial solución de

$$\boldsymbol{T}'(x) = \boldsymbol{G}(x)\boldsymbol{T}(x), \quad \boldsymbol{T}(c) = \boldsymbol{I}, \quad c \in (a, b)$$

1. La primera ecuación de simetría es trivial.
2. Definiendo
$$\boldsymbol{F}_1(x) = 2f_2(x)\boldsymbol{G}(x) + \frac{(f_2(x)\omega(x))'}{\omega(x)}\boldsymbol{I}$$
la segunda de las ecuaciones de simetría también se verifica.
3. Por último, la tercera de las ecuaciones de simetría es equivalente a
$$(\boldsymbol{W}(x)\boldsymbol{F}_1(x) - \boldsymbol{F}_1^*(x)\boldsymbol{W}(x))' = 2(\boldsymbol{W}(x)\boldsymbol{F}_0 - \boldsymbol{F}_0^*\boldsymbol{W}(x))$$
Por lo tanto, es suficiente encontrar $\boldsymbol{F}_0$ tal que
$$\chi(x) = \boldsymbol{T}^{-1}(x)\left(f_2(x)\boldsymbol{G}(x)+f_2(x)\boldsymbol{G}(x)^2+\frac{(f_2(x)\omega(x))'}{\omega(x)}\boldsymbol{G}(x)-\boldsymbol{F}_0\right)\boldsymbol{T}(x)$$
es hermítica para todo x.

El método se ha generalizado cuando $\boldsymbol{F}_2$ no es necesariamente escalar (Durán, 2008).

1. La primera ecuación de simetría es trivial.
2. Definiendo
$$F_1(x) = 2f_2(x)G(x) + \frac{(f_2(x)\omega(x))'}{\omega(x)} I$$
la segunda de las ecuaciones de simetría también se verifica.
3. Por último, la tercera de las ecuaciones de simetría es equivalente a
$$(W(x)F_1(x) - F_1^*(x)W(x))' = 2(W(x)F_0 - F_0^* W(x))$$
Por lo tanto, es suficiente encontrar F_0 tal que
$$\chi(x) = T^{-1}(x)\left(f_2(x)G(x)+f_2(x)G(x)^2+\frac{(f_2(x)\omega(x))'}{\omega(x)}G(x)-F_0\right)T(x)$$
es hermítica para todo x.

El método se ha generalizado cuando F_2 no es necesariamente escalar (Durán, 2008).

1. La primera ecuación de simetría es trivial.
2. Definiendo
$$\boldsymbol{F}_1(x) = 2f_2(x)\boldsymbol{G}(x) + \frac{(f_2(x)\omega(x))'}{\omega(x)}\boldsymbol{I}$$
la segunda de las ecuaciones de simetría también se verifica.
3. Por último, la tercera de las ecuaciones de simetría es equivalente a
$$(\boldsymbol{W}(x)\boldsymbol{F}_1(x) - \boldsymbol{F}_1^*(x)\boldsymbol{W}(x))' = 2(\boldsymbol{W}(x)\boldsymbol{F}_0 - \boldsymbol{F}_0^*\boldsymbol{W}(x))$$
Por lo tanto, es suficiente encontrar $\boldsymbol{F}_0$ tal que
$$\chi(x) = \boldsymbol{T}^{-1}(x)\left(f_2(x)\boldsymbol{G}(x)+f_2(x)\boldsymbol{G}(x)^2+\frac{(f_2(x)\omega(x))'}{\omega(x)}\boldsymbol{G}(x)-\boldsymbol{F}_0\right)\boldsymbol{T}(x)$$
es hermítica para todo x.

El método se ha generalizado cuando $\boldsymbol{F}_2$ no es necesariamente escalar (Durán, 2008).

1. La primera ecuación de simetría es trivial.
2. Definiendo
$$\boldsymbol{F}_1(x) = 2f_2(x)\boldsymbol{G}(x) + \frac{(f_2(x)\omega(x))'}{\omega(x)}\boldsymbol{I}$$
la segunda de las ecuaciones de simetría también se verifica.
3. Por último, la tercera de las ecuaciones de simetría es equivalente a
$$(\boldsymbol{W}(x)\boldsymbol{F}_1(x) - \boldsymbol{F}_1^*(x)\boldsymbol{W}(x))' = 2(\boldsymbol{W}(x)\boldsymbol{F}_0 - \boldsymbol{F}_0^*\boldsymbol{W}(x))$$
Por lo tanto, es suficiente encontrar $\boldsymbol{F}_0$ tal que
$$\chi(x) = \boldsymbol{T}^{-1}(x)\left(f_2(x)\boldsymbol{G}(x)+f_2(x)\boldsymbol{G}(x)^2+\frac{(f_2(x)\omega(x))'}{\omega(x)}\boldsymbol{G}(x)-\boldsymbol{F}_0\right)\boldsymbol{T}(x)$$
es hermítica para todo x.

El método se ha generalizado cuando $\boldsymbol{F}_2$ no es necesariamente escalar (Durán, 2008).

Ejemplos con $\boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{I}$

Sea $f_2 = 1$ y $\omega = e^{-x^2} \Rightarrow \boldsymbol{G}(x) = \boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{B}x, \boldsymbol{F}_1(x) = 2(\boldsymbol{A} + (2\boldsymbol{B} - \boldsymbol{I})x)$

$$\begin{cases} \text{Si } \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{W}(x) = e^{-x^2} e^{\boldsymbol{A}x} e^{\boldsymbol{A}^* x} \\ \text{Si } \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{W}(x) = e^{-x^2} e^{\boldsymbol{B}x^2} e^{\boldsymbol{B}^* x^2} \end{cases}$$

Para el primer caso, una solución para que

$$\chi(x) = \boldsymbol{A}^2 - 2\boldsymbol{A}x - e^{-\boldsymbol{A}x} \boldsymbol{F}_0 e^{\boldsymbol{A}x}$$

sea hermítica es eligiendo $\boldsymbol{F}_0 = \boldsymbol{A}^2 - 2\boldsymbol{J}$, con

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & \nu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \nu_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \nu_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} N-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & N-2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para el segundo caso una solución para que

$$\chi(x) = 2\boldsymbol{B} + (4\boldsymbol{B}^2 - 4\boldsymbol{B})x^2 - e^{-\boldsymbol{B}x^2} \boldsymbol{F}_0 e^{\boldsymbol{B}x^2}$$

sea hermítica tiene es eligiendo $\boldsymbol{F}_0 = 2\boldsymbol{B} - 4\boldsymbol{J}$ con $\boldsymbol{B} = \sum_{j=1}^{N-1} (-1)^{j+1} \boldsymbol{A}^j$

Ejemplos con $\boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{I}$

Sea $f_2 = 1$ y $\omega = e^{-x^2} \Rightarrow \boldsymbol{G}(x) = \boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{B}x, \boldsymbol{F}_1(x) = 2(\boldsymbol{A} + (2\boldsymbol{B} - \boldsymbol{I})x)$

$$\begin{cases} \text{Si } \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{W}(x) = e^{-x^2} e^{\boldsymbol{A}x} e^{\boldsymbol{A}^* x} \\ \text{Si } \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{W}(x) = e^{-x^2} e^{\boldsymbol{B}x^2} e^{\boldsymbol{B}^* x^2} \end{cases}$$

Para el primer caso, una solución para que

$$\chi(x) = \boldsymbol{A}^2 - 2\boldsymbol{A}x - e^{-\boldsymbol{A}x} \boldsymbol{F}_0 e^{\boldsymbol{A}x}$$

sea hermítica es eligiendo $\boldsymbol{F}_0 = \boldsymbol{A}^2 - 2\boldsymbol{J}$, con

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & \nu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \nu_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \nu_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} N-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & N-2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para el segundo caso una solución para que

$$\chi(x) = 2\boldsymbol{B} + (4\boldsymbol{B}^2 - 4\boldsymbol{B})x^2 - e^{-\boldsymbol{B}x^2} \boldsymbol{F}_0 e^{\boldsymbol{B}x^2}$$

sea hermítica tiene es eligiendo $\boldsymbol{F}_0 = 2\boldsymbol{B} - 4\boldsymbol{J}$ con $\boldsymbol{B} = \sum_{j=1}^{N-1} (-1)^{j+1} \boldsymbol{A}^j$

