

ALGUNOS EJEMPLOS DE ANÁLISIS ESPECTRAL DE PROCESOS DE MARKOV BIDIMENSIONALES

Manuel Domínguez de la Iglesia

Instituto de Matemáticas C.U., UNAM

Seminario de Probabilidad y Procesos Estocásticos
IMATE CU, 20 de septiembre de 2016

ÍNDICE

- 1 ANÁLISIS ESPECTRAL EN DIMENSIÓN 1
- 2 ANÁLISIS ESPECTRAL EN DIMENSIÓN 2
- 3 NUEVOS EJEMPLOS

ÍNDICE

- 1 ANÁLISIS ESPECTRAL EN DIMENSIÓN 1
- 2 ANÁLISIS ESPECTRAL EN DIMENSIÓN 2
- 3 NUEVOS EJEMPLOS

PROCESOS DE MARKOV UNIDIMENSIONALES

Sea $\{X_t : t \in \mathcal{T}\}$ un proceso de Markov con espacio de estados $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$, trayectorias continuas a derecha y **transiciones de probabilidad**

$$P_{ij}(t) \equiv \mathbb{P}(X_t = j | X_0 = i), \quad i, j \in \mathcal{S} \subset \mathbb{Z}$$

$$p(t; x, y) \equiv \frac{\partial}{\partial y} \mathbb{P}(X_t \leq y | X_0 = x), \quad x, y \in \mathcal{S} \subset \mathbb{R}$$

ECUACIONES DE KOLMOGOROV (de retroceso y de evolución)

- Cadenas de Markov a tiempo discreto:

$$P^{n+1} = PP^n = P^n P$$

donde P es la matriz de transición de probabilidades a un paso.

- Cadenas de Markov a tiempo continuo:

$$P'(t) = \mathcal{A}P(t) = P(t)\mathcal{A}, \quad P(0) = I,$$

donde $\mathcal{A} = P'(0)$ es la **matriz del operador infinitesimal**.

- Procesos de difusión:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \mathcal{A}_x p = \mathcal{A}_x^* p,$$

donde $\mathcal{A}_x = \frac{1}{2}\sigma^2(x)\partial_x^2 + \tau(x)\partial_x$ es el **operador infinitesimal**.

PROCESOS DE MARKOV UNIDIMENSIONALES

Sea $\{X_t : t \in \mathcal{T}\}$ un proceso de Markov con espacio de estados $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$, trayectorias continuas a derecha y **transiciones de probabilidad**

$$P_{ij}(t) \equiv \mathbb{P}(X_t = j | X_0 = i), \quad i, j \in \mathcal{S} \subset \mathbb{Z}$$

$$p(t; x, y) \equiv \frac{\partial}{\partial y} \mathbb{P}(X_t \leq y | X_0 = x), \quad x, y \in \mathcal{S} \subset \mathbb{R}$$

ECUACIONES DE KOLMOGOROV (de retroceso y de evolución)

- **Cadenas de Markov a tiempo discreto:**

$$P^{n+1} = PP^n = P^n P$$

donde P es la matriz de transición de probabilidades a un paso.

- **Cadenas de Markov a tiempo continuo:**

$$P'(t) = \mathcal{A}P(t) = P(t)\mathcal{A}, \quad P(0) = I,$$

donde $\mathcal{A} = P'(0)$ es la **matriz del operador infinitesimal**.

- **Procesos de difusión:**

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \mathcal{A}_x p = \mathcal{A}_y^* p,$$

donde $\mathcal{A}_x = \frac{1}{2}\sigma^2(x)\partial_x^2 + \tau(x)\partial_x$ es el **operador infinitesimal**.

PROCESOS DE MARKOV UNIDIMENSIONALES

Sea $\{X_t : t \in \mathcal{T}\}$ un proceso de Markov con espacio de estados $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$, trayectorias continuas a derecha y **transiciones de probabilidad**

$$P_{ij}(t) \equiv \mathbb{P}(X_t = j | X_0 = i), \quad i, j \in \mathcal{S} \subset \mathbb{Z}$$

$$p(t; x, y) \equiv \frac{\partial}{\partial y} \mathbb{P}(X_t \leq y | X_0 = x), \quad x, y \in \mathcal{S} \subset \mathbb{R}$$

ECUACIONES DE KOLMOGOROV (de retroceso y de evolución)

- **Cadenas de Markov a tiempo discreto:**

$$P^{n+1} = PP^n = P^n P$$

donde P es la matriz de transición de probabilidades a un paso.

- **Cadenas de Markov a tiempo continuo:**

$$P'(t) = \mathcal{A}P(t) = P(t)\mathcal{A}, \quad P(0) = I,$$

donde $\mathcal{A} = P'(0)$ es la **matriz del operador infinitesimal**.

- **Procesos de difusión:**

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \mathcal{A}_x p = \mathcal{A}_y^* p,$$

donde $\mathcal{A}_x = \frac{1}{2}\sigma^2(x)\partial_x^2 + \tau(x)\partial_x$ es el **operador infinitesimal**.

PROCESOS DE MARKOV UNIDIMENSIONALES

Sea $\{X_t : t \in \mathcal{T}\}$ un proceso de Markov con espacio de estados $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$, trayectorias continuas a derecha y **transiciones de probabilidad**

$$P_{ij}(t) \equiv \mathbb{P}(X_t = j | X_0 = i), \quad i, j \in \mathcal{S} \subset \mathbb{Z}$$

$$p(t; x, y) \equiv \frac{\partial}{\partial y} \mathbb{P}(X_t \leq y | X_0 = x), \quad x, y \in \mathcal{S} \subset \mathbb{R}$$

ECUACIONES DE KOLMOGOROV (de retroceso y de evolución)

- **Cadenas de Markov a tiempo discreto:**

$$P^{n+1} = PP^n = P^n P$$

donde P es la matriz de transición de probabilidades a un paso.

- **Cadenas de Markov a tiempo continuo:**

$$P'(t) = \mathcal{A}P(t) = P(t)\mathcal{A}, \quad P(0) = I,$$

donde $\mathcal{A} = P'(0)$ es la **matriz del operador infinitesimal**.

- **Procesos de difusión:**

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \mathcal{A}_x p = \mathcal{A}_y^* p,$$

donde $\mathcal{A}_x = \frac{1}{2}\sigma^2(x)\partial_x^2 + \tau(x)\partial_x$ es el **operador infinitesimal**.

ANÁLISIS ESPECTRAL: \mathcal{S} DISCRETO

Se basa en estudiar los **autovalores y autovectores** de P o \mathcal{A} .
Veamos dos casos, dependiendo de si \mathcal{S} es finito o infinito:

1. \mathcal{S} finito: \mathcal{A} (P) son matrices $N \times N$. Supongamos que \mathcal{A} (P) tiene autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ con autovectores l.i. x_1, x_2, \dots, x_N . Entonces si $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ y X es la matriz de autovectores, se tiene que

$$\mathcal{A} = X\Lambda X^{-1} \quad (P = X\Lambda X^{-1})$$

El espacio donde se trabaja es el espacio de Hilbert \mathbb{R}^N con el producto escalar usual $\langle x, y \rangle_\pi = \sum_{i=1}^N x_i \bar{y}_i \pi_i$ donde $\pi_i^{-1} \geq 0$ son las normas de los autovectores.

Resolviendo las ecuaciones de Kolmogorov se tiene que

$$P(t) = X e^{t\Lambda} X^{-1} \quad (P^n = X \Lambda^n X^{-1})$$

Ortogonalizando X , se tiene $X^{-1} = X^T \text{diag}(\pi_1, \dots, \pi_N)$ entonces

$$P_{ij}(t) = \sum_{k=1}^N x_{ik} e^{t\lambda_k} x_{jk} \pi_j \quad \left(P_{ij}^n = \sum_{k=1}^N x_{ik} \lambda_k^n x_{jk} \pi_j \right)$$

Los autovalores de P cumplen $|\lambda_k| \leq 1$ (estocástica), mientras que los de \mathcal{A} cumplen $\Re(\lambda_k) \leq 0$ (Perron-Frobenius).

ANÁLISIS ESPECTRAL: \mathcal{S} DISCRETO

Se basa en estudiar los **autovalores y autovectores** de P o \mathcal{A} .
Veamos dos casos, dependiendo de si \mathcal{S} es finito o infinito:

1. **\mathcal{S} finito**: $\mathcal{A}(P)$ son matrices $N \times N$. Supongamos que $\mathcal{A}(P)$ tiene autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ con autovectores l.i. x_1, x_2, \dots, x_N . Entonces si $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ y X es la matriz de autovectores, se tiene que

$$\mathcal{A} = X\Lambda X^{-1} \quad (P = X\Lambda X^{-1})$$

El espacio donde se trabaja es el espacio de Hilbert \mathbb{R}^N con el producto escalar usual $\langle x, y \rangle_\pi = \sum_{i=1}^N x_i \bar{y}_i \pi_i$ donde $\pi_i^{-1} \geq 0$ son las normas de los autovectores.

Resolviendo las ecuaciones de Kolmogorov se tiene que

$$P(t) = X e^{t\Lambda} X^{-1} \quad (P^n = X \Lambda^n X^{-1})$$

Ortogonalizando X , se tiene $X^{-1} = X^T \text{diag}(\pi_1, \dots, \pi_N)$ entonces

$$P_{ij}(t) = \sum_{k=1}^N x_{ik} e^{t\lambda_k} x_{jk} \pi_j \quad \left(P_{ij}^n = \sum_{k=1}^N x_{ik} \lambda_k^n x_{jk} \pi_j \right)$$

Los autovalores de P cumplen $|\lambda_k| \leq 1$ (estocástica), mientras que los de \mathcal{A} cumplen $\Re(\lambda_k) \leq 0$ (Perron-Frobenius).

ANÁLISIS ESPECTRAL: \mathcal{S} DISCRETO

Se basa en estudiar los **autovalores y autovectores** de P o \mathcal{A} .
Veamos dos casos, dependiendo de si \mathcal{S} es finito o infinito:

1. **\mathcal{S} finito**: \mathcal{A} (P) son matrices $N \times N$. Supongamos que \mathcal{A} (P) tiene autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ con autovectores l.i. x_1, x_2, \dots, x_N . Entonces si $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ y X es la matriz de autovectores, se tiene que

$$\mathcal{A} = X\Lambda X^{-1} \quad (P = X\Lambda X^{-1})$$

El espacio donde se trabaja es el espacio de Hilbert \mathbb{R}^N con el producto escalar usual $\langle x, y \rangle_\pi = \sum_{i=1}^N x_i \bar{y}_i \pi_i$ donde $\pi_i^{-1} \geq 0$ son las normas de los autovectores.

Resolviendo las ecuaciones de Kolmogorov se tiene que

$$P(t) = X e^{t\Lambda} X^{-1} \quad (P^n = X \Lambda^n X^{-1})$$

Ortogonalizando X , se tiene $X^{-1} = X^T \text{diag}(\pi_1, \dots, \pi_N)$ entonces

$$P_{ij}(t) = \sum_{k=1}^N x_{ik} e^{t\lambda_k} x_{jk} \pi_j \quad \left(P_{ij}^n = \sum_{k=1}^N x_{ik} \lambda_k^n x_{jk} \pi_j \right)$$

Los autovalores de P cumplen $|\lambda_k| \leq 1$ (estocástica), mientras que los de \mathcal{A} cumplen $\Re(\lambda_k) \leq 0$ (Perron-Frobenius).

2. **\mathcal{S} infinito** (\mathbb{N}): En este caso hay infinitos autovalores y pueden ir acumulándose en puntos discretos o formar un conjunto denso en \mathbb{C} . Para usar técnicas de análisis funcional vamos a requerir que P y \mathcal{A} sean **autoadjuntos** en el espacio de Hilbert

$$\ell_{\pi}^2(\mathbb{N}) = \left\{ (a_n)_n : (a, a)_{\pi} = \sum_{n \geq 0} |a_n|^2 \pi_n < \infty \right\}$$

donde π es un vector con $\pi_i^{-1} \geq 0$ (normas de los autovectores).

El **Teorema Espectral** asegura que hay una correspondencia **biyectiva** entre operadores **autoadjuntos** en $\ell_{\pi}^2(\mathbb{N})$ y **medidas de Borel complejas** (resolución de la identidad) definidas en $|z| \leq 1$ (para P) o en $\Re(z) \leq 0$ (para \mathcal{A}).

Una condición **suficiente** es que el vector π verifique

$$\pi_i P_{ij} = P_{ji} \pi_j, \quad (\pi_i \mathcal{A}_{ij} = \mathcal{A}_{ji} \pi_j)$$

es decir, los procesos sean **reversibles**.

Un caso particular de especial interés es cuando P o \mathcal{A} son **matrices de Jacobi** (tridiagonales), en cuyo caso las medidas de Borel son **medidas de probabilidad** soportadas en $[-1, 1]$ (para P) o en $(-\infty, 0]$ (para \mathcal{A}).

2. \mathcal{S} infinito (\mathbb{N}): En este caso hay infinitos autovalores y pueden ir acumulándose en puntos discretos o formar un conjunto denso en \mathbb{C} . Para usar técnicas de análisis funcional vamos a requerir que P y \mathcal{A} sean **autoadjuntos** en el espacio de Hilbert

$$\ell_{\pi}^2(\mathbb{N}) = \left\{ (a_n)_n : (a, a)_{\pi} = \sum_{n \geq 0} |a_n|^2 \pi_n < \infty \right\}$$

donde π es un vector con $\pi_i^{-1} \geq 0$ (normas de los autovectores).

El **Teorema Espectral** asegura que hay una correspondencia **biyectiva** entre operadores **autoadjuntos** en $\ell_{\pi}^2(\mathbb{N})$ y **medidas de Borel complejas** (resolución de la identidad) definidas en $|z| \leq 1$ (para P) o en $\Re(z) \leq 0$ (para \mathcal{A}).

