Propiedades diferenciales de familias de polinomios ortogonales matriciales y aplicaciones

Manuel Domínguez de la Iglesia

Departamento de Análisis Matemático. Universidad de Sevilla

Sevilla, 21 de febrero de 2008

Contenido

Introducción

Aportaciones originales:

- Poner de manifiesto nuevos fenómenos
- Desarrollo de nuevos métodos y ejemplos
- Aplicaciones: teoría de probabilidades

Contenido

Introducción

Aportaciones originales:

- Poner de manifiesto nuevos fenómenos
- Desarrollo de nuevos métodos y ejemplos
- Aplicaciones: teoría de probabilidades

Introducción

Familias clásicas

Hermite: $\rho(t) = e^{-t^2}$, $t \in (-\infty, \infty)$:

$$H_n(t)'' - 2tH_n(t)' = -2nH_n(t)$$

Laguerre: $\rho(t) = t^{\alpha}e^{-t}$, $\alpha > -1$, $t \in (0, \infty)$:

$$tL_n^{\alpha}(t)'' + (\alpha + 1 - t)L_n^{\alpha}(t)' = -nL_n^{\alpha}(t)$$

Jacobi: $\rho(t) = t^{\alpha}(1-t)^{\beta}$, $\alpha, \beta > -1$, $t \in (0, 1)$:

$$t(1-t)P_n^{(\alpha,\beta)}(t)'' + (\alpha + 1 - (\alpha + \beta + 2)t)P_n^{(\alpha,\beta)}(t)' =$$

$$-n(n + \alpha + \beta + 1)P_n^{(\alpha,\beta)}(t)$$

Aplicaciones:

- Modelización de sistemas cuánticos (no relativistas).
- Equilibrio electrostático (potencial logarítmico).

Familias clásicas

Hermite: $\rho(t) = e^{-t^2}$, $t \in (-\infty, \infty)$:

$$H_n(t)'' - 2tH_n(t)' = -2nH_n(t)$$

Laguerre: $\rho(t) = t^\alpha e^{-t}$, $\alpha > -1$, $t \in (0, \infty)$:

$$tL_n^\alpha(t)'' + (\alpha + 1 - t)L_n^\alpha(t)' = -nL_n^\alpha(t)$$

Jacobi: $\rho(t) = t^\alpha(1-t)^\beta$, $\alpha, \beta > -1$, $t \in (0, 1)$:

$$t(1-t)P_n^{(\alpha,\beta)}(t)'' + (\alpha + 1 - (\alpha + \beta + 2)t)P_n^{(\alpha,\beta)}(t)' =$$

$$-n(n + \alpha + \beta + 1)P_n^{(\alpha,\beta)}(t)$$

Aplicaciones:

- Modelización de sistemas cuánticos (no relativistas).
- Equilibrio electrostático (potencial logarítmico).

Familias clásicas

Hermite: $\rho(t) = e^{-t^2}$, $t \in (-\infty, \infty)$:

$$H_n(t)'' - 2tH_n(t)' = -2nH_n(t)$$

Laguerre: $\rho(t) = t^\alpha e^{-t}$, $\alpha > -1$, $t \in (0, \infty)$:

$$tL_n^\alpha(t)'' + (\alpha + 1 - t)L_n^\alpha(t)' = -nL_n^\alpha(t)$$

Jacobi: $\rho(t) = t^\alpha (1-t)^\beta$, $\alpha, \beta > -1$, $t \in (0, 1)$:

$$t(1-t)P_n^{(\alpha,\beta)}(t)'' + (\alpha + 1 - (\alpha + \beta + 2)t)P_n^{(\alpha,\beta)}(t)' =$$

$$-n(n + \alpha + \beta + 1)P_n^{(\alpha,\beta)}(t)$$

Aplicaciones:

- Modelización de sistemas cuánticos (no relativistas).
- Equilibrio electrostático (potencial logarítmico).

Familias clásicas

Hermite: $\rho(t) = e^{-t^2}$, $t \in (-\infty, \infty)$:

$$H_n(t)'' - 2tH_n(t)' = -2nH_n(t)$$

Laguerre: $\rho(t) = t^{\alpha}e^{-t}$, $\alpha > -1$, $t \in (0, \infty)$:

$$tL_n^{\alpha}(t)'' + (\alpha + 1 - t)L_n^{\alpha}(t)' = -nL_n^{\alpha}(t)$$

Jacobi: $\rho(t) = t^{\alpha}(1-t)^{\beta}$, $\alpha, \beta > -1$, $t \in (0, 1)$:

$$t(1-t)P_n^{(\alpha,\beta)}(t)'' + (\alpha + 1 - (\alpha + \beta + 2)t)P_n^{(\alpha,\beta)}(t)' =$$

$$-n(n + \alpha + \beta + 1)P_n^{(\alpha,\beta)}(t)$$

Aplicaciones:

- Modelización de sistemas cuánticos (no relativistas).
- Equilibrio electrostático (potencial logarítmico).