Ejemplos con $\boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{I}$

Sea $f_2 = 1$ y $\omega = e^{-x^2} \Rightarrow \boldsymbol{G}(x) = \boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{B}x, \boldsymbol{F}_1(x) = 2(\boldsymbol{A} + (2\boldsymbol{B} - \boldsymbol{I})x)$

$$\begin{cases} \text{Si } \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{W}(x) = e^{-x^2} e^{\boldsymbol{A}x} e^{\boldsymbol{A}^* x} \\ \text{Si } \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{W}(x) = e^{-x^2} e^{\boldsymbol{B}x^2} e^{\boldsymbol{B}^* x^2} \end{cases}$$

Para el primer caso, una solución para que

$$\chi(x) = \boldsymbol{A}^2 - 2\boldsymbol{A}x - e^{-\boldsymbol{A}x} \boldsymbol{F}_0 e^{\boldsymbol{A}x}$$

sea hermítica es eligiendo $\boldsymbol{F}_0 = \boldsymbol{A}^2 - 2\boldsymbol{J}$, con

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & \nu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \nu_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \nu_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} N-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & N-2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para el segundo caso una solución para que

$$\chi(x) = 2\boldsymbol{B} + (4\boldsymbol{B}^2 - 4\boldsymbol{B})x^2 - e^{-\boldsymbol{B}x^2} \boldsymbol{F}_0 e^{\boldsymbol{B}x^2}$$

sea hermítica tiene es eligiendo $\boldsymbol{F}_0 = 2\boldsymbol{B} - 4\boldsymbol{J}$ con $\boldsymbol{B} = \sum_{j=1}^{N-1} (-1)^{j+1} \boldsymbol{A}^j$

Ejemplos con $\boldsymbol{F}_2 = x\boldsymbol{I}$

$f_2 = x$, $\omega = x^\alpha e^{-x}, \alpha > -1 \Rightarrow$ $\boldsymbol{G}(x) = \boldsymbol{A} + \dfrac{\boldsymbol{B}}{x}$, y

$$\boldsymbol{F}_1(x) = (\alpha + 1)\boldsymbol{I} + 2\boldsymbol{B} - x(\boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{A})$$

$$\begin{cases} \text{Si } \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{W}(x) = x^\alpha e^{-x} e^{\boldsymbol{A}x} e^{\boldsymbol{A}^* x} \\ \text{Si } \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{W}(x) = x^\alpha e^{-x} x^{\boldsymbol{B}} x^{\boldsymbol{B}^*} \end{cases}$$

En el primer caso tiene que ocurrir que

$$\chi(x)\boldsymbol{W}(1) = e^{\boldsymbol{A}} \left((\alpha + 1)\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A})x - e^{-\boldsymbol{A}x} \boldsymbol{F}_0 e^{\boldsymbol{A}x} \right) e^{\boldsymbol{A}^*}$$

sea hermítica.
En el segundo caso tiene que ocurrir que

$$\chi(x) = (\boldsymbol{B}^2 + \alpha \boldsymbol{B}) \frac{1}{x} - \boldsymbol{B} - x^{-\boldsymbol{B}} \boldsymbol{F}_0 x^{\boldsymbol{B}}$$

sea hermítica.
Igual para $f_2 = 1 - x^2$ y $\omega = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta, \alpha, \beta > -1$
También se han conseguido otros ejemplos donde $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ no conmutan.

EJEMPLOS CON $\boldsymbol{F}_2 = x\boldsymbol{I}$

$f_2 = x$, $\omega = x^\alpha e^{-x}, \alpha > -1 \Rightarrow$ $\boldsymbol{G}(x) = \boldsymbol{A} + \dfrac{\boldsymbol{B}}{x}$, y

$$\boldsymbol{F}_1(x) = (\alpha+1)\boldsymbol{I} + 2\boldsymbol{B} - x(\boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{A})$$

$$\begin{cases} \text{Si } \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{W}(x) = x^\alpha e^{-x} e^{\boldsymbol{A}x} e^{\boldsymbol{A}^* x} \\ \text{Si } \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{W}(x) = x^\alpha e^{-x} x^{\boldsymbol{B}} x^{\boldsymbol{B}^*} \end{cases}$$

En el primer caso tiene que ocurrir que

$$\chi(x)\boldsymbol{W}(1) = e^{\boldsymbol{A}} \left((\alpha+1)\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A})x - e^{-\boldsymbol{A}x} \boldsymbol{F}_0 e^{\boldsymbol{A}x} \right) e^{\boldsymbol{A}^*}$$

sea hermítica.

En el segundo caso tiene que ocurrir que

$$\chi(x) = (\boldsymbol{B}^2 + \alpha \boldsymbol{B})\frac{1}{x} - \boldsymbol{B} - x^{-\boldsymbol{B}} \boldsymbol{F}_0 x^{\boldsymbol{B}}$$

sea hermítica.

Igual para $f_2 = 1 - x^2$ y $\omega = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta, \alpha, \beta > -1$

También se han conseguido otros ejemplos donde $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ no conmutan.

Ejemplos con $\boldsymbol{F}_2 = x\boldsymbol{I}$

$f_2 = x$, $\omega = x^\alpha e^{-x}, \alpha > -1 \Rightarrow$ $\boldsymbol{G}(x) = \boldsymbol{A} + \dfrac{\boldsymbol{B}}{x}$, y

$$\boldsymbol{F}_1(x) = (\alpha + 1)\boldsymbol{I} + 2\boldsymbol{B} - x(\boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{A})$$

$$\begin{cases} \text{Si } \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{W}(x) = x^\alpha e^{-x} e^{\boldsymbol{A}x} e^{\boldsymbol{A}^* x} \\ \text{Si } \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{W}(x) = x^\alpha e^{-x} x^{\boldsymbol{B}} x^{\boldsymbol{B}^*} \end{cases}$$

En el primer caso tiene que ocurrir que

$$\chi(x)\boldsymbol{W}(1) = e^{\boldsymbol{A}} \left((\alpha + 1)\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A})x - e^{-\boldsymbol{A}x} \boldsymbol{F}_0 e^{\boldsymbol{A}x} \right) e^{\boldsymbol{A}^*}$$

sea hermítica.

En el segundo caso tiene que ocurrir que

$$\chi(x) = (\boldsymbol{B}^2 + \alpha \boldsymbol{B})\frac{1}{x} - \boldsymbol{B} - x^{-\boldsymbol{B}} \boldsymbol{F}_0 x^{\boldsymbol{B}}$$

sea hermítica.

Igual para $f_2 = 1 - x^2$ y $\omega = (1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta, \alpha, \beta > -1$

También se han conseguido otros ejemplos donde $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ no conmutan.

Ejemplos con $\boldsymbol{F}_2 = x\boldsymbol{I}$

$f_2 = x$, $\omega = x^\alpha e^{-x}, \alpha > -1 \Rightarrow$ $\boldsymbol{G}(x) = \boldsymbol{A} + \dfrac{\boldsymbol{B}}{x}$, y

$$\boldsymbol{F}_1(x) = (\alpha+1)\boldsymbol{I} + 2\boldsymbol{B} - x(\boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{A})$$

$$\begin{cases} \text{Si } \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{W}(x) = x^\alpha e^{-x} e^{\boldsymbol{A}x} e^{\boldsymbol{A}^* x} \\ \text{Si } \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{W}(x) = x^\alpha e^{-x} x^{\boldsymbol{B}} x^{\boldsymbol{B}^*} \end{cases}$$

En el primer caso tiene que ocurrir que

$$\chi(x)\boldsymbol{W}(1) = e^{\boldsymbol{A}} \left((\alpha+1)\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A})x - e^{-\boldsymbol{A}x} \boldsymbol{F}_0 e^{\boldsymbol{A}x} \right) e^{\boldsymbol{A}^*}$$

sea hermítica.

En el segundo caso tiene que ocurrir que

$$\chi(x) = (\boldsymbol{B}^2 + \alpha\boldsymbol{B})\frac{1}{x} - \boldsymbol{B} - x^{-\boldsymbol{B}} \boldsymbol{F}_0 x^{\boldsymbol{B}}$$

sea hermítica.

Igual para $f_2 = 1 - x^2$ y $\omega = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta, \alpha, \beta > -1$

También se han conseguido otros ejemplos donde $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ no conmutan.