Una condición **suficiente** es que el vector π verifique

$$\pi_i P_{ij} = P_{ji} \pi_j, \quad (\pi_i \mathcal{A}_{ij} = \mathcal{A}_{ji} \pi_j)$$

es decir, los procesos sean **reversibles**.

Un caso particular de especial interés es cuando P o \mathcal{A} son **matrices de Jacobi** (tridiagonales), en cuyo caso las medidas de Borel son **medidas de probabilidad** soportadas en $[-1, 1]$ (para P) o en $(-\infty, 0]$ (para \mathcal{A}).

2. \mathcal{S} infinito (\mathbb{N}): En este caso hay infinitos autovalores y pueden ir acumulándose en puntos discretos o formar un conjunto denso en \mathbb{C} . Para usar técnicas de análisis funcional vamos a requerir que P y \mathcal{A} sean **autoadjuntos** en el espacio de Hilbert

$$\ell_{\pi}^2(\mathbb{N}) = \left\{ (a_n)_n : (a, a)_{\pi} = \sum_{n \geq 0} |a_n|^2 \pi_n < \infty \right\}$$

donde π es un vector con $\pi_i^{-1} \geq 0$ (normas de los autovectores).

El **Teorema Espectral** asegura que hay una correspondencia **biyectiva** entre operadores **autoadjuntos** en $\ell_{\pi}^2(\mathbb{N})$ y **medidas de Borel complejas** (resolución de la identidad) definidas en $|z| \leq 1$ (para P) o en $\Re(z) \leq 0$ (para \mathcal{A}).

Una condición **suficiente** es que el vector π verifique

$$\pi_i P_{ij} = P_{ji} \pi_j, \quad (\pi_i \mathcal{A}_{ij} = \mathcal{A}_{ji} \pi_j)$$

es decir, los procesos sean **reversibles**.

Un caso particular de especial interés es cuando P o \mathcal{A} son **matrices de Jacobi** (tridiagonales), en cuyo caso las medidas de Borel son **medidas de probabilidad** soportadas en $[-1, 1]$ (para P) o en $(-\infty, 0]$ (para \mathcal{A}).

2. \mathcal{S} infinito (\mathbb{N}): En este caso hay infinitos autovalores y pueden ir acumulándose en puntos discretos o formar un conjunto denso en \mathbb{C} . Para usar técnicas de análisis funcional vamos a requerir que P y \mathcal{A} sean **autoadjuntos** en el espacio de Hilbert

$$\ell_{\pi}^2(\mathbb{N}) = \left\{ (a_n)_n : (a, a)_{\pi} = \sum_{n \geq 0} |a_n|^2 \pi_n < \infty \right\}$$

donde π es un vector con $\pi_i^{-1} \geq 0$ (normas de los autovectores).

El **Teorema Espectral** asegura que hay una correspondencia **biyectiva** entre operadores **autoadjuntos** en $\ell_{\pi}^2(\mathbb{N})$ y **medidas de Borel complejas** (resolución de la identidad) definidas en $|z| \leq 1$ (para P) o en $\Re(z) \leq 0$ (para \mathcal{A}).

Una condición **suficiente** es que el vector π verifique

$$\pi_i P_{ij} = P_{ji} \pi_j, \quad (\pi_i \mathcal{A}_{ij} = \mathcal{A}_{ji} \pi_j)$$

es decir, los procesos sean **reversibles**.

Un caso particular de especial interés es cuando P o \mathcal{A} son **matrices de Jacobi** (tridiagonales), en cuyo caso las medidas de Borel son **medidas de probabilidad** soportadas en $[-1, 1]$ (para P) o en $(-\infty, 0]$ (para \mathcal{A}).

CADENAS DE NACIMIENTO Y MUERTE EN \mathbb{N}

La matriz P y \mathcal{A} vienen dadas por

$$P = \begin{pmatrix} r_0 & p_0 & 0 & & \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & & \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & 0 & \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Para $x \in \mathbb{C}$ o \mathbb{R} (autovalor) construimos un vector dependiente de x (autovector) $Q = (Q_0(x), Q_1(x), \dots)^T$ tal que

$$PQ = xQ, \quad \mathcal{A}Q = -xQ$$

Normalizando a $Q_0(x) = 1$ se observa que $Q_n(x)$ es un polinomio en x de grado exactamente n y que verifican una **relación de recurrencia a tres términos**:

$$\begin{aligned} xQ_n(x) &= p_n Q_{n+1}(x) + r_n Q_n(x) + q_n Q_{n-1}(x) \\ -xQ_n(x) &= \lambda_n Q_{n+1}(x) - (\lambda_n + \mu_n) Q_n(x) + \mu_n Q_{n-1}(x) \end{aligned}$$

El vector π en el espacio $\ell_\pi^2(\mathbb{N})$ viene dado por $\pi_0 = 1$ y

$$\pi_i = \frac{p_0 p_1 \cdots p_{i-1}}{q_1 q_2 \cdots q_i}, \quad \left(\pi_i = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_i} \right)$$

También denominados **coeficientes potenciales**.

CADENAS DE NACIMIENTO Y MUERTE EN \mathbb{N}

La matriz P y \mathcal{A} vienen dadas por

$$P = \begin{pmatrix} r_0 & p_0 & 0 & & \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & & \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & 0 & \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Para $x \in \mathbb{C}$ o \mathbb{R} (autovalor) construimos un vector dependiente de x (autovector) $Q = (Q_0(x), Q_1(x), \dots)^T$ tal que

$$PQ = xQ, \quad \mathcal{A}Q = -xQ$$

Normalizando a $Q_0(x) = 1$ se observa que $Q_n(x)$ es un polinomio en x de grado exactamente n y que verifican una **relación de recurrencia a tres términos**:

$$\begin{aligned} xQ_n(x) &= p_n Q_{n+1}(x) + r_n Q_n(x) + q_n Q_{n-1}(x) \\ -xQ_n(x) &= \lambda_n Q_{n+1}(x) - (\lambda_n + \mu_n) Q_n(x) + \mu_n Q_{n-1}(x) \end{aligned}$$

El vector π en el espacio $\ell_\pi^2(\mathbb{N})$ viene dado por $\pi_0 = 1$ y

$$\pi_i = \frac{p_0 p_1 \cdots p_{i-1}}{q_1 q_2 \cdots q_i}, \quad \left(\pi_i = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_i} \right)$$

También denominados **coeficientes potenciales**.

CADENAS DE NACIMIENTO Y MUERTE EN \mathbb{N}

La matriz P y \mathcal{A} vienen dadas por

$$P = \begin{pmatrix} r_0 & p_0 & 0 & & \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & & \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & 0 & \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Para $x \in \mathbb{C}$ o \mathbb{R} (autovalor) construimos un vector dependiente de x (autovector) $Q = (Q_0(x), Q_1(x), \dots)^T$ tal que

$$PQ = xQ, \quad \mathcal{A}Q = -xQ$$

Normalizando a $Q_0(x) = 1$ se observa que $Q_n(x)$ es un polinomio en x de grado exactamente n y que verifican una **relación de recurrencia a tres términos**:

$$\begin{aligned} xQ_n(x) &= p_n Q_{n+1}(x) + r_n Q_n(x) + q_n Q_{n-1}(x) \\ -xQ_n(x) &= \lambda_n Q_{n+1}(x) - (\lambda_n + \mu_n) Q_n(x) + \mu_n Q_{n-1}(x) \end{aligned}$$

El vector π en el espacio $\ell_\pi^2(\mathbb{N})$ viene dado por $\pi_0 = 1$ y

$$\pi_i = \frac{p_0 p_1 \cdots p_{i-1}}{q_1 q_2 \cdots q_i}, \quad \left(\pi_i = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_i} \right)$$

También denominados **coeficientes potenciales**.

CADENAS DE NACIMIENTO Y MUERTE EN \mathbb{N}

La matriz P y \mathcal{A} vienen dadas por

$$P = \begin{pmatrix} r_0 & p_0 & 0 & & \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & & \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & 0 & \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Para $x \in \mathbb{C}$ o \mathbb{R} (autovalor) construimos un vector dependiente de x (autovector) $Q = (Q_0(x), Q_1(x), \dots)^T$ tal que

$$PQ = xQ, \quad \mathcal{A}Q = -xQ$$

Normalizando a $Q_0(x) = 1$ se observa que $Q_n(x)$ es un polinomio en x de grado exactamente n y que verifican una **relación de recurrencia a tres términos**:

$$\begin{aligned} xQ_n(x) &= p_n Q_{n+1}(x) + r_n Q_n(x) + q_n Q_{n-1}(x) \\ -xQ_n(x) &= \lambda_n Q_{n+1}(x) - (\lambda_n + \mu_n) Q_n(x) + \mu_n Q_{n-1}(x) \end{aligned}$$

El vector π en el espacio $\ell^2_\pi(\mathbb{N})$ viene dado por $\pi_0 = 1$ y

$$\pi_i = \frac{p_0 p_1 \cdots p_{i-1}}{q_1 q_2 \cdots q_i}, \quad \left(\pi_i = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_i} \right)$$

También denominados **coeficientes potenciales**.

CADENAS DE NACIMIENTO Y MUERTE EN \mathbb{N}

El **Teorema Espectral** asegura que hay una correspondencia **biyectiva** entre operadores tridiagonales (como P o \mathcal{A}) autoadjuntos en $\ell^2_\pi(\mathbb{N})$ y **medidas positivas** ψ con soporte $[-1, 1]$ (para P) ó $[0, \infty)$ (para \mathcal{A}).

TEOREMA (REPRESENTACIÓN INTEGRAL DE KARLIN-McGREGOR)

Se tiene la siguiente representación integral de P^n (tiempo discreto)

$$P^n_{ij} = \mathbb{P}(X_n = j | X_0 = i) = \pi_j \int_{-1}^1 x^n Q_i(x) Q_j(x) d\psi(x)$$

y de $P(t)$ (tiempo continuo)

$$P_{ij}(t) = \mathbb{P}(X_t = j | X_0 = i) = \pi_j \int_0^\infty e^{-xt} Q_i(x) Q_j(x) d\psi(x)$$

Además $\pi_j^{-1} = \|Q_j\|_\psi^2$ y la familia de polinomios $(Q_n)_n$ es ortogonal con respecto a ψ en el espacio $L^2_\psi([-1, 1])$ (para P) o $L^2_\psi([0, \infty))$ (para \mathcal{A}).

CADENAS DE NACIMIENTO Y MUERTE EN \mathbb{N}

El **Teorema Espectral** asegura que hay una correspondencia **biyectiva** entre operadores tridiagonales (como P o \mathcal{A}) autoadjuntos en $\ell^2_\pi(\mathbb{N})$ y **medidas positivas** ψ con soporte $[-1, 1]$ (para P) ó $[0, \infty)$ (para \mathcal{A}).

TEOREMA (REPRESENTACIÓN INTEGRAL DE KARLIN-MCGREGOR)

Se tiene la siguiente representación integral de P^n (tiempo discreto)

$$P^n_{ij} = \mathbb{P}(X_n = j | X_0 = i) = \pi_j \int_{-1}^1 x^n Q_i(x) Q_j(x) d\psi(x)$$

y de $P(t)$ (tiempo continuo)

$$P_{ij}(t) = \mathbb{P}(X_t = j | X_0 = i) = \pi_j \int_0^\infty e^{-xt} Q_i(x) Q_j(x) d\psi(x)$$

Además $\pi_j^{-1} = \|Q_j\|_\psi^2$ y la familia de polinomios $(Q_n)_n$ es ortogonal con respecto a ψ en el espacio $L^2_\psi([-1, 1])$ (para P) o $L^2_\psi([0, \infty))$ (para \mathcal{A}).

MÉTODOS PARA CALCULAR LA MEDIDA ψ

1. **Transformada de Stieltjes:** Para una medida de Borel ψ definida en $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$ se define la transformada de Stieltjes como

$$B(z; \psi) = \int_{\mathcal{S}} \frac{d\psi(x)}{x - z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{S}$$

La transformada de Stieltjes de una medida ψ asociada a P (o \mathcal{A}) está muy relacionada con la transformada de Stieltjes de la medida $\tilde{\psi}$ de la cadena de nacimiento y muerte 0-asociada (quitándole la primera fila y columna):

$$B(z; \psi) \left(z - r_0 + p_0 q_1 B(z; \tilde{\psi}) \right) = -1 \quad \left(B(z; \psi) \left(\lambda_0 - z - \lambda_0 \mu_1 B(z; \tilde{\psi}) \right) = 1 \right)$$

Para calcular la medida ψ sabiendo su transformada de Cauchy se suele usar la **fórmula de inversión de Perron-Stieltjes**

$$\pi \int_{x_1}^{x_2} d\psi(x) + \frac{\pi}{2} [c_1 \delta_{x_1} + c_2 \delta_{x_2}] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{x_1}^{x_2} \operatorname{Im} B(\xi + i\epsilon; \psi) d\xi$$

La transformada de Stieltjes también se puede calcular mediante los momentos de la medida o métodos asintóticos.

2. **Funciones especiales y polinomios ortogonales:** Si la familia de polinomios generada por la relación de recurrencia es conocida (o usando otras técnicas), entonces disponemos directamente de la medida ψ .

MÉTODOS PARA CALCULAR LA MEDIDA ψ

1. **Transformada de Stieltjes:** Para una medida de Borel ψ definida en $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$ se define la transformada de Stieltjes como

$$B(z; \psi) = \int_{\mathcal{S}} \frac{d\psi(x)}{x - z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{S}$$

La transformada de Stieltjes de una medida ψ asociada a P (o \mathcal{A}) está muy relacionada con la transformada de Stieltjes de la medida $\tilde{\psi}$ de la cadena de nacimiento y muerte 0-asociada (quitándole la primera fila y columna):

$$B(z; \psi) \left(z - r_0 + p_0 q_1 B(z; \tilde{\psi}) \right) = -1 \quad \left(B(z; \psi) \left(\lambda_0 - z - \lambda_0 \mu_1 B(z; \tilde{\psi}) \right) = 1 \right)$$

Para calcular la medida ψ sabiendo su transformada de Cauchy se suele usar la **fórmula de inversión de Perron-Stieltjes**

$$\pi \int_{x_1}^{x_2} d\psi(x) + \frac{\pi}{2} [c_1 \delta_{x_1} + c_2 \delta_{x_2}] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{x_1}^{x_2} \operatorname{Im} B(\xi + i\epsilon; \psi) d\xi$$

La transformada de Stieltjes también se puede calcular mediante los momentos de la medida o métodos asintóticos.