Nuevos fenómenos

- Existencia de varios operadores diferenciales de tipo Sturm-Liouville que tienen a una misma familia de POM como autofunciones (Castro, Durán, MdI, Grünbaum, Pacharoni, Tirao, Román).
- Para un operador diferencial fijo, existen infinitas familias de POM linealmente independientes que son autofunciones de ese mismo operador diferencial (Durán, MdI).
- Existencia de ejemplos de POM que satisfacen ecuaciones diferenciales de orden impar (Castro, Grünbaum, Durán, MdI).
- Existencia de una familia de operadores en escalera (de destrucción o aniquilación) para ciertos ejemplos de POM, algunos de ellos de orden 0 (Grünbaum, MdI, Martínez-Finkelshtein).

Aplicaciones

- Ecuación de Dirac: una solución particular de la ecuación de Dirac se relaciona con un peso matricial cuyos POM son autofunciones de un operador diferencial de segundo orden (Durán-Grünbaum).
- Problemas limitados en tiempo y banda discretos: cómputo efectivo de autovectores de ciertas matrices "llenas" buscando matrices tridiagonales que conmuten con ellas (Durán, Grünbaum, Pacharoni, Zurrián).
- Análisis armónico matricial: Funciones matriciales que son autofunciones al mismo tiempo de un operador diferencial de tipo Schrödinger y un operador integral de tipo Fourier (MdI).
- Cadenas de Markov bidimensionales: la segunda componente es discreta y finita (*fase*) (Dette, Reuther, Grünbaum, Pacharoni, Tirao, MdI).
- Procesos de difusión cambiantes: procesos de difusión en el que existe un proceso aleatorio markoviano discreto subyacente que hace que cambie el proceso (MdI).
- Otras aplicaciones: teoría de dispersión (Geronimo), resultados asintóticos (Durán, López-Rodríguez), fórmulas de cuadratura (Durán, Polo, van Assche, Sinap), sistemas integrables no conmutativos y ecuaciones de Painlevé no conmutativas (Cafasso, MdI), problemas de Riemann-Hilbert (Grünbaum, MdI, Martínez-Finkelshtein, Delvaux), etc.

Análisis armónico matricial

Sea $\boldsymbol{W}(x) = e^{-x^2} e^{\boldsymbol{A}x} e^{\boldsymbol{A}^* x}$ ($\boldsymbol{A}$ nilpotente). Los POM verifican

$$\boldsymbol{P}_n''(x) - 2(x\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{P}_n'(x) + (\boldsymbol{A}^2 - 2\boldsymbol{J})\boldsymbol{P}_n(x) = \boldsymbol{P}_n(x)(-2n\boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{J})$$

La familia $\Phi_n(x) = e^{-x^2/2} e^{\boldsymbol{A}^* x} \boldsymbol{P}_n(x)$ es ortogonal en $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{N\times N})$

$(\Phi_n)_n$ es autofunción de un operador diferencial de tipo Schrödinger matricial

$$\Phi_n''(x) - (x^2\boldsymbol{I} + 2\boldsymbol{J})\Phi_n(x) + \Phi_n(x)((2n+1)\boldsymbol{I} + 2\boldsymbol{J}) = \boldsymbol{0}, \quad x \in \mathbb{R}$$

y un operador integral de tipo Fourier matricial

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} e^{i\frac{\pi}{2}\boldsymbol{J}} \Phi_n(t)\,dt = \Phi_n(x)(i)^n e^{i\frac{\pi}{2}\boldsymbol{J}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

De nuevo hay 4 posible autovalores (matriciales), con lo que $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{N\times N}) = \boldsymbol{H}_1 \oplus \boldsymbol{H}_2 \oplus \boldsymbol{H}_3 \oplus \boldsymbol{H}_4$, donde

$$\boldsymbol{H}_k = \left\{ \boldsymbol{F} \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{N\times N}) : \boldsymbol{F}(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \Phi_{4n+k}(x)(\boldsymbol{F}, \Phi_{4n+k}) \right\}$$

Existen otros ejemplos pero con diferentes autovalores y autofunciones, con lo que no es la única manera de hacer análisis armónico en $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{N\times N})$.

Análisis armónico matricial

Sea $\boldsymbol{W}(x) = e^{-x^2} e^{\boldsymbol{A}x} e^{\boldsymbol{A}^* x}$ ($\boldsymbol{A}$ nilpotente). Los POM verifican

$$\boldsymbol{P}_n''(x) - 2(x\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{P}_n'(x) + (\boldsymbol{A}^2 - 2\boldsymbol{J})\boldsymbol{P}_n(x) = \boldsymbol{P}_n(x)(-2n\boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{J})$$

La familia $\Phi_n(x) = e^{-x^2/2} e^{\boldsymbol{A}^* x} \boldsymbol{P}_n(x)$ es ortogonal en $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{N\times N})$

$(\Phi_n)_n$ es autofunción de un operador diferencial de tipo Schrödinger matricial

$$\Phi_n''(x) - (x^2\boldsymbol{I} + 2\boldsymbol{J})\Phi_n(x) + \Phi_n(x)((2n+1)\boldsymbol{I} + 2\boldsymbol{J}) = \boldsymbol{0}, \quad x \in \mathbb{R}$$

y un operador integral de tipo Fourier matricial

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} e^{i\frac{\pi}{2}\boldsymbol{J}} \Phi_n(t)dt = \Phi_n(x)(i)^n e^{i\frac{\pi}{2}\boldsymbol{J}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

De nuevo hay 4 posible autovalores (matriciales), con lo que $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{N\times N}) = \boldsymbol{H}_1 \oplus \boldsymbol{H}_2 \oplus \boldsymbol{H}_3 \oplus \boldsymbol{H}_4$, donde

$$\boldsymbol{H}_k = \left\{ \boldsymbol{F} \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{N\times N}) : \boldsymbol{F}(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \Phi_{4n+k}(x)(\boldsymbol{F}, \Phi_{4n+k}) \right\}$$

Existen otros ejemplos pero con diferentes autovalores y autofunciones, con lo que no es la única manera de hacer análisis armónico en $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{N\times N})$.

Análisis armónico matricial

Sea $\boldsymbol{W}(x) = e^{-x^2} e^{\boldsymbol{A}x} e^{\boldsymbol{A}^* x}$ ($\boldsymbol{A}$ nilpotente). Los POM verifican

$$\boldsymbol{P}_n''(x) - 2(x\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{P}_n'(x) + (\boldsymbol{A}^2 - 2\boldsymbol{J})\boldsymbol{P}_n(x) = \boldsymbol{P}_n(x)(-2n\boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{J})$$

La familia $\boldsymbol{\Phi}_n(x) = e^{-x^2/2} e^{\boldsymbol{A}^* x} \boldsymbol{P}_n(x)$ es ortogonal en $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{N\times N})$
$(\boldsymbol{\Phi}_n)_n$ es autofunción de un operador diferencial de tipo Schrödinger matricial

$$\boldsymbol{\Phi}_n''(x) - (x^2\boldsymbol{I} + 2\boldsymbol{J})\boldsymbol{\Phi}_n(x) + \boldsymbol{\Phi}_n(x)((2n+1)\boldsymbol{I} + 2\boldsymbol{J}) = \boldsymbol{0}, \quad x \in \mathbb{R}$$

y un operador integral de tipo Fourier matricial

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} e^{i\frac{\pi}{2}\boldsymbol{J}} \boldsymbol{\Phi}_n(t)dt = \boldsymbol{\Phi}_n(x)(i)^n e^{i\frac{\pi}{2}\boldsymbol{J}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

De nuevo hay 4 posible autovalores (matriciales), con lo que $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{N\times N}) = \boldsymbol{H}_1 \oplus \boldsymbol{H}_2 \oplus \boldsymbol{H}_3 \oplus \boldsymbol{H}_4$, donde

$$\boldsymbol{H}_k = \left\{ \boldsymbol{F} \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{N\times N}) : \boldsymbol{F}(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \boldsymbol{\Phi}_{4n+k}(x)(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{\Phi}_{4n+k}) \right\}$$

Existen otros ejemplos pero con diferentes autovalores y autofunciones, con lo que no es la única manera de hacer análisis armónico en $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{N\times N})$.