2. **Funciones especiales y polinomios ortogonales:** Si la familia de polinomios generada por la relación de recurrencia es conocida (o usando otras técnicas), entonces disponemos directamente de la medida ψ .

MÉTODOS PARA CALCULAR LA MEDIDA ψ

1. **Transformada de Stieltjes:** Para una medida de Borel ψ definida en $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$ se define la transformada de Stieltjes como

$$B(z; \psi) = \int_{\mathcal{S}} \frac{d\psi(x)}{x - z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{S}$$

La transformada de Stieltjes de una medida ψ asociada a P (o \mathcal{A}) está muy relacionada con la transformada de Stieltjes de la medida $\tilde{\psi}$ de la cadena de nacimiento y muerte 0-asociada (quitándole la primera fila y columna):

$$B(z; \psi) \left(z - r_0 + p_0 q_1 B(z; \tilde{\psi}) \right) = -1 \quad \left(B(z; \psi) \left(\lambda_0 - z - \lambda_0 \mu_1 B(z; \tilde{\psi}) \right) = 1 \right)$$

Para calcular la medida ψ sabiendo su transformada de Cauchy se suele usar la **fórmula de inversión de Perron-Stieltjes**

$$\pi \int_{x_1}^{x_2} d\psi(x) + \frac{\pi}{2} [c_1 \delta_{x_1} + c_2 \delta_{x_2}] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{x_1}^{x_2} \operatorname{Im} B(\xi + i\epsilon; \psi) d\xi$$

La transformada de Stieltjes también se puede calcular mediante los momentos de la medida o métodos asintóticos.

2. **Funciones especiales y polinomios ortogonales:** Si la familia de polinomios generada por la relación de recurrencia es conocida (o usando otras técnicas), entonces disponemos directamente de la medida ψ .

MÉTODOS PARA CALCULAR LA MEDIDA ψ

1. **Transformada de Stieltjes:** Para una medida de Borel ψ definida en $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$ se define la transformada de Stieltjes como

$$B(z; \psi) = \int_{\mathcal{S}} \frac{d\psi(x)}{x - z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{S}$$

La transformada de Stieltjes de una medida ψ asociada a P (o \mathcal{A}) está muy relacionada con la transformada de Stieltjes de la medida $\tilde{\psi}$ de la cadena de nacimiento y muerte 0-asociada (quitándole la primera fila y columna):

$$B(z; \psi) \left(z - r_0 + p_0 q_1 B(z; \tilde{\psi}) \right) = -1 \quad \left(B(z; \psi) \left(\lambda_0 - z - \lambda_0 \mu_1 B(z; \tilde{\psi}) \right) = 1 \right)$$

Para calcular la medida ψ sabiendo su transformada de Cauchy se suele usar la **fórmula de inversión de Perron-Stieltjes**

$$\pi \int_{x_1}^{x_2} d\psi(x) + \frac{\pi}{2} [c_1 \delta_{x_1} + c_2 \delta_{x_2}] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{x_1}^{x_2} \text{Im} B(\xi + i\epsilon; \psi) d\xi$$

La transformada de Stieltjes también se puede calcular mediante los momentos de la medida o métodos asintóticos.

2. **Funciones especiales y polinomios ortogonales:** Si la familia de polinomios generada por la relación de recurrencia es conocida (o usando otras técnicas), entonces disponemos directamente de la medida ψ .

EJEMPLOS (TRANSFORMADA DE STIELTJES)

1. Caminata aleatoria simétrica con barrera absorbente:

P con $p_n = p, q_{n+1} = q, r_n = 0, n \geq 0$. La medida ψ viene dada por

$$d\psi(x) = \frac{\sqrt{4pq - x^2}}{2\pi pq} dx, \quad |x| < 2\sqrt{pq}$$

y la familia de polinomios $(Q_n)_n$ viene definida por

$$Q_n(x) = \left(\frac{q}{p}\right)^{n/2} U_n\left(\frac{x}{2\sqrt{pq}}\right)$$

donde $(U_n)_n$ son los **polinomios de Chebyshev** de segunda especie.

2. Con barrera repelente: P con $p_0 = 1$ y $p_n = p, q_n = q, r_{n-1} = 0, n \geq 1$. La familia de polinomios $(Q_n)_n$ viene definida por

$$Q_n(x) = \left(\frac{q}{p}\right)^{n/2} \left[(2 - 2p)T_n\left(\frac{x}{2\sqrt{pq}}\right) + (2p - 1)U_n\left(\frac{x}{2\sqrt{pq}}\right) \right]$$

donde $(T_n)_n$ y $(U_n)_n$ son los **polinomios de Chebyshev** de 1a y 2a especie.

Ahora la medida ψ depende del valor de p :

$$d\psi(x) = \frac{\sqrt{4pq - x^2}}{1 - x^2} dx + 2(1 - 2p)\pi [\delta_{-1} + \delta_1] \chi_{\{p < 1/2\}}(x), \quad |x| < 2\sqrt{pq}$$

EJEMPLOS (TRANSFORMADA DE STIELTJES)

1. Caminata aleatoria simétrica con barrera absorbente:

P con $p_n = p, q_{n+1} = q, r_n = 0, n \geq 0$. La medida ψ viene dada por

$$d\psi(x) = \frac{\sqrt{4pq - x^2}}{2\pi pq} dx, \quad |x| < 2\sqrt{pq}$$

y la familia de polinomios $(Q_n)_n$ viene definida por

$$Q_n(x) = \left(\frac{q}{p}\right)^{n/2} U_n\left(\frac{x}{2\sqrt{pq}}\right)$$

donde $(U_n)_n$ son los **polinomios de Chebyshev** de segunda especie.

2. **Con barrera repelente**: P con $p_0 = 1$ y $p_n = p, q_n = q, r_{n-1} = 0, n \geq 1$. La familia de polinomios $(Q_n)_n$ viene definida por

$$Q_n(x) = \left(\frac{q}{p}\right)^{n/2} \left[(2 - 2p)T_n\left(\frac{x}{2\sqrt{pq}}\right) + (2p - 1)U_n\left(\frac{x}{2\sqrt{pq}}\right) \right]$$

donde $(T_n)_n$ y $(U_n)_n$ son los **polinomios de Chebyshev** de 1a y 2a especie.

Ahora la medida ψ depende del valor de p :

$$d\psi(x) = \frac{\sqrt{4pq - x^2}}{1 - x^2} dx + 2(1 - 2p)\pi [\delta_{-1} + \delta_1] \chi_{\{p < 1/2\}}(x), \quad |x| < 2\sqrt{pq}$$

EJEMPLOS (POLINOMIOS ORTOGONALES)

3. Cola $M/M/\infty$: \mathcal{A} con $\lambda_n = \lambda, \mu_n = \mu n, n \geq 0, \lambda, \mu > 0$. Los polinomios en este caso vienen dados por

$$Q_n(x) = C_n \left(\frac{x}{\mu}; \frac{\lambda}{\mu} \right), \quad n \geq 0$$

donde $C_n(x; a)$ son los **polinomios de Charlier**.

La medida espectral asociada es la **distribución de Poisson** (discreta):

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-a} a^n}{n!} \delta_{x_n}, \quad x_n = \mu n$$

4. Otros ejemplos:

- Modelos de urnas de Ehrenfest (Krawtchouk) o Laplace-Bernoulli (Hahn y dual Hahn).
- Procesos de nacimiento y muerte lineal (Meixner, Laguerre).
- Cola $M/M/k$ (Charlier y Chebychev).
- Cadenas de nacimiento y muerte en \mathbb{Z} (Chebychev).

EJEMPLOS (POLINOMIOS ORTOGONALES)

3. Cola $M/M/\infty$: \mathcal{A} con $\lambda_n = \lambda$, $\mu_n = \mu n$, $n \geq 0$, $\lambda, \mu > 0$. Los polinomios en este caso vienen dados por

$$Q_n(x) = C_n \left(\frac{x}{\mu}; \frac{\lambda}{\mu} \right), \quad n \geq 0$$

donde $C_n(x; a)$ son los **polinomios de Charlier**.

La medida espectral asociada es la **distribución de Poisson** (discreta):

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-a} a^n}{n!} \delta_{x_n}, \quad x_n = \mu n$$

4. **Otros ejemplos**:

- Modelos de urnas de Ehrenfest (Krawtchouk) o Laplace-Bernoulli (Hahn y dual Hahn).
- Procesos de nacimiento y muerte lineal (Meixner, Laguerre).
- Cola $M/M/k$ (Charlier y Chebychev).
- Cadenas de nacimiento y muerte en \mathbb{Z} (Chebychev).

ANÁLISIS ESPECTRAL: CASO \mathcal{S} CONTINUO

Para resolver la ecuación de retroceso de Kolmogorov

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \mu(x)\frac{\partial p}{\partial x}$$

se hace separación de variables y se escribe el operador infinitesimal \mathcal{A} como

$$\mathcal{A} = \frac{1}{m(x)} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2}\sigma^2(x)m(x)\frac{d}{dx} \right), \quad m(x) = \frac{2}{\sigma^2(x)} \exp \left(\int^x \frac{2\mu(z)}{\sigma^2(z)} dz \right)$$

El problema de encontrar autovalores y autofunciones de \mathcal{A} (i.e. $\mathcal{A}\phi = \lambda\phi$) es un **problema de Sturm-Liouville** con ciertos valores frontera.

Si existe una sucesión de autofunciones ortogonales $(\phi_n)_n$ completa en $L_m^2(\mathcal{S})$ con sus correspondientes autovalores $(\lambda_n)_n$, la **densidad de transición de probabilidades** $p(t; x, y)$ admite la siguiente representación espectral

$$p(t; x, y) = m(y) \sum_{n=0}^{\infty} e^{\lambda_n t} \phi_n(x) \phi_n(y)$$

- Los autovalores también pueden distribirse de manera continua, en cuyo caso en la representación espectral vendría una integral.
- La candidata a medida m viene dada directamente por los coeficientes de deriva y de difusión. Basta resolver el problema de Sturm-Liouville

ANÁLISIS ESPECTRAL: CASO \mathcal{S} CONTINUO

Para resolver la ecuación de retroceso de Kolmogorov

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \mu(x)\frac{\partial p}{\partial x}$$

se hace separación de variables y se escribe el operador infinitesimal \mathcal{A} como

$$\mathcal{A} = \frac{1}{m(x)} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2}\sigma^2(x)m(x)\frac{d}{dx} \right), \quad m(x) = \frac{2}{\sigma^2(x)} \exp \left(\int^x \frac{2\mu(z)}{\sigma^2(z)} dz \right)$$

El problema de encontrar autovalores y autofunciones de \mathcal{A} (i.e. $\mathcal{A}\phi = \lambda\phi$) es un **problema de Sturm-Liouville** con ciertos valores frontera.

Si existe una sucesión de autofunciones ortogonales $(\phi_n)_n$ completa en $L_m^2(\mathcal{S})$ con sus correspondientes autovalores $(\lambda_n)_n$, la **densidad de transición de probabilidades** $p(t; x, y)$ admite la siguiente representación espectral

$$p(t; x, y) = m(y) \sum_{n=0}^{\infty} e^{\lambda_n t} \phi_n(x) \phi_n(y)$$

- Los autovalores también pueden distribirse de manera continua, en cuyo caso en la representación espectral vendría una integral.
- La candidata a medida m viene dada directamente por los coeficientes de deriva y de difusión. Basta resolver el problema de Sturm-Liouville. ▶ ☰ 🔍 ↻

EJEMPLOS

1. Movimiento Browniano en $[0,d]$ con bordes reflectantes:

$\mu(x) = 0$ y $\sigma^2(x) = \sigma^2$. La representación espectral es

$$p(t; x, y) = \frac{1}{d} + \frac{2}{d} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\sigma^2 \pi^2 n^2}{2d^2} t\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{d}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{d}\right)$$

2. Proceso de Orstein-Uhlenbeck:

$\mu(x) = -x$ y $\sigma^2 = 1$. La representación espectral es

$$p(t; x, y) = e^{-y^2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nt} \frac{H_n(x) H_n(y)}{2^n n! \sqrt{\pi}}$$

donde $(H_n)_n$ son los **polinomios de Hermite**.

3. Otros ejemplos:

- Modelos de crecimiento poblacional (Laguerre).
- Modelos de Wright-Fisher (Jacobi).
- Procesos radiales (Bessel, Laguerre).

EJEMPLOS

1. **Movimiento Browniano en $[0,d]$ con bordes reflectantes:**

$\mu(x) = 0$ y $\sigma^2(x) = \sigma^2$. La representación espectral es

$$p(t; x, y) = \frac{1}{d} + \frac{2}{d} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\sigma^2 \pi^2 n^2}{2d^2} t\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{d}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{d}\right)$$

2. **Proceso de Orstein-Uhlenbeck:**

$\mu(x) = -x$ y $\sigma^2 = 1$. La representación espectral es

$$p(t; x, y) = e^{-y^2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nt} \frac{H_n(x) H_n(y)}{2^n n! \sqrt{\pi}}$$

donde $(H_n)_n$ son los **polinomios de Hermite**.

3. **Otros ejemplos:**

- Modelos de crecimiento poblacional (Laguerre).
- Modelos de Wright-Fisher (Jacobi).
- Procesos radiales (Bessel, Laguerre).

EJEMPLOS

1. **Movimiento Browniano en $[0,d]$ con bordes reflectantes:**

$\mu(x) = 0$ y $\sigma^2(x) = \sigma^2$. La representación espectral es

$$p(t; x, y) = \frac{1}{d} + \frac{2}{d} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\sigma^2 \pi^2 n^2}{2d^2} t\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{d}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{d}\right)$$

2. **Proceso de Orstein-Uhlenbeck:**

$\mu(x) = -x$ y $\sigma^2 = 1$. La representación espectral es

$$p(t; x, y) = e^{-y^2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nt} \frac{H_n(x) H_n(y)}{2^n n! \sqrt{\pi}}$$

donde $(H_n)_n$ son los **polinomios de Hermite**.

3. **Otros ejemplos:**

- Modelos de crecimiento poblacional (Laguerre).
- Modelos de Wright-Fisher (Jacobi).
- Procesos radiales (Bessel, Laguerre).

ÍNDICE

- 1 ANÁLISIS ESPECTRAL EN DIMENSIÓN 1
- 2 ANÁLISIS ESPECTRAL EN DIMENSIÓN 2
- 3 NUEVOS EJEMPLOS

PROCESOS DE MARKOV BIVARIADOS

Se considera ahora un proceso de Markov de dimensión 2 o bivariado dado por

$$\{(X_t, Y_t) : t \in \mathcal{T}\}, \quad X_t \in \mathcal{S} \subset \mathbb{R}, \quad Y_t \in \{1, 2, \dots, N\}$$

La primera componente se denomina **nivel** mientras que la segunda componente es la **fase**.

Ahora las **transiciones de probabilidad** pueden ser escritas en términos de una **matriz por bloques** (\mathcal{S} discreto) o una **función matricial** $N \times N$ (\mathcal{S} continuo)

$$(P_{i'j'})_{ij}(t) = \mathbb{P}(X_t = j', Y_t = j | X_0 = i', Y_0 = i), \quad i', j' \in \mathcal{S} \subset \mathbb{Z}, \quad 1 \leq i, j \leq N$$
$$P_{ij}(t; x, A) = \mathbb{P}(X_t \in A, Y_t = j | X_0 = x, Y_0 = i), \quad x \in \mathcal{S} \subset \mathbb{R}, \quad 1 \leq i, j \leq N$$

Las **ecuaciones de Kolmogorov** (de retroceso y de evolución) se pueden escribir en términos de operadores infinitesimales que son ahora matrices por bloques u operadores diferenciales de segundo orden con coeficientes matriciales.

Estudiamos dos situaciones (relacionadas con polinomios ortogonales):

- **Cuasi-procesos de nacimiento y muerte:** \mathcal{S} discreto con transiciones **sólo entre niveles adyacentes** (el tiempo puede ser discreto o continuo).
- **Procesos de difusión cambiante:** $\mathcal{S} = [a, b]$ continuo donde el tiempo también es continuo.

PROCESOS DE MARKOV BIVARIADOS

Se considera ahora un proceso de Markov de dimensión 2 o bivariado dado por

$$\{(X_t, Y_t) : t \in \mathcal{T}\}, \quad X_t \in \mathcal{S} \subset \mathbb{R}, \quad Y_t \in \{1, 2, \dots, N\}$$

La primera componente se denomina **nivel** mientras que la segunda componente es la **fase**.

Ahora las **transiciones de probabilidad** pueden ser escritas en términos de una **matriz por bloques** (\mathcal{S} discreto) o una **función matricial** $N \times N$ (\mathcal{S} continuo)

$$\begin{aligned} (P_{i'j'})_{ij}(t) &= \mathbb{P}(X_t = j', Y_t = j | X_0 = i', Y_0 = i), \quad i', j' \in \mathcal{S} \subset \mathbb{Z}, \quad 1 \leq i, j \leq N \\ P_{ij}(t; x, A) &= \mathbb{P}(X_t \in A, Y_t = j | X_0 = x, Y_0 = i), \quad x \in \mathcal{S} \subset \mathbb{R}, \quad 1 \leq i, j \leq N \end{aligned}$$

Las **ecuaciones de Kolmogorov** (de retroceso y de evolución) se pueden escribir en términos de operadores infinitesimales que son ahora matrices por bloques u operadores diferenciales de segundo orden con coeficientes matriciales.

Estudiamos dos situaciones (relacionadas con polinomios ortogonales):

- **Cuasi-procesos de nacimiento y muerte:** \mathcal{S} discreto con transiciones **sólo entre niveles adyacentes** (el tiempo puede ser discreto o continuo).
- **Procesos de difusión cambiante:** $\mathcal{S} = [a, b]$ continuo donde el tiempo también es continuo.

PROCESOS DE MARKOV BIVARIADOS

Se considera ahora un proceso de Markov de dimensión 2 o bivariado dado por

$$\{(X_t, Y_t) : t \in \mathcal{T}\}, \quad X_t \in \mathcal{S} \subset \mathbb{R}, \quad Y_t \in \{1, 2, \dots, N\}$$

La primera componente se denomina **nivel** mientras que la segunda componente es la **fase**.

Ahora las **transiciones de probabilidad** pueden ser escritas en términos de una **matriz por bloques** (\mathcal{S} discreto) o una **función matricial** $N \times N$ (\mathcal{S} continuo)

$$\begin{aligned} (P_{i'j'})_{ij}(t) &= \mathbb{P}(X_t = j', Y_t = j | X_0 = i', Y_0 = i), \quad i', j' \in \mathcal{S} \subset \mathbb{Z}, \quad 1 \leq i, j \leq N \\ P_{ij}(t; x, A) &= \mathbb{P}(X_t \in A, Y_t = j | X_0 = x, Y_0 = i), \quad x \in \mathcal{S} \subset \mathbb{R}, \quad 1 \leq i, j \leq N \end{aligned}$$

Las **ecuaciones de Kolmogorov** (de retroceso y de evolución) se pueden escribir en términos de operadores infinitesimales que son ahora matrices por bloques u operadores diferenciales de segundo orden con coeficientes matriciales.

Estudiamos dos situaciones (relacionadas con polinomios ortogonales):

- **Cuasi-procesos de nacimiento y muerte:** \mathcal{S} discreto con transiciones **sólo entre niveles adyacentes** (el tiempo puede ser discreto o continuo).
- **Procesos de difusión cambiante:** $\mathcal{S} = [a, b]$ continuo donde el tiempo también es continuo.

PROCESOS DE MARKOV BIVARIADOS

Se considera ahora un proceso de Markov de dimensión 2 o bivariado dado por

$$\{(X_t, Y_t) : t \in \mathcal{T}\}, \quad X_t \in \mathcal{S} \subset \mathbb{R}, \quad Y_t \in \{1, 2, \dots, N\}$$

La primera componente se denomina **nivel** mientras que la segunda componente es la **fase**.

Ahora las **transiciones de probabilidad** pueden ser escritas en términos de una **matriz por bloques** (\mathcal{S} discreto) o una **función matricial** $N \times N$ (\mathcal{S} continuo)

$$\begin{aligned} (P_{i'j'})_{ij}(t) &= \mathbb{P}(X_t = j', Y_t = j | X_0 = i', Y_0 = i), \quad i', j' \in \mathcal{S} \subset \mathbb{Z}, \quad 1 \leq i, j \leq N \\ P_{ij}(t; x, A) &= \mathbb{P}(X_t \in A, Y_t = j | X_0 = x, Y_0 = i), \quad x \in \mathcal{S} \subset \mathbb{R}, \quad 1 \leq i, j \leq N \end{aligned}$$

Las **ecuaciones de Kolmogorov** (de retroceso y de evolución) se pueden escribir en términos de operadores infinitesimales que son ahora matrices por bloques u operadores diferenciales de segundo orden con coeficientes matriciales.

Estudiamos dos situaciones (relacionadas con polinomios ortogonales):

- **Cuasi-procesos de nacimiento y muerte**: \mathcal{S} discreto con transiciones **sólo entre niveles adyacentes** (el tiempo puede ser discreto o continuo).
- **Procesos de difusión cambiante**: $\mathcal{S} = [a, b]$ continuo donde el tiempo también es continuo.

CUASI-PROCESOS DE NACIMIENTO Y MUERTE

El operador infinitesimal $\mathcal{A} = P'(0)$ viene dado por

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} B_0 & A_0 & & & \\ C_1 & B_1 & A_1 & & \\ & C_2 & B_2 & A_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

donde $A_n, C_{n+1}, n \geq 0$ son matrices no singulares, \mathcal{A} tiene todas sus entradas no negativas fuera de la diagonal principal (escalar!) y

$$(A_0 + B_0)e_N \leq 0_N, \quad (A_n + B_n + C_n)e_N \leq 0_N, \quad e_N = (1, \dots, 1)^T$$

Se construye, para $x \in \mathbb{R}$, un vector $Q = (Q_0^T(x), Q_1^T(x), \dots)^T$ tal que $\mathcal{A}Q = -xQ$, i.e. los polinomios matriciales $(Q_n)_n$ verifican una **relación de recurrencia a tres términos** (a valores matriciales)

$$-xQ_n(x) = A_n Q_{n+1}(x) + B_n Q_n(x) + C_n Q_{n-1}(x)$$

Para poder hacer **análisis espectral** se necesita que se pueda "simetrizar" la matriz por bloques \mathcal{A} (para que sea autoadjunto). Para ello debe existir una sucesión de matrices no singulares $(R_n)_n$ tal que

$$R_n B_n R_n^{-1} = (R_n B_n R_n^{-1})^T, \quad R_n A_n R_{n+1}^{-1} = (R_{n+1} C_{n+1} R_n)^T, \quad n \geq 0$$

CUASI-PROCESOS DE NACIMIENTO Y MUERTE

El operador infinitesimal $\mathcal{A} = P'(0)$ viene dado por

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} B_0 & A_0 & & & \\ C_1 & B_1 & A_1 & & \\ & C_2 & B_2 & A_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

donde $A_n, C_{n+1}, n \geq 0$ son matrices no singulares, \mathcal{A} tiene todas sus entradas no negativas fuera de la diagonal principal (escalar!) y

$$(A_0 + B_0)e_N \leq 0_N, \quad (A_n + B_n + C_n)e_N \leq 0_N, \quad e_N = (1, \dots, 1)^T$$

Se construye, para $x \in \mathbb{R}$, un vector $Q = (Q_0^T(x), Q_1^T(x), \dots)^T$ tal que $\mathcal{A}Q = -xQ$, i.e. los polinomios matriciales $(Q_n)_n$ verifican una **relación de recurrencia a tres términos** (a valores matriciales)

$$-xQ_n(x) = A_n Q_{n+1}(x) + B_n Q_n(x) + C_n Q_{n-1}(x)$$

Para poder hacer **análisis espectral** se necesita que se pueda "simetrizar" la matriz por bloques \mathcal{A} (para que sea autoadjunto). Para ello debe existir una sucesión de matrices no singulares $(R_n)_n$ tal que

$$R_n B_n R_n^{-1} = (R_n B_n R_n^{-1})^T, \quad R_n A_n R_{n+1}^{-1} = (R_{n+1} C_{n+1} R_n)^T, \quad n \geq 0$$

CUASI-PROCESOS DE NACIMIENTO Y MUERTE

El operador infinitesimal $\mathcal{A} = P'(0)$ viene dado por

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} B_0 & A_0 & & & \\ C_1 & B_1 & A_1 & & \\ & C_2 & B_2 & A_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

donde $A_n, C_{n+1}, n \geq 0$ son matrices no singulares, \mathcal{A} tiene todas sus entradas no negativas fuera de la diagonal principal (escalar!) y

$$(A_0 + B_0)e_N \leq 0_N, \quad (A_n + B_n + C_n)e_N \leq 0_N, \quad e_N = (1, \dots, 1)^T$$

Se construye, para $x \in \mathbb{R}$, un vector $Q = (Q_0^T(x), Q_1^T(x), \dots)^T$ tal que $\mathcal{A}Q = -xQ$, i.e. los polinomios matriciales $(Q_n)_n$ verifican una **relación de recurrencia a tres términos** (a valores matriciales)

$$-xQ_n(x) = A_n Q_{n+1}(x) + B_n Q_n(x) + C_n Q_{n-1}(x)$$

Para poder hacer **análisis espectral** se necesita que se pueda "simetrizar" la matriz por bloques \mathcal{A} (para que sea autoadjunto). Para ello debe existir una sucesión de matrices no singulares $(R_n)_n$ tal que

$$R_n B_n R_n^{-1} = (R_n B_n R_n^{-1})^T, \quad R_n A_n R_{n+1}^{-1} = (R_{n+1} C_{n+1} R_n)^T, \quad n \geq 0$$

El espacio de aplicación del **Teorema espectral** viene dado ahora por

$$\ell_{\Pi}^2(\mathbb{N}; \mathbb{C}^{N \times N}) = \left\{ (\mathbf{X}_n)_n : (\mathbf{X}, \mathbf{X})_{\Pi} = \sum_{n \geq 0} \mathbf{X}_n \Pi_n \mathbf{X}_n^* < \infty \right\}$$

donde

$$\Pi_n = \mathbf{R}_n^T \mathbf{R}_n = (\mathbf{C}_1^T \mathbf{C}_2^T \cdots \mathbf{C}_n^T)^{-1} \mathbf{R}_0^T \mathbf{R}_0 (\mathbf{A}_0 \mathbf{A}_1 \cdots \mathbf{A}_{n-1}), \quad n \geq 1$$

Grünbaum y Dette-Reuther-Studden-Zygmunt en 2007 llegaron al siguiente

TEOREMA (REPRESENTACIÓN INTEGRAL DE KARLIN-MCGREGOR)

Existe una matriz peso \mathbf{W} (semidefinida positiva en todo boreliano con momentos finitos) asociada a \mathcal{A} con soporte en $[0, \infty)$ tal que se tiene la siguiente representación integral de $\mathbf{P}(t)$

$$P_{ij}(t) = \left(\int_0^{\infty} e^{-xt} \mathbf{Q}_i(x) d\mathbf{W}(x) \mathbf{Q}_j^T(x) \right) \left(\int_0^{\infty} \mathbf{Q}_j(x) d\mathbf{W}(x) \mathbf{Q}_j^T(x) \right)^{-1}$$

Además $\Pi_j^{-1} = \|\mathbf{Q}_j\|_{\mathbf{W}}^2$ y la familia de polinomios matriciales $(\mathbf{Q}_n)_n$ es ortogonal con respecto a \mathbf{W} en el espacio $L_{\mathbf{W}}^2([0, \infty); \mathbb{C}^{N \times N})$.