Análisis armónico matricial

Sea $\boldsymbol{W}(x) = e^{-x^2} e^{\boldsymbol{A}x} e^{\boldsymbol{A}^* x}$ ($\boldsymbol{A}$ nilpotente). Los POM verifican

$$\boldsymbol{P}_n''(x) - 2(x\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{P}_n'(x) + (\boldsymbol{A}^2 - 2\boldsymbol{J})\boldsymbol{P}_n(x) = \boldsymbol{P}_n(x)(-2n\boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{J})$$

La familia $\boldsymbol{\Phi}_n(x) = e^{-x^2/2} e^{\boldsymbol{A}^* x} \boldsymbol{P}_n(x)$ es ortogonal en $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{N\times N})$
$(\boldsymbol{\Phi}_n)_n$ es autofunción de un operador diferencial de tipo Schrödinger matricial

$$\boldsymbol{\Phi}_n''(x) - (x^2\boldsymbol{I} + 2\boldsymbol{J})\boldsymbol{\Phi}_n(x) + \boldsymbol{\Phi}_n(x)((2n+1)\boldsymbol{I} + 2\boldsymbol{J}) = \boldsymbol{0}, \quad x \in \mathbb{R}$$

y un operador integral de tipo Fourier matricial

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} e^{i\frac{\pi}{2}\boldsymbol{J}} \boldsymbol{\Phi}_n(t)dt = \boldsymbol{\Phi}_n(x)(i)^n e^{i\frac{\pi}{2}\boldsymbol{J}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

De nuevo hay 4 posible autovalores (matriciales), con lo que $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{N\times N}) = \boldsymbol{H}_1 \oplus \boldsymbol{H}_2 \oplus \boldsymbol{H}_3 \oplus \boldsymbol{H}_4$, donde

$$\boldsymbol{H}_k = \left\{ \boldsymbol{F} \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{N\times N}) : \boldsymbol{F}(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \boldsymbol{\Phi}_{4n+k}(x)(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{\Phi}_{4n+k}) \right\}$$

Existen otros ejemplos pero con diferentes autovalores y autofunciones, con lo que no es la única manera de hacer análisis armónico en $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{N\times N})$.

Análisis armónico matricial

Sea $\boldsymbol{W}(x) = e^{-x^2} e^{\boldsymbol{A}x} e^{\boldsymbol{A}^* x}$ ($\boldsymbol{A}$ nilpotente). Los POM verifican

$$\boldsymbol{P}_n''(x) - 2(x\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{P}_n'(x) + (\boldsymbol{A}^2 - 2\boldsymbol{J})\boldsymbol{P}_n(x) = \boldsymbol{P}_n(x)(-2n\boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{J})$$

La familia $\boldsymbol{\Phi}_n(x) = e^{-x^2/2} e^{\boldsymbol{A}^* x} \boldsymbol{P}_n(x)$ es ortogonal en $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{N\times N})$
$(\boldsymbol{\Phi}_n)_n$ es autofunción de un operador diferencial de tipo Schrödinger matricial

$$\boldsymbol{\Phi}_n''(x) - (x^2\boldsymbol{I} + 2\boldsymbol{J})\boldsymbol{\Phi}_n(x) + \boldsymbol{\Phi}_n(x)((2n+1)\boldsymbol{I} + 2\boldsymbol{J}) = \boldsymbol{0}, \quad x \in \mathbb{R}$$

y un operador integral de tipo Fourier matricial

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} e^{i\frac{\pi}{2}\boldsymbol{J}} \boldsymbol{\Phi}_n(t)dt = \boldsymbol{\Phi}_n(x)(i)^n e^{i\frac{\pi}{2}\boldsymbol{J}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

De nuevo hay 4 posible autovalores (matriciales), con lo que
$L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{N\times N}) = \boldsymbol{H}_1 \oplus \boldsymbol{H}_2 \oplus \boldsymbol{H}_3 \oplus \boldsymbol{H}_4$, donde

$$\boldsymbol{H}_k = \left\{ \boldsymbol{F} \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{N\times N}) : \boldsymbol{F}(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \boldsymbol{\Phi}_{4n+k}(x)(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{\Phi}_{4n+k}) \right\}$$

Existen otros ejemplos pero con diferentes autovalores y autofunciones, con lo que no es la única manera de hacer análisis armónico en $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{N\times N})$.

Análisis armónico matricial

Sea $\boldsymbol{W}(x) = e^{-x^2} e^{\boldsymbol{A}x} e^{\boldsymbol{A}^* x}$ ($\boldsymbol{A}$ nilpotente). Los POM verifican

$$\boldsymbol{P}_n''(x) - 2(x\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{P}_n'(x) + (\boldsymbol{A}^2 - 2\boldsymbol{J})\boldsymbol{P}_n(x) = \boldsymbol{P}_n(x)(-2n\boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{J})$$

La familia $\boldsymbol{\Phi}_n(x) = e^{-x^2/2} e^{\boldsymbol{A}^* x} \boldsymbol{P}_n(x)$ es ortogonal en $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{N\times N})$
$(\boldsymbol{\Phi}_n)_n$ es autofunción de un operador diferencial de tipo Schrödinger matricial

$$\boldsymbol{\Phi}_n''(x) - (x^2\boldsymbol{I} + 2\boldsymbol{J})\boldsymbol{\Phi}_n(x) + \boldsymbol{\Phi}_n(x)((2n+1)\boldsymbol{I} + 2\boldsymbol{J}) = \boldsymbol{0}, \quad x \in \mathbb{R}$$

y un operador integral de tipo Fourier matricial

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} e^{i\frac{\pi}{2}\boldsymbol{J}} \boldsymbol{\Phi}_n(t) dt = \boldsymbol{\Phi}_n(x)(i)^n e^{i\frac{\pi}{2}\boldsymbol{J}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

De nuevo hay 4 posible autovalores (matriciales), con lo que
$L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{N\times N}) = \boldsymbol{H}_1 \oplus \boldsymbol{H}_2 \oplus \boldsymbol{H}_3 \oplus \boldsymbol{H}_4$, donde

$$\boldsymbol{H}_k = \left\{ \boldsymbol{F} \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{N\times N}) : \boldsymbol{F}(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \boldsymbol{\Phi}_{4n+k}(x)(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{\Phi}_{4n+k}) \right\}$$

Existen otros ejemplos pero con diferentes autovalores y autofunciones, con lo que no es la única manera de hacer análisis armónico en $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{N\times N})$.

Cuasi-procesos de nacimiento y muerte

Las transiciones de probabilidades son (a tiempo continuo)

$$(\boldsymbol{P}_{i'j'})_{ij}(t) = \mathbb{P}(X_t = j', Y_t = j | X_0 = i', Y_0 = i), \quad i', j' \in \mathcal{S} \subset \mathbb{Z}, \quad 1 \leq i, j \leq N$$

El operador infinitesimal $\mathcal{A} = \boldsymbol{P}'(0)$ viene dado por

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_0 & \boldsymbol{A}_0 & & & \\ \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{A}_1 & & \\ & \boldsymbol{C}_2 & \boldsymbol{B}_2 & \boldsymbol{A}_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

donde $\boldsymbol{A}_n, \boldsymbol{C}_{n+1}, n \geq 0$ son matrices no singulares, $\mathcal{A}$ tiene todas sus entradas no negativas fuera de la diagonal principal (escalar!) y

$$(\boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{B}_0)\boldsymbol{e}_N \leq \boldsymbol{0}_N, \quad (\boldsymbol{A}_n + \boldsymbol{B}_n + \boldsymbol{C}_n)\boldsymbol{e}_N \leq \boldsymbol{0}_N, \quad \boldsymbol{e}_N = (1, \ldots, 1)^T$$

Se construye, para $x \in \mathbb{R}$, un vector $\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{Q}_0^T(x), \boldsymbol{Q}_1^T(x), \ldots)^T$ tal que $\mathcal{A}\boldsymbol{Q} = -x\boldsymbol{Q}$, i.e. los polinomios matriciales $(\boldsymbol{Q}_n)_n$ verifican

$$-x\boldsymbol{Q}_n(x) = \boldsymbol{A}_n\boldsymbol{Q}_{n+1}(x) + \boldsymbol{B}_n\boldsymbol{Q}_n(x) + \boldsymbol{C}_n\boldsymbol{Q}_{n-1}(x)$$

El análisis espectral será posible si se puede “simetrizar” $\mathcal{A}$. Para ello debe existir una sucesión de matrices no singulares $(\boldsymbol{R}_n)_n$ tal que

$$\boldsymbol{R}_n\boldsymbol{B}_n\boldsymbol{R}_n^{-1} = (\boldsymbol{R}_n\boldsymbol{B}_n\boldsymbol{R}_n^{-1})^T, \quad \boldsymbol{R}_n\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{R}_{n+1}^{-1} = (\boldsymbol{R}_{n+1}\boldsymbol{C}_{n+1}\boldsymbol{R}_n)^T, \quad n \geq 0$$

Cuasi-procesos de nacimiento y muerte

Las transiciones de probabilidades son (a tiempo continuo)

$$(\boldsymbol{P}_{i'j'})_{ij}(t) = \mathbb{P}(X_t = j', Y_t = j | X_0 = i', Y_0 = i), \quad i', j' \in \mathcal{S} \subset \mathbb{Z}, \quad 1 \leq i, j \leq N$$

El operador infinitesimal $\mathcal{A} = \boldsymbol{P}'(0)$ viene dado por

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_0 & \boldsymbol{A}_0 & & & \\ \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{A}_1 & & \\ & \boldsymbol{C}_2 & \boldsymbol{B}_2 & \boldsymbol{A}_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

donde $\boldsymbol{A}_n, \boldsymbol{C}_{n+1}, n \geq 0$ son matrices no singulares, $\mathcal{A}$ tiene todas sus entradas no negativas fuera de la diagonal principal (escalar!) y

$$(\boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{B}_0)\boldsymbol{e}_N \leq \boldsymbol{0}_N, \quad (\boldsymbol{A}_n + \boldsymbol{B}_n + \boldsymbol{C}_n)\boldsymbol{e}_N \leq \boldsymbol{0}_N, \quad \boldsymbol{e}_N = (1, \ldots, 1)^T$$

Se construye, para $x \in \mathbb{R}$, un vector $\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{Q}_0^T(x), \boldsymbol{Q}_1^T(x), \ldots)^T$ tal que $\mathcal{A}\boldsymbol{Q} = -x\boldsymbol{Q}$, i.e. los polinomios matriciales $(\boldsymbol{Q}_n)_n$ verifican

$$-x\boldsymbol{Q}_n(x) = \boldsymbol{A}_n\boldsymbol{Q}_{n+1}(x) + \boldsymbol{B}_n\boldsymbol{Q}_n(x) + \boldsymbol{C}_n\boldsymbol{Q}_{n-1}(x)$$

El análisis espectral será posible si se puede “simetrizar” $\mathcal{A}$. Para ello debe existir una sucesión de matrices no singulares $(\boldsymbol{R}_n)_n$ tal que

$$\boldsymbol{R}_n\boldsymbol{B}_n\boldsymbol{R}_n^{-1} = (\boldsymbol{R}_n\boldsymbol{B}_n\boldsymbol{R}_n^{-1})^T, \quad \boldsymbol{R}_n\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{R}_{n+1}^{-1} = (\boldsymbol{R}_{n+1}\boldsymbol{C}_{n+1}\boldsymbol{R}_n)^T, \quad n \geq 0$$

Cuasi-procesos de nacimiento y muerte

Las transiciones de probabilidades son (a tiempo continuo)

$$(\boldsymbol{P}_{i'j'})_{ij}(t) = \mathbb{P}(X_t = j', Y_t = j | X_0 = i', Y_0 = i), \quad i', j' \in \mathcal{S} \subset \mathbb{Z}, \quad 1 \leq i, j \leq N$$

El operador infinitesimal $\mathcal{A} = \boldsymbol{P}'(0)$ viene dado por

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_0 & \boldsymbol{A}_0 & & & \\ \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{A}_1 & & \\ & \boldsymbol{C}_2 & \boldsymbol{B}_2 & \boldsymbol{A}_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

donde $\boldsymbol{A}_n, \boldsymbol{C}_{n+1}, n \geq 0$ son matrices no singulares, $\mathcal{A}$ tiene todas sus entradas no negativas fuera de la diagonal principal (escalar!) y

$$(\boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{B}_0)\boldsymbol{e}_N \leq \boldsymbol{0}_N, \quad (\boldsymbol{A}_n + \boldsymbol{B}_n + \boldsymbol{C}_n)\boldsymbol{e}_N \leq \boldsymbol{0}_N, \quad \boldsymbol{e}_N = (1, \ldots, 1)^T$$

Se construye, para $x \in \mathbb{R}$, un vector $\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{Q}_0^T(x), \boldsymbol{Q}_1^T(x), \ldots)^T$ tal que $\mathcal{A}\boldsymbol{Q} = -x\boldsymbol{Q}$, i.e. los polinomios matriciales $(\boldsymbol{Q}_n)_n$ verifican

$$-x\boldsymbol{Q}_n(x) = \boldsymbol{A}_n\boldsymbol{Q}_{n+1}(x) + \boldsymbol{B}_n\boldsymbol{Q}_n(x) + \boldsymbol{C}_n\boldsymbol{Q}_{n-1}(x)$$

El análisis espectral será posible si se puede "simetrizar" $\mathcal{A}$. Para ello debe existir una sucesión de matrices no singulares $(\boldsymbol{R}_n)_n$ tal que

$$\boldsymbol{R}_n\boldsymbol{B}_n\boldsymbol{R}_n^{-1} = (\boldsymbol{R}_n\boldsymbol{B}_n\boldsymbol{R}_n^{-1})^T, \quad \boldsymbol{R}_n\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{R}_{n+1}^{-1} = (\boldsymbol{R}_{n+1}\boldsymbol{C}_{n+1}\boldsymbol{R}_n)^T, \quad n \geq 0$$

El espacio de aplicación del Teorema espectral viene dado ahora por

$$\ell^2_{\mathbf{\Pi}}(\mathbb{N};\mathbb{C}^{N\times N})=\left\{(\boldsymbol{X}_n)_n:(\boldsymbol{X},\boldsymbol{X})_{\mathbf{\Pi}}=\sum_{n\geq 0}\boldsymbol{X}_n\Pi_n\boldsymbol{X}_n^*<\infty\right\}$$

donde

$$\Pi_n=\boldsymbol{R}_n^T\boldsymbol{R}_n=(\boldsymbol{C}_1^T\boldsymbol{C}_2^T\cdots\boldsymbol{C}_n^T)^{-1}\boldsymbol{R}_0^T\boldsymbol{R}_0(\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{A}_1\cdots\boldsymbol{A}_{n-1}),\quad n\geq 1$$

Grünbaum y Dette-Reuther-Studden-Zygmunt en 2007 llegaron al siguiente

Theorem (Representación integral de Karlin-McGregor)

Existe una matriz peso $\boldsymbol{W}$ asociada a $\mathcal{A}$ con soporte en $[0,\infty)$ tal que se tiene la siguiente representación integral de $\boldsymbol{P}(t)$

$$\boldsymbol{P}_{ij}(t)=\left(\int_0^\infty e^{-xt}\boldsymbol{Q}_i(x)d\boldsymbol{W}(x)\boldsymbol{Q}_j^T(x)\right)\left(\int_0^\infty \boldsymbol{Q}_j(x)d\boldsymbol{W}(x)\boldsymbol{Q}_j^T(x)\right)^{-1}$$

Además $\Pi_j^{-1}=\|\boldsymbol{Q}_j\|^2_{\boldsymbol{W}}$ y la familia de polinomios matriciales $(\boldsymbol{Q}_n)_n$ es ortogonal con respecto a $\boldsymbol{W}$ en el espacio $L^2_{\boldsymbol{W}}([0,\infty);\mathbb{C}^{N\times N})$.

Ejemplos: Tiempo discreto: Grünbaum-MdI (2008), Dette-Reuther-Studden-Zymunt (2007), Clayton (2010). Tiempo continuo: Dette-Reuther (2010), MdI-Román (2016).