Ejemplos: Tiempo discreto: Grünbaum-Mdl (2008),
Dette-Reuther-Studden-Zymunt (2007), Clayton (2010).

Tiempo continuo: Dette-Reuther (2010), Mdl-Román (2016)

El espacio de aplicación del **Teorema espectral** viene dado ahora por

$$\ell_{\Pi}^2(\mathbb{N}; \mathbb{C}^{N \times N}) = \left\{ (\mathbf{X}_n)_n : (\mathbf{X}, \mathbf{X})_{\Pi} = \sum_{n \geq 0} \mathbf{X}_n \Pi_n \mathbf{X}_n^* < \infty \right\}$$

donde

$$\Pi_n = \mathbf{R}_n^T \mathbf{R}_n = (\mathbf{C}_1^T \mathbf{C}_2^T \cdots \mathbf{C}_n^T)^{-1} \mathbf{R}_0^T \mathbf{R}_0 (\mathbf{A}_0 \mathbf{A}_1 \cdots \mathbf{A}_{n-1}), \quad n \geq 1$$

Grünbaum y Dette-Reuther-Studden-Zygmunt en 2007 llegaron al siguiente

TEOREMA (REPRESENTACIÓN INTEGRAL DE KARLIN-MCGREGOR)

Existe una matriz peso \mathbf{W} (semidefinida positiva en todo boreliano con momentos finitos) asociada a \mathcal{A} con soporte en $[0, \infty)$ tal que se tiene la siguiente representación integral de $\mathbf{P}(t)$

$$\mathbf{P}_{ij}(t) = \left(\int_0^{\infty} e^{-xt} \mathbf{Q}_i(x) d\mathbf{W}(x) \mathbf{Q}_j^T(x) \right) \left(\int_0^{\infty} \mathbf{Q}_j(x) d\mathbf{W}(x) \mathbf{Q}_j^T(x) \right)^{-1}$$

Además $\Pi_j^{-1} = \|\mathbf{Q}_j\|_{\mathbf{W}}^2$ y la familia de polinomios matriciales $(\mathbf{Q}_n)_n$ es ortogonal con respecto a \mathbf{W} en el espacio $L_{\mathbf{W}}^2([0, \infty); \mathbb{C}^{N \times N})$.

Ejemplos: Tiempo discreto: Grünbaum-Mdl (2008),
Dette-Reuther-Studden-Zymunt (2007), Clayton (2010).

Tiempo continuo: Dette-Reuther (2010), Mdl-Román (2016).

PROCESOS DE DIFUSIÓN CAMBIANTES

El operador infinitesimal \mathcal{A} es ahora un **operador diferencial de segundo orden matricial** (Berman, 1994)

$$\mathcal{A}_x = \frac{1}{2} \mathbf{A}(x) \partial_x^2 + \mathbf{B}(x) \partial_x^1 + \mathbf{Q}(x) \partial_x^0$$

donde $\mathbf{A}(x)$ y $\mathbf{B}(x)$ son matrices **diagonales** y $\mathbf{Q}(x)$ es el operador infinitesimal de una cadena de Markov finita a tiempo continuo.

Si existe una sucesión de **autofunciones matriciales** ortogonales $(\Phi_n)_n$ *completa* en

$$L_W^2(\mathcal{S}; \mathbb{C}^{N \times N}) = \left\{ F : (F, F)_W = \int_{\mathcal{S}} F(x) W(x) F^*(x) dx < \infty \right\}$$

con sus correspondientes **autovalores matriciales** Γ_n tal que $\mathcal{A}\Phi_n = \Phi_n\Gamma_n$ entonces se tiene una **representación espectral** de la (matriz) transición de probabilidades (Mdl, 2012).

$$P(t; x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(x) e^{\Gamma_n t} \Phi_n^*(y) W(y)$$

PROCESOS DE DIFUSIÓN CAMBIANTES

El operador infinitesimal \mathcal{A} es ahora un **operador diferencial de segundo orden matricial** (Berman, 1994)

$$\mathcal{A}_x = \frac{1}{2} \mathbf{A}(x) \partial_x^2 + \mathbf{B}(x) \partial_x^1 + \mathbf{Q}(x) \partial_x^0$$

donde $\mathbf{A}(x)$ y $\mathbf{B}(x)$ son matrices **diagonales** y $\mathbf{Q}(x)$ es el operador infinitesimal de una cadena de Markov finita a tiempo continuo.

Si existe una sucesión de **autofunciones matriciales** ortogonales $(\Phi_n)_n$ *completa* en

$$L^2_W(\mathcal{S}; \mathbb{C}^{N \times N}) = \left\{ \mathbf{F} : (\mathbf{F}, \mathbf{F})_W = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{F}(x) \mathbf{W}(x) \mathbf{F}^*(x) dx < \infty \right\}$$

con sus correspondientes **autovalores matriciales** Γ_n tal que $\mathcal{A}\Phi_n = \Phi_n\Gamma_n$ entonces se tiene una **representación espectral** de la (matriz) transición de probabilidades (Mdl, 2012).

$$P(t; x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(x) e^{\Gamma_n t} \Phi_n^*(y) \mathbf{W}(y)$$

Ejemplos: Mdi (2012), Mdl-Román (2016).

ÍNDICE

1 ANÁLISIS ESPECTRAL EN DIMENSIÓN 1

2 ANÁLISIS ESPECTRAL EN DIMENSIÓN 2

3 NUEVOS EJEMPLOS

FUNCIONES ESFÉRICAS MATRICIALES

Una gran mayoría de ejemplos relacionados con procesos de Markov bivariados proviene de teoría de representación de grupos. En particular del estudio de **funciones esféricas matriciales** (Tirao, 1977) asociadas a grupos de la forma G/K (espacio proyectivo real o complejo, espacio hiperbólico real o complejo o la esfera real). Estas funciones son autofunciones del **operador de Casimir** (laplaciano) asociado al grupo.

En todos los casos se obtiene una expresión explícita del **peso matricial**, el **operador diferencial de segundo orden**, la **relación de recurrencia a tres términos** y otras fórmulas de estructura para las funciones esféricas matriciales, así como su relación con polinomios ortogonales matriciales.

El ejemplo que veremos a continuación proviene del estudio de funciones esféricas matriciales asociadas al par $(\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2), \mathrm{diag} \mathrm{SU}(2))$ (Koelink-van Pruijssen-Román, 2012).

FUNCIONES ESFÉRICAS MATRICIALES

Una gran mayoría de ejemplos relacionados con procesos de Markov bivariados proviene de teoría de representación de grupos. En particular del estudio de **funciones esféricas matriciales** (Tirao, 1977) asociadas a grupos de la forma G/K (espacio proyectivo real o complejo, espacio hiperbólico real o complejo o la esfera real). Estas funciones son autofunciones del **operador de Casimir** (laplaciano) asociado al grupo.

En todos los casos se obtiene una expresión explícita del **peso matricial**, el **operador diferencial de segundo orden**, la **relación de recurrencia a tres términos** y otras fórmulas de estructura para las funciones esféricas matriciales, así como su relación con polinomios ortogonales matriciales.

El ejemplo que veremos a continuación proviene del estudio de funciones esféricas matriciales asociadas al par $(\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2), \mathrm{diag} \mathrm{SU}(2))$ (Koelink-van Pruijssen-Román, 2012).

FUNCIONES ESFÉRICAS MATRICIALES

Una gran mayoría de ejemplos relacionados con procesos de Markov bivariados proviene de teoría de representación de grupos. En particular del estudio de **funciones esféricas matriciales** (Tirao, 1977) asociadas a grupos de la forma G/K (espacio proyectivo real o complejo, espacio hiperbólico real o complejo o la esfera real). Estas funciones son autofunciones del **operador de Casimir** (laplaciano) asociado al grupo.

En todos los casos se obtiene una expresión explícita del **peso matricial**, el **operador diferencial de segundo orden**, la **relación de recurrencia a tres términos** y otras fórmulas de estructura para las funciones esféricas matriciales, así como su relación con polinomios ortogonales matriciales.

El ejemplo que veremos a continuación proviene del estudio de funciones esféricas matriciales asociadas al par $(\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2), \mathrm{diag} \mathrm{SU}(2))$ (Koelink-van Pruijssen-Román, 2012).

LA FAMILIA DE EJEMPLOS

Para $\ell \in \mathbb{N}$ y $N = 2\ell + 1$ dieron una familia uniparamétrica de polinomios ortogonales matriciales de tamaño $N \times N$ donde la **matriz peso** viene dada por

$$W(y) = [y(1-y)]^{\nu-1/2} \Psi_0(y) T(\Psi_0(y))^*, \quad T_{ij} = \delta_{ij} \binom{2\ell}{i} \frac{(\nu)_i}{(\nu+2\ell-i)_i}$$

donde $\Psi_0(y)$ es cierta función matricial que contiene funciones esféricas y que se pueden escribir en términos de los *polinomios de Krawtchouk*.

El correspondiente **operador diferencial simétrico de segundo orden** es

$$D = y(1-y)\partial_y^2 + (C + \nu - y(2\ell + 2\nu + 1))\partial_y + (V + (\nu - 1)(2\ell + \nu + 1))$$

donde

$$C = \frac{2\ell+1}{2} - \frac{1}{2}(A^*J + A\check{J}), \quad V = J\check{J}$$

Aquí $A = \sum_{i=0}^{N-2} E_{i,i+1}$, $J = \sum_{i=0}^{N-1} (N-1-i)E_{ii}$ y $\check{J} = (N-1)I - J$.

El correspondiente **autovalor** es $(D(P_n^*) = P_n^* \Lambda_n)$

$$\Lambda_n = -n(n-1) - n(2\ell + 2\nu + 1) + (V + (\nu - 1)(2\ell + \nu + 1))$$

También se tiene la relación de **recurrencia de recurrencia a tres términos**

$$yP_n(y) = P_{n+1}(y) + B_n P_n(y) + C_n P_{n-1}(y)$$

LA FAMILIA DE EJEMPLOS

Para $\ell \in \mathbb{N}$ y $N = 2\ell + 1$ dieron una familia uniparamétrica de polinomios ortogonales matriciales de tamaño $N \times N$ donde la **matriz peso** viene dada por

$$W(y) = [y(1-y)]^{\nu-1/2} \Psi_0(y) T(\Psi_0(y))^*, \quad T_{ij} = \delta_{ij} \binom{2\ell}{i} \frac{(\nu)_i}{(\nu+2\ell-i)_i}$$

donde $\Psi_0(y)$ es cierta función matricial que contiene funciones esféricas y que se pueden escribir en términos de los *polinomios de Krawtchouk*.

El correspondiente **operador diferencial simétrico de segundo orden** es

$$D = y(1-y)\partial_y^2 + (C + \nu - y(2\ell + 2\nu + 1))\partial_y + (V + (\nu - 1)(2\ell + \nu + 1))$$

donde

$$C = \frac{2\ell + 1}{2} - \frac{1}{2}(A^*J + A\check{J}), \quad V = J\check{J}$$

Aquí $A = \sum_{i=0}^{N-2} E_{i,i+1}$, $J = \sum_{i=0}^{N-1} (N-1-i)E_{ii}$ y $\check{J} = (N-1)I - J$.

El correspondiente **autovalor** es $(D(P_n^*)) = P_n^* \Lambda_n$

$$\Lambda_n = -n(n-1) - n(2\ell + 2\nu + 1) + (V + (\nu - 1)(2\ell + \nu + 1))$$

También se tiene la relación de **recurrencia de recurrencia a tres términos**

$$yP_n(y) = P_{n+1}(y) + B_n P_n(y) + C_n P_{n-1}(y)$$

LA FAMILIA DE EJEMPLOS

Para $\ell \in \mathbb{N}$ y $N = 2\ell + 1$ dieron una familia uniparamétrica de polinomios ortogonales matriciales de tamaño $N \times N$ donde la **matriz peso** viene dada por

$$W(y) = [y(1-y)]^{\nu-1/2} \Psi_0(y) T(\Psi_0(y))^*, \quad T_{ij} = \delta_{ij} \binom{2\ell}{i} \frac{(\nu)_i}{(\nu+2\ell-i)_i}$$

donde $\Psi_0(y)$ es cierta función matricial que contiene funciones esféricas y que se pueden escribir en términos de los *polinomios de Krawtchouk*.

El correspondiente **operador diferencial simétrico de segundo orden** es

$$D = y(1-y)\partial_y^2 + (C + \nu - y(2\ell + 2\nu + 1))\partial_y + (V + (\nu - 1)(2\ell + \nu + 1))$$

donde

$$C = \frac{2\ell + 1}{2} - \frac{1}{2}(A^*J + A\check{J}), \quad V = J\check{J}$$

Aquí $A = \sum_{i=0}^{N-2} E_{i,i+1}$, $J = \sum_{i=0}^{N-1} (N-1-i)E_{ii}$ y $\check{J} = (N-1)I - J$.

El correspondiente **autovalor** es $(D(P_n^*)) = P_n^* \Lambda_n$

$$\Lambda_n = -n(n-1) - n(2\ell + 2\nu + 1) + (V + (\nu - 1)(2\ell + \nu + 1))$$

También se tiene la relación de **recurrencia de recurrencia a tres términos**

$$yP_n(y) = P_{n+1}(y) + B_n P_n(y) + C_n P_{n-1}(y)$$

TRES PROPIEDADES IMPORTANTES

1. La estructura de grupo induce la existencia de una matriz constante Y tal que el peso matricial W se **descompone por bloques** de la forma

$$\widetilde{W}(y) = YW(y)Y^* = \left(\begin{array}{c|c} W_1(y) & 0 \\ \hline 0 & W_2(y) \end{array} \right)$$

donde W_1 es $(\ell + 1) \times (\ell + 1)$ y W_2 es $\ell \times \ell$. Estudiaremos aspectos probabilísticos de dos procesos independientes ($\ell = 1$).