El espacio de aplicación del Teorema espectral viene dado ahora por

$$\ell^2_{\boldsymbol{\Pi}}(\mathbb{N};\mathbb{C}^{N\times N}) = \left\{ (\boldsymbol{X}_n)_n : (\boldsymbol{X},\boldsymbol{X})_{\boldsymbol{\Pi}} = \sum_{n\geq 0} \boldsymbol{X}_n \Pi_n \boldsymbol{X}_n^* < \infty \right\}$$

donde

$$\Pi_n = \boldsymbol{R}_n^T \boldsymbol{R}_n = (\boldsymbol{C}_1^T \boldsymbol{C}_2^T \cdots \boldsymbol{C}_n^T)^{-1} \boldsymbol{R}_0^T \boldsymbol{R}_0 (\boldsymbol{A}_0 \boldsymbol{A}_1 \cdots \boldsymbol{A}_{n-1}), \quad n \geq 1$$

Grünbaum y Dette-Reuther-Studden-Zygmunt en 2007 llegaron al siguiente

Theorem (Representación integral de Karlin-McGregor)

Existe una matriz peso $\boldsymbol{W}$ asociada a $\mathcal{A}$ con soporte en $[0,\infty)$ tal que se tiene la siguiente representación integral de $\boldsymbol{P}(t)$

$$\boldsymbol{P}_{ij}(t) = \left(\int_0^\infty e^{-xt} \boldsymbol{Q}_i(x) d\boldsymbol{W}(x) \boldsymbol{Q}_j^T(x) \right) \left(\int_0^\infty \boldsymbol{Q}_j(x) d\boldsymbol{W}(x) \boldsymbol{Q}_j^T(x) \right)^{-1}$$

Además $\Pi_j^{-1} = \|\boldsymbol{Q}_j\|^2_{\boldsymbol{W}}$ y la familia de polinomios matriciales $(\boldsymbol{Q}_n)_n$ es ortogonal con respecto a $\boldsymbol{W}$ en el espacio $L^2_{\boldsymbol{W}}([0,\infty);\mathbb{C}^{N\times N})$.

Ejemplos: Tiempo discreto: Grünbaum-MdI (2008), Dette-Reuther-Studden-Zymunt (2007), Clayton (2010).
Tiempo continuo: Dette-Reuther (2010), MdI-Román (2016).

Procesos de difusión cambiantes

El operador infinitesimal $\mathcal{A}$ es ahora un operador diferencial de segundo orden matricial (Berman, 1994)

$$\mathcal{A}_x = \frac{1}{2}\boldsymbol{A}(x)\partial_x^2 + \boldsymbol{B}(x)\partial_x^1 + \boldsymbol{Q}(x)$$

donde $\boldsymbol{A}(x)$ y $\boldsymbol{B}(x)$ son matrices diagonales y $\boldsymbol{Q}(x)$ es el operador infinitesimal de una cadena de Markov finita a tiempo continuo.

Si existen autofunciones matriciales ortogonales $(\Phi_n)_n$ *completa* en $L^2_W(\mathcal{S};\mathbb{C}^{N\times N})$ con autovalores matriciales Γ_n tal que $\mathcal{A}\Phi_n = \Phi_n\Gamma_n$ entonces se tiene una representación espectral de la (matriz) transición de probabilidades (MdI, 2012).

$$\boldsymbol{P}(t;x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\Phi_n(x)e^{\Gamma_n t}\Phi_n^*(y)\boldsymbol{W}(y)$$

También se puede obtener la distribución invariante (si existiese) $\psi(y) = (\psi_1(y),\psi_2(y),\dots,\psi_N(y))$ tal que $\psi(y)\mathcal{A}_y^* = \boldsymbol{0}$

$$\psi(y) = \left(\int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{e}_N^T\boldsymbol{W}(x)\boldsymbol{e}_N dx\right)^{-1}\boldsymbol{e}_N^T\boldsymbol{W}(y), \quad \boldsymbol{e}_N = (1,\dots,1)^T$$

Ejemplos: Mdi (2012), MdI-Román (2016).

Procesos de difusión cambiantes

El operador infinitesimal $\mathcal{A}$ es ahora un operador diferencial de segundo orden matricial (Berman, 1994)

$$\mathcal{A}_x = \frac{1}{2}\boldsymbol{A}(x)\partial_x^2 + \boldsymbol{B}(x)\partial_x^1 + \boldsymbol{Q}(x)$$

donde $\boldsymbol{A}(x)$ y $\boldsymbol{B}(x)$ son matrices diagonales y $\boldsymbol{Q}(x)$ es el operador infinitesimal de una cadena de Markov finita a tiempo continuo.

Si existen autofunciones matriciales ortogonales $(\boldsymbol{\Phi}_n)_n$ *completa* en $L^2_{\boldsymbol{W}}(\mathcal{S};\mathbb{C}^{N\times N})$ con autovalores matriciales $\boldsymbol{\Gamma}_n$ tal que $\mathcal{A}\boldsymbol{\Phi}_n = \boldsymbol{\Phi}_n\boldsymbol{\Gamma}_n$ entonces se tiene una representación espectral de la (matriz) transición de probabilidades (MdI, 2012).

$$\boldsymbol{P}(t;x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{\Phi}_n(x)e^{\boldsymbol{\Gamma}_n t}\boldsymbol{\Phi}_n^*(y)\boldsymbol{W}(y)$$

También se puede obtener la distribución invariante (si existiese) $\psi(y) = (\psi_1(y), \psi_2(y), \ldots, \psi_N(y))$ tal que $\psi(y)\mathcal{A}_y^* = \mathbf{0}$

$$\psi(y) = \left(\int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{e}_N^T \boldsymbol{W}(x)\boldsymbol{e}_N dx\right)^{-1} \boldsymbol{e}_N^T \boldsymbol{W}(y), \quad \boldsymbol{e}_N = (1,\ldots,1)^T$$

Ejemplos: Mdi (2012), MdI-Román (2016).

Procesos de difusión cambiantes

El operador infinitesimal $\mathcal{A}$ es ahora un operador diferencial de segundo orden matricial (Berman, 1994)

$$\mathcal{A}_x = \frac{1}{2}\boldsymbol{A}(x)\partial_x^2 + \boldsymbol{B}(x)\partial_x^1 + \boldsymbol{Q}(x)$$

donde $\boldsymbol{A}(x)$ y $\boldsymbol{B}(x)$ son matrices diagonales y $\boldsymbol{Q}(x)$ es el operador infinitesimal de una cadena de Markov finita a tiempo continuo.

Si existen autofunciones matriciales ortogonales $(\boldsymbol{\Phi}_n)_n$ *completa* en $L^2_{\boldsymbol{W}}(\mathcal{S};\mathbb{C}^{N\times N})$ con autovalores matriciales $\boldsymbol{\Gamma}_n$ tal que $\mathcal{A}\boldsymbol{\Phi}_n = \boldsymbol{\Phi}_n\boldsymbol{\Gamma}_n$ entonces se tiene una representación espectral de la (matriz) transición de probabilidades (MdI, 2012).

$$\boldsymbol{P}(t;x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{\Phi}_n(x)e^{\boldsymbol{\Gamma}_n t}\boldsymbol{\Phi}_n^*(y)\boldsymbol{W}(y)$$

También se puede obtener la distribución invariante (si existiese) $\boldsymbol{\psi}(y) = (\psi_1(y), \psi_2(y), \ldots, \psi_N(y))$ tal que $\boldsymbol{\psi}(y)\mathcal{A}_y^* = \boldsymbol{0}$

$$\boldsymbol{\psi}(y) = \left(\int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{e}_N^T\boldsymbol{W}(x)\boldsymbol{e}_N dx\right)^{-1} \boldsymbol{e}_N^T\boldsymbol{W}(y), \quad \boldsymbol{e}_N = (1,\ldots,1)^T$$

Ejemplos: Mdi (2012), MdI-Román (2016).

Ejemplo (funciones esféricas matriciales)

Sean $\boldsymbol{Q}_n(x)$ los polinomios matriciales 2×2 generados por

$$-x\boldsymbol{Q}_n(x) = \boldsymbol{A}_n\boldsymbol{Q}_{n+1}(x) + \boldsymbol{B}_n\boldsymbol{Q}_n(x) + \boldsymbol{C}_n\boldsymbol{Q}_{n-1}(x)$$

donde los coeficientes vienen dados por

$$\boldsymbol{A}_n = \begin{pmatrix} \frac{2\nu+n+2}{4(\nu+n+2)} & 0 \\ 0 & \frac{(n+\nu)(2\nu+n+2)}{4(\nu+n+1)^2} \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}_n = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\nu}{2(\nu+n)(\nu+n+2)} \\ \frac{1+\nu}{2(\nu+n+1)^2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \boldsymbol{C}_n = \begin{pmatrix} \frac{n}{4(\nu+n)} & 0 \\ 0 & \frac{n(\nu+n+2)}{4(\nu+n+1)^2} \end{pmatrix}$$

La matriz de Jacobi (pentadiagonal) es

$$\mathcal{A} = \left(\begin{array}{cc|cc|cc|cc|c} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2(\nu+2)} & \frac{\nu+1}{2(\nu+2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2(\nu+1)} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\nu}{2(\nu+1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \hline \frac{1}{4(\nu+1)} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\nu}{2(\nu+1)(\nu+3)} & \frac{2\nu+3}{4(\nu+3)} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{\nu+3}{4(\nu+2)^2} & \frac{1+\nu}{2(\nu+2)^2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{(1+\nu)(2\nu+3)}{4(\nu+2)^2} & 0 & 0 & \cdots \\ \hline 0 & 0 & \frac{1}{2(\nu+2)} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\nu}{2(\nu+2)(\nu+4)} & \frac{\nu+2}{2(\nu+4)} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\nu+4}{2(\nu+3)^2} & \frac{1+\nu}{2(\nu+3)^2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{(2+\nu)^2}{2(\nu+3)^2} & \cdots \\ \hline & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{array}\right)$$

y es el operador infinitesimal de un cuasi-proceso de nacimiento y muerte ($\nu \geq 0$) a tiempo continuo (MdI-Román, 2016).

El peso matricial es de tipo Gegenbauer (ultraesférico) y viene dado por

$$W(x) = 4^{\nu+1/2}(\nu+2)\,[x(1-x)]^{\nu-1/2}\begin{pmatrix} 1-\frac{2(1+\nu)}{\nu+1/2}y(1-x) & 1-2x \\ 1-2x & 1-\frac{2\nu}{\nu+1/2}x(1-x)\end{pmatrix}$$

Cada entrada por bloques (i,j) de $\boldsymbol{P}(t)$ admite una representación de Karlin-McGregor

$$P_{ij}(t) = \left(\int_0^1 e^{-xt}\boldsymbol{Q}_i(x)\boldsymbol{W}(x)\boldsymbol{Q}_j^*(x)dx\right)\Pi_j$$

$$\Pi_0 = \|\boldsymbol{Q}_0\|_{\boldsymbol{W}}^{-2},\ \Pi_n = \|\boldsymbol{Q}_n\|_{\boldsymbol{W}}^{-2} = \frac{2\Gamma(\nu+2)(2\nu+3)_{n-1}}{\sqrt{\pi}n!(\nu+2)\Gamma(\nu+1/2)}\begin{pmatrix}\frac{\nu+1}{\nu+n+1} & 0 \\ 0 & \frac{\nu(\nu+n+1)}{(\nu+n)(\nu+n+2)}\end{pmatrix}$$

Podemos computar también *explícitamente* la medida invariante del proceso

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\pi} &= \left((\Pi_0\boldsymbol{e}_2)^T;(\Pi_1\boldsymbol{e}_2)^T;(\Pi_2\boldsymbol{e}_2)^T;\cdots\right),\quad \boldsymbol{e}_2^T=(1,1),\\ &= \frac{\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1/2)(\nu+2)}\left(1,\frac{\nu+1}{\nu+2};\frac{2(\nu+1)^2}{\nu+2},\frac{2\nu(\nu+2)}{\nu+3};\cdots\right)\end{aligned}$$

Interpretación: El proceso con dos fases se puede interpretar como una variación racional de un par de colas con un servidor, donde la interacción entre ellas es significativa en los primeros estados de la cola.

El peso matricial es de tipo Gegenbauer (ultraesférico) y viene dado por

$$\boldsymbol{W}(x) = 4^{\nu+1/2}(\nu+2)\left[x(1-x)\right]^{\nu-1/2}\begin{pmatrix} 1-\frac{2(1+\nu)}{\nu+1/2}y(1-x) & 1-2x \\ 1-2x & 1-\frac{2\nu}{\nu+1/2}x(1-x) \end{pmatrix}$$

Cada entrada por bloques (i,j) de $\boldsymbol{P}(t)$ admite una representación de Karlin-McGregor

$$P_{ij}(t) = \left(\int_0^1 e^{-xt}\boldsymbol{Q}_i(x)\boldsymbol{W}(x)\boldsymbol{Q}_j^*(x)dx\right)\Pi_j$$

$$\Pi_0 = \|\boldsymbol{Q}_0\|_{\boldsymbol{W}}^{-2},\ \Pi_n = \|\boldsymbol{Q}_n\|_{\boldsymbol{W}}^{-2} = \frac{2\Gamma(\nu+2)(2\nu+3)_{n-1}}{\sqrt{\pi}n!(\nu+2)\Gamma(\nu+1/2)}\begin{pmatrix} \frac{\nu+1}{\nu+n+1} & 0 \\ 0 & \frac{\nu(\nu+n+1)}{(\nu+n)(\nu+n+2)} \end{pmatrix}$$

Podemos computar también *explícitamente* la medida invariante del proceso

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\pi} &= \left((\Pi_0\boldsymbol{e}_2)^T;(\Pi_1\boldsymbol{e}_2)^T;(\Pi_2\boldsymbol{e}_2)^T;\cdots\right), \quad \boldsymbol{e}_2^T = (1,1), \\ &= \frac{\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1/2)(\nu+2)}\left(1,\frac{\nu+1}{\nu+2};\frac{2(\nu+1)^2}{\nu+2},\frac{2\nu(\nu+2)}{\nu+3};\ldots\right)\end{aligned}$$

Interpretación: El proceso con dos fases se puede interpretar como una variación racional de un par de colas con un servidor, donde la interacción entre ellas es significativa en los primeros estados de la cola.

El peso matricial es de tipo Gegenbauer (ultraesférico) y viene dado por

$$\boldsymbol{W}(x) = 4^{\nu+1/2}(\nu+2)\left[x(1-x)\right]^{\nu-1/2}\begin{pmatrix} 1-\frac{2(1+\nu)}{\nu+1/2}y(1-x) & 1-2x \\ 1-2x & 1-\frac{2\nu}{\nu+1/2}x(1-x) \end{pmatrix}$$

Cada entrada por bloques (i,j) de $\boldsymbol{P}(t)$ admite una representación de Karlin-McGregor

$$P_{ij}(t) = \left(\int_0^1 e^{-xt}\boldsymbol{Q}_i(x)\boldsymbol{W}(x)\boldsymbol{Q}_j^*(x)dx\right)\Pi_j$$

$$\Pi_0 = \|\boldsymbol{Q}_0\|_{\boldsymbol{W}}^{-2},\ \Pi_n = \|\boldsymbol{Q}_n\|_{\boldsymbol{W}}^{-2} = \frac{2\Gamma(\nu+2)(2\nu+3)_{n-1}}{\sqrt{\pi}n!(\nu+2)\Gamma(\nu+1/2)}\begin{pmatrix} \frac{\nu+1}{\nu+n+1} & 0 \\ 0 & \frac{\nu(\nu+n+1)}{(\nu+n)(\nu+n+2)} \end{pmatrix}$$

Podemos computar también *explícitamente* la medida invariante del proceso

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\pi} &= \left((\Pi_0\boldsymbol{e}_2)^T; (\Pi_1\boldsymbol{e}_2)^T; (\Pi_2\boldsymbol{e}_2)^T; \cdots\right), \quad \boldsymbol{e}_2^T = (1,1), \\ &= \frac{\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1/2)(\nu+2)}\left(1, \frac{\nu+1}{\nu+2}; \frac{2(\nu+1)^2}{\nu+2}, \frac{2\nu(\nu+2)}{\nu+3}; \cdots\right)\end{aligned}$$

Interpretación: El proceso con dos fases se puede interpretar como una variación racional de un par de colas con un servidor, donde la interacción entre ellas es significativa en los primeros estados de la cola.