2. Buscamos cierta familia de polinomios ortogonales matriciales cuya matriz de Jacobi tenga una interpretación "**estocástica**", donde la suma de cada fila de \mathcal{A} es ≤ 0 y las entradas fuera de la diagonal principal de \mathcal{A} sean ≥ 0 .

3. Para que el operador diferencial tenga una interpretación "**estocástica**" hacemos una transformación (dependiente de y) $S(y)$ tal que $\mathcal{D} = S^{-1}(DS)$. Entonces

$$\mathcal{D} = y(1 - y)\partial_y^2 + A(y)\partial_y + Q(y)$$

Interpretación "**estocástica**" significa que $A(y)$ es **diagonal**, la suma de cada renglón de $Q(y)$ es ≤ 0 y las entradas fuera de la diagonal principal de $Q(y)$ son ≥ 0 .

TRES PROPIEDADES IMPORTANTES

1. La estructura de grupo induce la existencia de una matriz constante Y tal que el peso matricial W se **descompone por bloques** de la forma

$$\widetilde{W}(y) = YW(y)Y^* = \left(\begin{array}{c|c} W_1(y) & 0 \\ \hline 0 & W_2(y) \end{array} \right)$$

donde W_1 es $(\ell + 1) \times (\ell + 1)$ y W_2 es $\ell \times \ell$. Estudiaremos aspectos probabilísticos de dos procesos independientes ($\ell = 1$).

2. Buscamos cierta familia de polinomios ortogonales matriciales cuya matriz de Jacobi tenga una interpretación "**estocástica**", donde la suma de cada fila de \mathcal{A} es ≤ 0 y las entradas fuera de la diagonal principal de \mathcal{A} sean ≥ 0 .

3. Para que el operador diferencial tenga una interpretación "**estocástica**" hacemos una transformación (dependiente de y) $S(y)$ tal que $\mathcal{D} = S^{-1}(DS)$. Entonces

$$\mathcal{D} = y(1 - y)\partial_y^2 + A(y)\partial_y + Q(y)$$

Interpretación "estocástica" significa que $A(y)$ es **diagonal**, la suma de cada renglón de $Q(y)$ es ≤ 0 y las entradas fuera de la diagonal principal de $Q(y)$ son ≥ 0 .

TRES PROPIEDADES IMPORTANTES

1. La estructura de grupo induce la existencia de una matriz constante Y tal que el peso matricial W se **descompone por bloques** de la forma

$$\widetilde{W}(y) = YW(y)Y^* = \left(\begin{array}{c|c} W_1(y) & 0 \\ \hline 0 & W_2(y) \end{array} \right)$$

donde W_1 es $(\ell + 1) \times (\ell + 1)$ y W_2 es $\ell \times \ell$. Estudiaremos aspectos probabilísticos de dos procesos independientes ($\ell = 1$).

2. Buscamos cierta familia de polinomios ortogonales matriciales cuya matriz de Jacobi tenga una interpretación **"estocástica"**, donde la suma de cada fila de \mathcal{A} es ≤ 0 y las entradas fuera de la diagonal principal de \mathcal{A} sean ≥ 0 .

3. Para que el operador diferencial tenga una interpretación **"estocástica"** hacemos una transformación (dependiente de y) $S(y)$ tal que $\mathcal{D} = S^{-1}(DS)$. Entonces

$$\mathcal{D} = y(1 - y)\partial_y^2 + A(y)\partial_y + Q(y)$$

Interpretación "estocástica" significa que $A(y)$ es **diagonal**, la suma de cada renglón de $Q(y)$ es ≤ 0 y las entradas fuera de la diagonal principal de $Q(y)$ son ≥ 0 .

EL PRIMER MODELO ESTOCÁSTICO 3×3 ($\ell = 1$)

Sea $W_1(y)$ (2×2) y $w_2(y)$ (escalar) las matrices por bloques y denotamos $Q_{n,1}$ and $q_{n,2}$ las correspondientes familias de POM que satisfacen $Q_{n,1}(0)\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_2 = (1, 1)^T$ y $q_{n,2}(0) = 1$.

1. **Un proceso de nacimiento y muerte:** Los polinomios $q_{n,2}$ satisfacen una relación de recurrencia a tres términos

$$-yq_{n,2}(y) = a_n q_{n+1,2}(y) - (a_n + c_n)q_{n,2}(y) + c_n q_{n-1,2}(y)$$

donde los coeficientes vienen dados por

$$a_n = \frac{2\nu + n + 2}{4(\nu + n + 1)}, \quad c_n = \frac{n}{4(\nu + n + 1)}$$

La matriz de Jacobi es

$$\mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & & & \\ \frac{1}{4(\nu+2)} & -\frac{1}{2} & \frac{2\nu+3}{4(\nu+2)} & 0 & & \\ 0 & \frac{1}{2(\nu+3)} & -\frac{1}{2} & \frac{\nu+2}{2(\nu+3)} & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}, \quad \nu > -3/2$$

y es el operador infinitesimal de un proceso de nacimiento y muerte.

EL PRIMER MODELO ESTOCÁSTICO 3×3 ($\ell = 1$)

Sea $W_1(y)$ (2×2) y $w_2(y)$ (escalar) las matrices por bloques y denotamos $Q_{n,1}$ and $q_{n,2}$ las correspondientes familias de POM que satisfacen $Q_{n,1}(0)\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_2 = (1, 1)^T$ y $q_{n,2}(0) = 1$.

1. **Un proceso de nacimiento y muerte:** Los polinomios $q_{n,2}$ satisfacen una relación de recurrencia a tres términos

$$-yq_{n,2}(y) = a_n q_{n+1,2}(y) - (a_n + c_n)q_{n,2}(y) + c_n q_{n-1,2}(y)$$

donde los coeficientes vienen dados por

$$a_n = \frac{2\nu + n + 2}{4(\nu + n + 1)}, \quad c_n = \frac{n}{4(\nu + n + 1)}$$

La matriz de Jacobi es

$$\mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & & & \\ \frac{1}{4(\nu+2)} & -\frac{1}{2} & \frac{2\nu+3}{4(\nu+2)} & 0 & & \\ 0 & \frac{1}{2(\nu+3)} & -\frac{1}{2} & \frac{\nu+2}{2(\nu+3)} & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}, \quad \nu > -3/2$$

y es el operador infinitesimal de un proceso de nacimiento y muerte.

Los **coeficientes potenciales** (inversa de las normas de $q_{n,2}$) son

$$\pi_0 = 1, \quad \pi_n = \frac{2(\nu + n + 1)(2\nu + 3)_{n-1}}{n!}, \quad n \geq 1$$

mientras que el **peso** viene dado por

$$w_2(y) = \frac{4^{\nu+1}(\nu+1)_2}{\nu+1/2} [y(1-y)]^{\nu+1/2}, \quad y \in (0,1), \quad \nu > -3/2$$

Por lo tanto se tiene la **representación de Karlin-McGregor**

$$\begin{aligned} P_{ij}^{(2)}(t) &= \mathbb{P}(X_t = j | X_0 = i) = \pi_j \int_0^1 e^{-yt} q_{i,2}(y) q_{j,2}(y) w_2(y) dy \\ &= \frac{2(\nu + j + 1)(2\nu + 3)_{j-1} 4^{\nu+1} \Gamma(\nu + 2)}{j! \sqrt{\pi} \Gamma(\nu + 3/2)} \int_0^1 e^{-yt} q_{i,2} q_{j,2} [y(1-y)]^{\nu+1/2} dy \end{aligned}$$

Como tenemos una expresión explícita del peso $w_2(y)$ se puede estudiar la **recurrencia** del proceso. Para $-3/2 < \nu \leq -1/2$ el proceso es *recurrente nulo* (ya que $\sum \pi_n = \infty$), mientras que si $\nu > -1/2$ el proceso es *transitorio*.

El proceso de nacimiento y muerte puede ser visto como una *variante racional de la cola con un servidor a medida* que la longitud de la cola aumenta.

Los **coeficientes potenciales** (inversa de las normas de $q_{n,2}$) son

$$\pi_0 = 1, \quad \pi_n = \frac{2(\nu + n + 1)(2\nu + 3)_{n-1}}{n!}, \quad n \geq 1$$

mientras que el **peso** viene dado por

$$w_2(y) = \frac{4^{\nu+1}(\nu+1)_2}{\nu+1/2} [y(1-y)]^{\nu+1/2}, \quad y \in (0,1), \quad \nu > -3/2$$

Por lo tanto se tiene la **representación de Karlin-McGregor**

$$\begin{aligned} P_{ij}^{(2)}(t) &= \mathbb{P}(X_t = j | X_0 = i) = \pi_j \int_0^1 e^{-yt} q_{i,2}(y) q_{j,2}(y) w_2(y) dy \\ &= \frac{2(\nu + j + 1)(2\nu + 3)_{j-1} 4^{\nu+1} \Gamma(\nu + 2)}{j! \sqrt{\pi} \Gamma(\nu + 3/2)} \int_0^1 e^{-yt} q_{i,2} q_{j,2} [y(1-y)]^{\nu+1/2} dy \end{aligned}$$

Como tenemos una expresión explícita del peso $w_2(y)$ se puede estudiar la **recurrencia** del proceso. Para $-3/2 < \nu \leq -1/2$ el proceso es *recurrente nulo* (ya que $\sum \pi_n = \infty$), mientras que si $\nu > -1/2$ el proceso es *transitorio*.

El proceso de nacimiento y muerte puede ser visto como una *variante racional de la cola con un servidor a medida* que la longitud de la cola aumenta.

Los **coeficientes potenciales** (inversa de las normas de $q_{n,2}$) son

$$\pi_0 = 1, \quad \pi_n = \frac{2(\nu + n + 1)(2\nu + 3)_{n-1}}{n!}, \quad n \geq 1$$

mientras que el **peso** viene dado por

$$w_2(y) = \frac{4^{\nu+1}(\nu+1)_2}{\nu+1/2} [y(1-y)]^{\nu+1/2}, \quad y \in (0,1), \quad \nu > -3/2$$

Por lo tanto se tiene la **representación de Karlin-McGregor**

$$\begin{aligned} P_{ij}^{(2)}(t) &= \mathbb{P}(X_t = j | X_0 = i) = \pi_j \int_0^1 e^{-yt} q_{i,2}(y) q_{j,2}(y) w_2(y) dy \\ &= \frac{2(\nu + j + 1)(2\nu + 3)_{j-1} 4^{\nu+1} \Gamma(\nu + 2)}{j! \sqrt{\pi} \Gamma(\nu + 3/2)} \int_0^1 e^{-yt} q_{i,2} q_{j,2} [y(1-y)]^{\nu+1/2} dy \end{aligned}$$

Como tenemos una expresión explícita del peso $w_2(y)$ se puede estudiar la **recurrencia** del proceso. Para $-3/2 < \nu \leq -1/2$ el proceso es *recurrente nulo* (ya que $\sum \pi_n = \infty$), mientras que si $\nu > -1/2$ el proceso es *transitorio*.

El proceso de nacimiento y muerte puede ser visto como una *variante racional de la cola con un servidor a medida* que la longitud de la cola aumenta.

Los **coeficientes potenciales** (inversa de las normas de $q_{n,2}$) son

$$\pi_0 = 1, \quad \pi_n = \frac{2(\nu + n + 1)(2\nu + 3)_{n-1}}{n!}, \quad n \geq 1$$

mientras que el **peso** viene dado por

$$w_2(y) = \frac{4^{\nu+1}(\nu+1)_2}{\nu+1/2} [y(1-y)]^{\nu+1/2}, \quad y \in (0,1), \quad \nu > -3/2$$

Por lo tanto se tiene la **representación de Karlin-McGregor**

$$\begin{aligned} P_{ij}^{(2)}(t) &= \mathbb{P}(X_t = j | X_0 = i) = \pi_j \int_0^1 e^{-yt} q_{i,2}(y) q_{j,2}(y) w_2(y) dy \\ &= \frac{2(\nu+j+1)(2\nu+3)_{j-1} 4^{\nu+1} \Gamma(\nu+2)}{j! \sqrt{\pi} \Gamma(\nu+3/2)} \int_0^1 e^{-yt} q_{i,2} q_{j,2} [y(1-y)]^{\nu+1/2} dy \end{aligned}$$

Como tenemos una expresión explícita del peso $w_2(y)$ se puede estudiar la **recurrencia** del proceso. Para $-3/2 < \nu \leq -1/2$ el proceso es *recurrente nulo* (ya que $\sum \pi_n = \infty$), mientras que si $\nu > -1/2$ el proceso es *transitorio*.

El proceso de nacimiento y muerte puede ser visto como una *variante racional de la cola con un servidor a medida* que la longitud de la cola aumenta.

2. Un cuasi-proceso de nacimiento y muerte a tiempo continuo: Los polinomios $Q_{n,1}(y)$ satisfacen la relación de recurrencia a tres términos

$$-yQ_{n,1}(y) = A_n Q_{n+1,1}(y) + B_n Q_{n,1}(y) + C_n Q_{n-1,1}(y)$$

donde los coeficientes vienen dados por

$$A_n = \begin{pmatrix} \frac{2\nu+n+2}{4(\nu+n+2)} & 0 \\ 0 & \frac{(n+\nu)(2\nu+n+2)}{4(\nu+n+1)^2} \end{pmatrix}, B_n = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\nu}{2(\nu+n)(\nu+n+2)} \\ \frac{1+\nu}{2(\nu+n+1)^2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, C_n = \begin{pmatrix} \frac{n}{4(\nu+n)} & 0 \\ 0 & \frac{n(\nu+n+2)}{4(\nu+n+1)^2} \end{pmatrix}$$

La matriz de Jacobi (pentadiagonal) es

$$A_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2(\nu+2)} & \frac{\nu+1}{2(\nu+2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2(\nu+1)} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\nu}{2(\nu+1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{4(\nu+1)} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\nu}{2(\nu+1)(\nu+3)} & \frac{2\nu+3}{4(\nu+3)} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{\nu+3}{4(\nu+2)^2} & \frac{1+\nu}{2(\nu+2)^2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{(1+\nu)(2\nu+3)}{4(\nu+2)^2} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2(\nu+2)} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\nu}{2(\nu+2)(\nu+4)} & \frac{\nu+2}{2(\nu+4)} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\nu+4}{2(\nu+3)^2} & \frac{1+\nu}{2(\nu+3)^2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{(2+\nu)^2}{2(\nu+3)^2} & \cdots \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

y es el operador infinitesimal de un cuasi-proceso de nacimiento y muerte ($\nu \geq 0$) a tiempo continuo.