El peso matricial es de tipo Gegenbauer (ultraesférico) y viene dado por

$$\boldsymbol{W}(x) = 4^{\nu+1/2}(\nu+2)\,[x(1-x)]^{\nu-1/2}\begin{pmatrix} 1-\frac{2(1+\nu)}{\nu+1/2}y(1-x) & 1-2x \\ 1-2x & 1-\frac{2\nu}{\nu+1/2}x(1-x) \end{pmatrix}$$

Cada entrada por bloques (i,j) de $\boldsymbol{P}(t)$ admite una representación de Karlin-McGregor

$$P_{ij}(t) = \left(\int_0^1 e^{-xt}\boldsymbol{Q}_i(x)\boldsymbol{W}(x)\boldsymbol{Q}_j^*(x)dx\right)\Pi_j$$

$$\Pi_0 = \|\boldsymbol{Q}_0\|_{\boldsymbol{W}}^{-2},\ \Pi_n = \|\boldsymbol{Q}_n\|_{\boldsymbol{W}}^{-2} = \frac{2\Gamma(\nu+2)(2\nu+3)_{n-1}}{\sqrt{\pi}n!(\nu+2)\Gamma(\nu+1/2)}\begin{pmatrix} \frac{\nu+1}{\nu+n+1} & 0 \\ 0 & \frac{\nu(\nu+n+1)}{(\nu+n)(\nu+n+2)} \end{pmatrix}$$

Podemos computar también *explícitamente* la medida invariante del proceso

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\pi} &= \left((\Pi_0\boldsymbol{e}_2)^T;(\Pi_1\boldsymbol{e}_2)^T;(\Pi_2\boldsymbol{e}_2)^T;\cdots\right), \quad \boldsymbol{e}_2^T = (1,1),\\ &= \frac{\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1/2)(\nu+2)}\left(1,\frac{\nu+1}{\nu+2};\frac{2(\nu+1)^2}{\nu+2},\frac{2\nu(\nu+2)}{\nu+3};\cdots\right)\end{aligned}$$

Interpretación: El proceso con dos fases se puede interpretar como una variación racional de un par de colas con un servidor, donde la interacción entre ellas es significativa en los primeros estados de la cola.

El mismo ejemplo se puede usar para generar un proceso de difusión cambiante de dos fases con operador infinitesimal

$$\mathcal{D} = x(1-x)\partial_x^2 + \begin{pmatrix} (\nu+1/2)(1-2x) & 0 \\ 0 & (\nu+3/2)(1-2x) - \dfrac{1}{1-2x} \end{pmatrix} \partial_x + \frac{1}{2x(1-x)} \begin{pmatrix} -\nu(1-2x)^2 & \nu(1-2x)^2 \\ 1+\nu & -(1+\nu) \end{pmatrix}$$

Se pueden calcular explícitamente las autofunciones $\Phi_n(x)$ de $\mathcal{D}$, con autovalor

$$\Lambda_n = \begin{pmatrix} -1-n(n+2\nu+2) & 0 \\ 0 & -n(n+2\nu+2) \end{pmatrix}, \quad n \geq 0$$

Φ_n (no son polinomios) son ortogonales con respecto a la matriz peso

$$W(x) = \frac{4^{\nu-1}(2+\nu)[x(1-x)]^{\nu-1/2}}{\nu+1/2} \begin{pmatrix} 1+\nu & 0 \\ 0 & \nu(1-2x)^2 \end{pmatrix}$$

Interpretación: El proceso puede ser visto como una *variante del modelo de Wright-Fisher model con sólo efectos de mutación y con dos fases.* Mientras que el proceso esté en la fase 2, empezando en un punto de $[0,1/2)$, hay una fuerza bloqueando el paso a través del umbral localizado en $1/2$ (igual si el punto interior está en $(1/2,1]$). Si el proceso está en la fase 1 no hay ninguna restricción en el punto $1/2$.

El mismo ejemplo se puede usar para generar un proceso de difusión cambiante de dos fases con operador infinitesimal

$$\mathcal{D} = x(1-x)\partial_x^2 + \begin{pmatrix} (\nu+1/2)(1-2x) & 0 \\ 0 & (\nu+3/2)(1-2x) - \dfrac{1}{1-2x} \end{pmatrix} \partial_x + \frac{1}{2x(1-x)} \begin{pmatrix} -\nu(1-2x)^2 & \nu(1-2x)^2 \\ 1+\nu & -(1+\nu) \end{pmatrix}$$

Se pueden calcular explícitamente las autofunciones $\mathbf{\Phi}_n(x)$ de $\mathcal{D}$, con autovalor

$$\mathbf{\Lambda}_n = \begin{pmatrix} -1-n(n+2\nu+2) & 0 \\ 0 & -n(n+2\nu+2) \end{pmatrix}, \quad n \geq 0$$

$\mathbf{\Phi}_n$ (no son polinomios) son ortogonales con respecto a la matriz peso

$$W(x) = \frac{4^{\nu-1}(2+\nu)[x(1-x)]^{\nu-1/2}}{\nu+1/2} \begin{pmatrix} 1+\nu & 0 \\ 0 & \nu(1-2x)^2 \end{pmatrix}$$

Interpretación: El proceso puede ser visto como una *variante del modelo de Wright-Fisher model con sólo efectos de mutación y con dos fases.* Mientras que el proceso esté en la fase 2, empezando en un punto de $[0,1/2)$, hay una fuerza bloqueando el paso a través del umbral localizado en $1/2$ (igual si el punto interior está en $(1/2,1]$). Si el proceso está en la fase 1 no hay ninguna restricción en el punto $1/2$.

El mismo ejemplo se puede usar para generar un proceso de difusión cambiante de dos fases con operador infinitesimal

$$\mathcal{D} = x(1-x)\partial_x^2 + \begin{pmatrix} (\nu+1/2)(1-2x) & 0 \\ 0 & (\nu+3/2)(1-2x) - \dfrac{1}{1-2x} \end{pmatrix} \partial_x + \frac{1}{2x(1-x)} \begin{pmatrix} -\nu(1-2x)^2 & \nu(1-2x)^2 \\ 1+\nu & -(1+\nu) \end{pmatrix}$$

Se pueden calcular explícitamente las autofunciones $\mathbf{\Phi}_n(x)$ de $\mathcal{D}$, con autovalor

$$\mathbf{\Lambda}_n = \begin{pmatrix} -1-n(n+2\nu+2) & 0 \\ 0 & -n(n+2\nu+2) \end{pmatrix}, \quad n \geq 0$$

$\mathbf{\Phi}_n$ (no son polinomios) son ortogonales con respecto a la matriz peso

$$W(x) = \frac{4^{\nu-1}(2+\nu)[x(1-x)]^{\nu-1/2}}{\nu+1/2} \begin{pmatrix} 1+\nu & 0 \\ 0 & \nu(1-2x)^2 \end{pmatrix}$$

Interpretación: El proceso puede ser visto como una *variante del modelo de Wright-Fisher model con sólo efectos de mutación y con dos fases*. Mientras que el proceso esté en la fase 2, empezando en un punto de $[0,1/2)$, hay una fuerza bloqueando el paso a través del umbral localizado en $1/2$ (igual si el punto interior está en $(1/2,1]$). Si el proceso está en la fase 1 no hay ninguna restricción en el punto $1/2$.

- Dette, H., Reuther, B., Studden, W. y Zygmunt, M., *Matrix measures and random walks with a block tridiagonal transition matrix*, SIAM J. Matrix Anal. Applic. **29**, No. 1 (2006) 117–142.
- Durán, A. J. y Grünbaum, F. A., *Orthogonal matrix polynomials satisfying second order differential equations*, Internat. Math. Research Notices, 2004: **10** (2004), 461–484.
- de la Iglesia, M. D., *Some examples of matrix-valued orthogonal functions having a differential and an integral operator as eigenfunctions*, J. Approx. Theory **163**, No. 5, (2011), 663–687.
- de la Iglesia, M. D., *Spectral methods for bivariate Markov processes with diffusion and discrete components and a variant of the Wright-Fisher model*, J. Math. Anal. Appl. **393** (2012), 239–255.
- de la Iglesia, M. D. y Román, P., *Some bivariate stochastic models arising from group representation theory*, preprint (2016). ArXiv:1610.01253.
- Karlin, S. y McGregor, J., *The classification of birth and death processes*, Trans. Amer. Math. Soc., **86** (1957), 366–400.
- Karlin, S. y McGregor, J., *Random walks*, Illinois J. Math., **3** (1959), 66–81.