El **peso matricial** viene dado por ($\nu \geq 0$)

$$W_1(y) = 4^{\nu+1/2}(\nu+2) [y(1-y)]^{\nu-1/2} \begin{pmatrix} 1 - \frac{2(1+\nu)}{\nu+1/2}y(1-y) & 1-2y \\ 1-2y & 1 - \frac{2\nu}{\nu+1/2}y(1-y) \end{pmatrix}$$

Cada entrada por bloques (i, j) de $P^{(1)}(t)$ admite una **representación de Karlin-McGregor**

$$P_{ij}^{(1)}(t) = \left(\int_0^1 e^{-yt} Q_{i,1}(y) W_1(y) Q_{j,1}^*(y) dy \right) \Pi_j$$

$$\Pi_0 = \|Q_{0,1}\|_{W_1}^{-2}, \quad \Pi_n = \|Q_{n,1}\|_{W_1}^{-2} = \frac{2\Gamma(\nu+2)(2\nu+3)_{n-1}}{\sqrt{\pi}n!(\nu+2)\Gamma(\nu+1/2)} \begin{pmatrix} \frac{\nu+1}{\nu+n+1} & 0 \\ 0 & \frac{\nu(\nu+n+1)}{(\nu+n)(\nu+n+2)} \end{pmatrix}$$

Podemos computar también *explícitamente* la **medida invariante** del proceso

$$\begin{aligned} \pi &= \left((\Pi_0 \mathbf{e}_2)^T; (\Pi_1 \mathbf{e}_2)^T; (\Pi_2 \mathbf{e}_2)^T; \dots \right), \quad \mathbf{e}_2^T = (1, 1), \\ &= \frac{\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1/2)(\nu+2)} \left(1, \frac{\nu+1}{\nu+2}; \frac{2(\nu+1)^2}{\nu+2}, \frac{2\nu(\nu+2)}{\nu+3}; \dots \right) \end{aligned}$$

Similarmente al caso escalar, el proceso es *recurrente nulo* si $0 \leq \nu \leq 1/2$, mientras que si $\nu > 1/2$ el proceso es *transitorio*.

El **peso matricial** viene dado por ($\nu \geq 0$)

$$W_1(y) = 4^{\nu+1/2}(\nu+2) [y(1-y)]^{\nu-1/2} \begin{pmatrix} 1 - \frac{2(1+\nu)}{\nu+1/2}y(1-y) & 1-2y \\ 1-2y & 1 - \frac{2\nu}{\nu+1/2}y(1-y) \end{pmatrix}$$

Cada entrada por bloques (i, j) de $P^{(1)}(t)$ admite una **representación de Karlin-McGregor**

$$P_{ij}^{(1)}(t) = \left(\int_0^1 e^{-yt} Q_{i,1}(y) W_1(y) Q_{j,1}^*(y) dy \right) \Pi_j$$

$$\Pi_0 = \|Q_{0,1}\|_{W_1}^{-2}, \quad \Pi_n = \|Q_{n,1}\|_{W_1}^{-2} = \frac{2\Gamma(\nu+2)(2\nu+3)_{n-1}}{\sqrt{\pi}n!(\nu+2)\Gamma(\nu+1/2)} \begin{pmatrix} \frac{\nu+1}{\nu+n+1} & 0 \\ 0 & \frac{\nu(\nu+n+1)}{(\nu+n)(\nu+n+2)} \end{pmatrix}$$

Podemos computar también *explícitamente* la **medida invariante** del proceso

$$\begin{aligned} \pi &= \left((\Pi_0 \mathbf{e}_2)^T; (\Pi_1 \mathbf{e}_2)^T; (\Pi_2 \mathbf{e}_2)^T; \dots \right), \quad \mathbf{e}_2^T = (1, 1), \\ &= \frac{\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1/2)(\nu+2)} \left(1, \frac{\nu+1}{\nu+2}; \frac{2(\nu+1)^2}{\nu+2}, \frac{2\nu(\nu+2)}{\nu+3}; \dots \right) \end{aligned}$$

Similarmente al caso escalar, el proceso es *recurrente nulo* si $0 \leq \nu \leq 1/2$, mientras que si $\nu > 1/2$ el proceso es *transitorio*.

El **peso matricial** viene dado por ($\nu \geq 0$)

$$W_1(y) = 4^{\nu+1/2}(\nu+2) [y(1-y)]^{\nu-1/2} \begin{pmatrix} 1 - \frac{2(1+\nu)}{\nu+1/2}y(1-y) & 1-2y \\ 1-2y & 1 - \frac{2\nu}{\nu+1/2}y(1-y) \end{pmatrix}$$

Cada entrada por bloques (i, j) de $P^{(1)}(t)$ admite una **representación de Karlin-McGregor**

$$P_{ij}^{(1)}(t) = \left(\int_0^1 e^{-yt} Q_{i,1}(y) W_1(y) Q_{j,1}^*(y) dy \right) \Pi_j$$

$$\Pi_0 = \|Q_{0,1}\|_{W_1}^{-2}, \quad \Pi_n = \|Q_{n,1}\|_{W_1}^{-2} = \frac{2\Gamma(\nu+2)(2\nu+3)_{n-1}}{\sqrt{\pi}n!(\nu+2)\Gamma(\nu+1/2)} \begin{pmatrix} \frac{\nu+1}{\nu+n+1} & 0 \\ 0 & \frac{\nu(\nu+n+1)}{(\nu+n)(\nu+n+2)} \end{pmatrix}$$

Podemos computar también *explícitamente* la **medida invariante** del proceso

$$\begin{aligned} \pi &= \left((\Pi_0 \mathbf{e}_2)^T; (\Pi_1 \mathbf{e}_2)^T; (\Pi_2 \mathbf{e}_2)^T; \dots \right), \quad \mathbf{e}_2^T = (1, 1), \\ &= \frac{\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1/2)(\nu+2)} \left(1, \frac{\nu+1}{\nu+2}; \frac{2(\nu+1)^2}{\nu+2}, \frac{2\nu(\nu+2)}{\nu+3}; \dots \right) \end{aligned}$$

Similarmente al caso escalar, el proceso es *recurrente nulo* si $0 \leq \nu \leq 1/2$, mientras que si $\nu > 1/2$ el proceso es *transitorio*.

El **peso matricial** viene dado por ($\nu \geq 0$)

$$W_1(y) = 4^{\nu+1/2}(\nu+2) [y(1-y)]^{\nu-1/2} \begin{pmatrix} 1 - \frac{2(1+\nu)}{\nu+1/2}y(1-y) & 1-2y \\ 1-2y & 1 - \frac{2\nu}{\nu+1/2}y(1-y) \end{pmatrix}$$

Cada entrada por bloques (i, j) de $P^{(1)}(t)$ admite una **representación de Karlin-McGregor**

$$P_{ij}^{(1)}(t) = \left(\int_0^1 e^{-yt} Q_{i,1}(y) W_1(y) Q_{j,1}^*(y) dy \right) \Pi_j$$

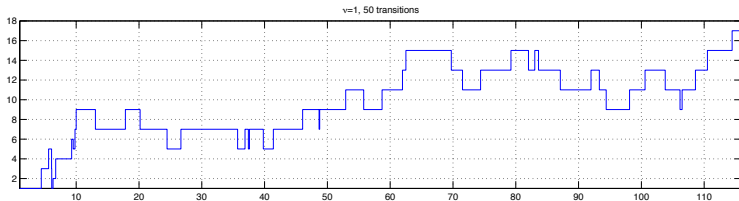
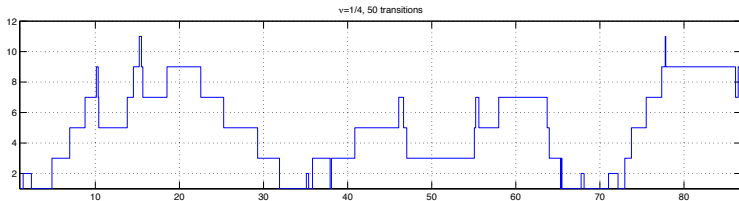
$$\Pi_0 = \|Q_{0,1}\|_{W_1}^{-2}, \quad \Pi_n = \|Q_{n,1}\|_{W_1}^{-2} = \frac{2\Gamma(\nu+2)(2\nu+3)_{n-1}}{\sqrt{\pi}n!(\nu+2)\Gamma(\nu+1/2)} \begin{pmatrix} \frac{\nu+1}{\nu+n+1} & 0 \\ 0 & \frac{\nu(\nu+n+1)}{(\nu+n)(\nu+n+2)} \end{pmatrix}$$

Podemos computar también *explícitamente* la **medida invariante** del proceso

$$\begin{aligned} \pi &= \left((\Pi_0 \mathbf{e}_2)^T; (\Pi_1 \mathbf{e}_2)^T; (\Pi_2 \mathbf{e}_2)^T; \dots \right), \quad \mathbf{e}_2^T = (1, 1), \\ &= \frac{\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1/2)(\nu+2)} \left(1, \frac{\nu+1}{\nu+2}; \frac{2(\nu+1)^2}{\nu+2}, \frac{2\nu(\nu+2)}{\nu+3}; \dots \right) \end{aligned}$$

Similarmente al caso escalar, el proceso es *recurrente nulo* si $0 \leq \nu \leq 1/2$, mientras que si $\nu > 1/2$ el proceso es *transitorio*.

Interpretación: Tenemos un cuasi-proceso de nacimiento y muerte con dos fases. Si el proceso se mueve dentro de cada fase, se añaden o se quitan dos elementos en la cola. Al contrario, si el proceso se mueve de una fase a la otra, entonces se añade o se quita un elemento en la cola. A medida que la longitud de la cola aumenta, es poco probable que ocurran transiciones entre fases. Por lo tanto el proceso puede ser visto como una *variación racional de un par de colas con un servidor, donde la interacción entre ellas es significativa en los primeros estados de la cola.*



EL SEGUNDO MODELO ESTOCÁSTICO 3×3 ($\ell = 1$)

Sea $S(y)$ la **matriz de transformación**

$$S(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 2y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sean $W_1(y)$ (2×2) y $w_2(y)$ (escalar) los bloques de la matriz peso y denotamos por $Q_{n,1}$ and $q_{n,2}$ las correspondientes familias de funciones ortogonales matriciales (**ya no son polinomios**).

1. **Una difusión con killing**: Las funciones $q_{n,2}$ se pueden escribir como

$$q_{n,2}(y) = -\frac{i n! \sqrt{y(1-y)}}{2^{n-2}(\nu+1)_n} C_n^{(\nu+1)}(y),$$

donde $C_n^{(\lambda)}$ son los polinomios de Gegenbauer mónicos.

Son autofunciones del operador diferencial de segundo orden

$$\mathcal{D}_2 = y(1-y)\partial_y^2 + (\nu+1/2)(1-2y)\partial_y - \frac{\nu(1-2y)^2}{2y(1-y)}, \quad \nu \geq 0$$

con autovalor

$$\lambda_{n,2} = -1 - n(n+2\nu+2)$$

EL SEGUNDO MODELO ESTOCÁSTICO 3×3 ($\ell = 1$)

Sea $S(y)$ la **matriz de transformación**

$$S(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 2y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sean $W_1(y)$ (2×2) y $w_2(y)$ (escalar) los bloques de la matriz peso y denotamos por $Q_{n,1}$ and $q_{n,2}$ las correspondientes familias de funciones ortogonales matriciales (**ya no son polinomios**).

1. **Una difusión con killing**: Las funciones $q_{n,2}$ se pueden escribir como

$$q_{n,2}(y) = -\frac{i n! \sqrt{y(1-y)}}{2^{n-2}(\nu+1)_n} C_n^{(\nu+1)}(y),$$

donde $C_n^{(\lambda)}$ son los polinomios de Gegenbauer mónicos.

Son autofunciones del operador diferencial de segundo orden

$$\mathcal{D}_2 = y(1-y)\partial_y^2 + (\nu+1/2)(1-2y)\partial_y - \frac{\nu(1-2y)^2}{2y(1-y)}, \quad \nu \geq 0$$

con autovalor

$$\lambda_{n,2} = -1 - n(n+2\nu+2)$$

EL SEGUNDO MODELO ESTOCÁSTICO 3×3 ($\ell = 1$)

Sea $S(y)$ la **matriz de transformación**

$$S(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 2y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sean $W_1(y)$ (2×2) y $w_2(y)$ (escalar) los bloques de la matriz peso y denotamos por $Q_{n,1}$ and $q_{n,2}$ las correspondientes familias de funciones ortogonales matriciales (**ya no son polinomios**).

1. **Una difusión con killing**: Las funciones $q_{n,2}$ se pueden escribir como

$$q_{n,2}(y) = -\frac{i n! \sqrt{y(1-y)}}{2^{n-2}(\nu+1)_n} C_n^{(\nu+1)}(y),$$

donde $C_n^{(\lambda)}$ son los polinomios de Gegenbauer mónicos.

Son autofunciones del operador diferencial de segundo orden

$$\mathcal{D}_2 = y(1-y)\partial_y^2 + (\nu+1/2)(1-2y)\partial_y - \frac{\nu(1-2y)^2}{2y(1-y)}, \quad \nu \geq 0$$

con autovalor

$$\lambda_{n,2} = -1 - n(n+2\nu+2)$$

La función peso es

$$w_2(y) = \frac{4^{\nu-1}(1+\nu)_2[y(1-y)]^{\nu-1/2}}{\nu+1/2}$$

La **representación espectral** de la densidad de transiciones (condicionado a que el killing todavía no haya ocurrido) viene dada por

$$\begin{aligned} p(t; x, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{\lambda_{n,2}t} q_{n,2}(x) \overline{q_{n,2}(y)} \pi_n w_2(y) \\ &= \frac{2}{\pi} e^{-t} \sqrt{x(1-x)} 4^{2\nu+1} \Gamma(\nu+1)^2 [y(1-y)]^\nu \times \\ &\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-n(n+2\nu+2)t} n! 4^n (n+\nu+1)}{\Gamma(n+2\nu+1)} C_n^{(\nu+1)}(x) C_n^{(\nu+1)}(y) \end{aligned}$$

donde

$$\pi_n^{-1} = \|q_{n,2}^*\|_{w_2}^2 = \frac{\pi n! (n+\nu+1) (\nu+1)_2 \Gamma(n+2\nu+2)}{16^n 4^\nu (2\nu+1) \Gamma(n+\nu+2)^2}$$

La función peso es

$$w_2(y) = \frac{4^{\nu-1}(1+\nu)_2[y(1-y)]^{\nu-1/2}}{\nu+1/2}$$

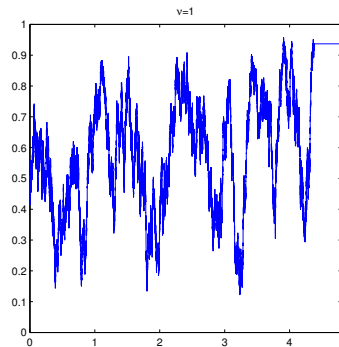
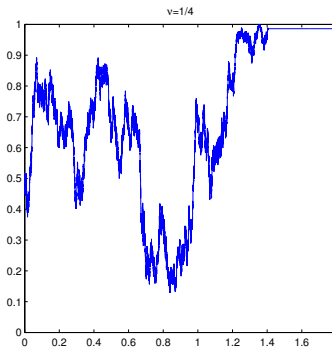
La **representación espectral** de la densidad de transiciones (condicionado a que el killing todavía no haya ocurrido) viene dada por

$$\begin{aligned} p(t; x, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{\lambda_{n,2}t} q_{n,2}(x) \overline{q_{n,2}(y)} \pi_n w_2(y) \\ &= \frac{2}{\pi} e^{-t} \sqrt{x(1-x)} 4^{2\nu+1} \Gamma(\nu+1)^2 [y(1-y)]^\nu \times \\ &\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-n(n+2\nu+2)t} n! 4^n (n+\nu+1)}{\Gamma(n+2\nu+1)} C_n^{(\nu+1)}(x) C_n^{(\nu+1)}(y) \end{aligned}$$

donde

$$\pi_n^{-1} = \|q_{n,2}^*\|_{w_2}^2 = \frac{\pi n! (n+\nu+1) (\nu+1)_2 \Gamma(n+2\nu+2)}{16^n 4^\nu (2\nu+1) \Gamma(n+\nu+2)^2}$$

Interpretación: El proceso puede ser visto como un *modelo de Wright-Fisher con sólo efectos de mutación y con killing*. El comportamiento en los puntos frontera puede ser analizado en términos del parámetro $\nu \geq 0$. En efecto, 0 y 1 son bordes *regulares* si $0 \leq \nu < 1/2$, mientras que son de *entrada* si $\nu \geq 1/2$. Cuando el proceso está cerca de 0 o 1, entonces con mucha probabilidad el proceso se detiene (muere), mientras que si la trayectoria está cerca de $1/2$ le llevará más tiempo en detenerse.



2. **Un proceso de difusión cambiante:** Las funciones matriciales $Q_{n,1}$ son autofunciones del operador diferencial de segundo orden ($\nu \geq 0$)

$$\mathcal{D}_1 = y(1-y)\partial_y^2 + \begin{pmatrix} (\nu + 1/2)(1-2y) & 0 \\ 0 & (\nu + 3/2)(1-2y) - \frac{1}{1-2y} \end{pmatrix} \partial_y \\ + \frac{1}{2y(1-y)} \begin{pmatrix} -\nu(1-2y)^2 & \nu(1-2y)^2 \\ 1+\nu & -(1+\nu) \end{pmatrix}$$

con autovalor

$$\Lambda_{n,1} = \begin{pmatrix} -1 - n(n+2\nu+2) & 0 \\ 0 & -n(n+2\nu+2) \end{pmatrix}, \quad n \geq 0$$

y matriz peso

$$W_1(y) = \frac{4^{\nu-1}(2+\nu)[y(1-y)]^{\nu-1/2}}{\nu+1/2} \begin{pmatrix} 1+\nu & 0 \\ 0 & \nu(1-2y)^2 \end{pmatrix}$$

La matriz de transiciones de densidades viene dada por

$$P(t; x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_{n,1}(x) \Pi_n e^{\Lambda_{n,1} t} Q_{n,1}^*(y) W_1(y)$$

$$\Pi_n^{-1} = \|Q_{n,1}^*\|_{W_1}^2 = \pi_n^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\nu(n+\nu+2)}{(\nu+1)(n+\nu)} \end{pmatrix}$$

2. **Un proceso de difusión cambiante:** Las funciones matriciales $Q_{n,1}$ son autofunciones del operador diferencial de segundo orden ($\nu \geq 0$)

$$\mathcal{D}_1 = y(1-y)\partial_y^2 + \begin{pmatrix} (\nu + 1/2)(1-2y) & 0 \\ 0 & (\nu + 3/2)(1-2y) - \frac{1}{1-2y} \end{pmatrix} \partial_y \\ + \frac{1}{2y(1-y)} \begin{pmatrix} -\nu(1-2y)^2 & \nu(1-2y)^2 \\ 1+\nu & -(1+\nu) \end{pmatrix}$$

con autovalor

$$\Lambda_{n,1} = \begin{pmatrix} -1 - n(n+2\nu+2) & 0 \\ 0 & -n(n+2\nu+2) \end{pmatrix}, \quad n \geq 0$$

y matriz peso

$$W_1(y) = \frac{4^{\nu-1}(2+\nu)[y(1-y)]^{\nu-1/2}}{\nu+1/2} \begin{pmatrix} 1+\nu & 0 \\ 0 & \nu(1-2y)^2 \end{pmatrix}$$

La matriz de transiciones de densidades viene dada por

$$P(t; x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_{n,1}(x) \Pi_n e^{\Lambda_{n,1} t} Q_{n,1}^*(y) W_1(y)$$

$$\Pi_n^{-1} = \|Q_{n,1}^*\|_{W_1}^2 = \pi_n^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\nu(n+\nu+2)}{(\nu+1)(n+\nu)} \end{pmatrix}$$

Propiedades probabilísticas:

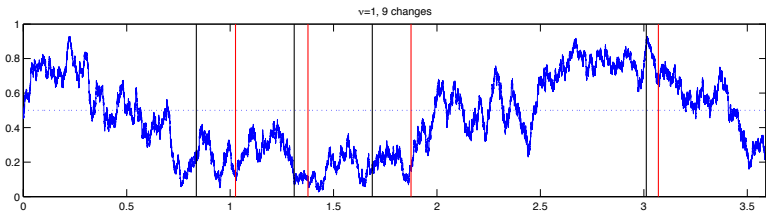
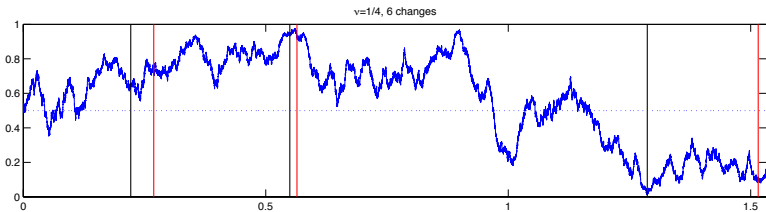
- 0 y 1 son bordes *regulares* si $0 \leq \nu < 1/2$, mientras que son de *entrada* si $\nu \geq 1/2$. La **diferencia importante** ahora es que en la segunda fase el coeficiente de deriva tiende a ∞ si $y = 1/2$. En este caso se tiene que si nos aproximamos a $1/2$ (por la derecha o por la izquierda) entonces este borde **siempre** es de *entrada*.
- Si el proceso está cerca de 0 o 1, entonces los coeficientes diagonales de $Q(y)$ son muy grandes, significando que todas las fases son **instantáneas**. Se observa también que si el proceso está cerca de $1/2$ entonces la entrada $(1, 1)$ de $Q(y)$ es muy pequeña, significando que la fase 1 es **absorbente**.
- El proceso tiende a estar más tiempo en la fase 1 que en la fase 2.

Interpretación: El proceso puede ser visto como una *variante del modelo de Wright-Fisher model con sólo efectos de mutación y con dos fases*. El comportamiento cerca de 0 y 1 es el mismo, pero en este caso, mientras que el proceso esté en la fase 2, empezando en un punto de $[0, 1/2)$, hay una fuerza bloqueando el paso a través del umbral localizado en $1/2$ (igual si el punto interior está en $(1/2, 1]$). Si el proceso está en la fase 1 entonces se puede mover a lo largo de cualquier punto del espacio de estados $[0, 1]$ sin ninguna restricción en el punto $1/2$.

Propiedades probabilísticas:

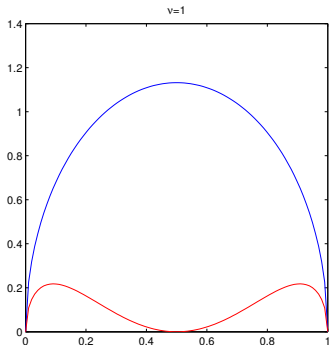
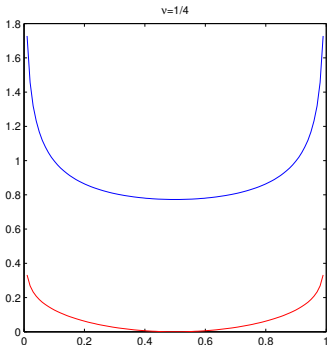
- 0 y 1 son bordes *regulares* si $0 \leq \nu < 1/2$, mientras que son de *entrada* si $\nu \geq 1/2$. La **diferencia importante** ahora es que en la segunda fase el coeficiente de deriva tiende a ∞ si $y = 1/2$. En este caso se tiene que si nos aproximamos a $1/2$ (por la derecha o por la izquierda) entonces este borde **siempre** es de *entrada*.
- Si el proceso está cerca de 0 o 1, entonces los coeficientes diagonales de $Q(y)$ son muy grandes, significando que todas las fases son **instantáneas**. Se observa también que si el proceso está cerca de $1/2$ entonces la entrada $(1, 1)$ de $Q(y)$ es muy pequeña, significando que la fase 1 es **absorbente**.
- El proceso tiende a estar más tiempo en la fase 1 que en la fase 2.

Interpretación: El proceso puede ser visto como una *variante del modelo de Wright-Fisher model con sólo efectos de mutación y con dos fases*. El comportamiento cerca de 0 y 1 es el mismo, pero en este caso, mientras que el proceso esté en la fase 2, empezando en un punto de $[0, 1/2)$, hay una fuerza bloqueando el paso a través del umbral localizado en $1/2$ (igual si el punto interior está en $(1/2, 1]$). Si el proceso está en la fase 1 entonces se puede mover a lo largo de cualquier punto del espacio de estados $[0, 1]$ sin ninguna restricción en el punto $1/2$.



El **vector distribución invariante** (cuando existe) viene dado por

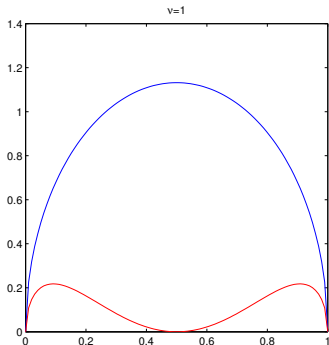
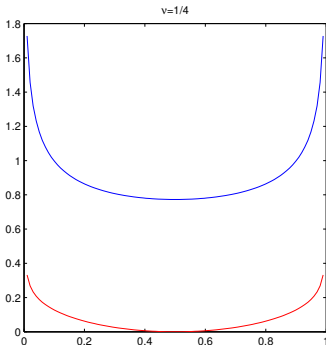
$$\psi(y) = \frac{4^\nu \Gamma(\nu + 2) [y(1 - y)]^{\nu - 1/2}}{\sqrt{\pi} (2 + \nu) \Gamma(\nu + 3/2)} (1 + \nu, \nu(1 - 2y)^2)$$



También estudiamos el caso $\ell = 2, N = 5$, en cuyo caso se producen dos modelos. El primero es un proceso de difusión cambiante con 3 fases (similar al mostrado aquí). El segundo modelo es un proceso de difusión cambiante con 2 fases con **killing** en una de las fases. Este fenómeno parece ser nuevo en el contexto de análisis espectral de procesos de Markov bivariados.

El **vector distribución invariante** (cuando existe) viene dado por

$$\psi(y) = \frac{4^\nu \Gamma(\nu + 2) [y(1 - y)]^{\nu - 1/2}}{\sqrt{\pi} (2 + \nu) \Gamma(\nu + 3/2)} (1 + \nu, \nu(1 - 2y)^2)$$



También estudiamos el caso $\ell = 2, N = 5$, en cuyo caso se producen dos modelos. El primero es un proceso de difusión cambiante con **3** fases (similar al mostrado aquí). El segundo modelo es un proceso de difusión cambiante con 2 fases con **killing** en una de las fases. Este fenómeno parece ser nuevo en el contexto de análisis espectral de procesos de Markov bivariados.