Familias clásicas

Hermite: $\rho(t) = e^{-t^2}$, $t \in (-\infty, \infty)$:

$$H_n(t)'' - 2tH_n(t)' = -2nH_n(t)$$

Laguerre: $\rho(t) = t^\alpha e^{-t}$, $\alpha > -1$, $t \in (0, \infty)$:

$$tL_n^\alpha(t)'' + (\alpha + 1 - t)L_n^\alpha(t)' = -nL_n^\alpha(t)$$

Jacobi: $\rho(t) = t^\alpha(1-t)^\beta$, $\alpha, \beta > -1$, $t \in (0, 1)$:

$$t(1-t)P_n^{(\alpha,\beta)}(t)'' + (\alpha + 1 - (\alpha + \beta + 2)t)P_n^{(\alpha,\beta)}(t)' =$$

$$-n(n + \alpha + \beta + 1)P_n^{(\alpha,\beta)}(t)$$

Aplicaciones:

- Modelización de sistemas cuánticos (no relativistas).
- Equilibrio electrostático (potencial logarítmico).

Familias clásicas

Hermite: $\rho(t) = e^{-t^2}$, $t \in (-\infty, \infty)$:

$$H_n(t)'' - 2tH_n(t)' = -2nH_n(t)$$

Laguerre: $\rho(t) = t^\alpha e^{-t}$, $\alpha > -1$, $t \in (0, \infty)$:

$$tL_n^\alpha(t)'' + (\alpha + 1 - t)L_n^\alpha(t)' = -nL_n^\alpha(t)$$

Jacobi: $\rho(t) = t^\alpha(1-t)^\beta$, $\alpha, \beta > -1$, $t \in (0, 1)$:

$$t(1-t)P_n^{(\alpha,\beta)}(t)'' + (\alpha + 1 - (\alpha + \beta + 2)t)P_n^{(\alpha,\beta)}(t)' =$$
$$-n(n + \alpha + \beta + 1)P_n^{(\alpha,\beta)}(t)$$

Aplicaciones:

- Modelización de sistemas cuánticos (no relativistas).
- Equilibrio electrostático (potencial logarítmico).

Familias clásicas

Hermite: $\rho(t) = e^{-t^2}$, $t \in (-\infty, \infty)$:

$$H_n(t)'' - 2tH_n(t)' = -2nH_n(t)$$

Laguerre: $\rho(t) = t^\alpha e^{-t}$, $\alpha > -1$, $t \in (0, \infty)$:

$$tL_n^\alpha(t)'' + (\alpha + 1 - t)L_n^\alpha(t)' = -nL_n^\alpha(t)$$

Jacobi: $\rho(t) = t^\alpha(1-t)^\beta$, $\alpha, \beta > -1$, $t \in (0, 1)$:

$$t(1-t)P_n^{(\alpha,\beta)}(t)'' + (\alpha + 1 - (\alpha + \beta + 2)t)P_n^{(\alpha,\beta)}(t)' =$$

$$-n(n + \alpha + \beta + 1)P_n^{(\alpha,\beta)}(t)$$

Aplicaciones:

- Modelización de sistemas cuánticos (no relativistas).
- Equilibrio electrostático (potencial logarítmico).

Bochner (1929): caracterizar $(p_n)_n$ verificando

$$(c_2t^2 + c_1 t + c_0)p_n''(t) + (d_1 t + d_0)p_n'(t) = \lambda_n p_n(t)$$

$\Rightarrow$ Polinomios de Hermite, Laguerre y Jacobi (Bessel)

La ortonormalidad de $(p_n)_n$ con respecto a una medida positiva ρ

$$\langle p_n, p_m \rangle_\rho = \int_{\mathbb{R}} p_n(t)p_m(t)d\rho(t) = \delta_{nm}, \quad n, m \geqslant 0$$

se caracteriza en términos de una relación de recurrencia a tres términos

$$tp_n(t) = a_{n+1}p_{n+1}(t) + b_n p_n(t) + a_n p_{n-1}(t), \quad a_{n+1} \neq 0, \quad b_n \in \mathbb{R} \quad n \geqslant 0$$

Operador de Jacobi tridiagonal:

$$t\begin{pmatrix} p_0(t) \\ p_1(t) \\ p_2(t) \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 & a_1 & & & \\ a_1 & b_1 & a_2 & & \\ & a_2 & b_2 & a_3 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0(t) \\ p_1(t) \\ p_2(t) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Bochner (1929): caracterizar $(p_n)_n$ verificando

$$(c_2 t^2 + c_1 t + c_0) p_n''(t) + (d_1 t + d_0) p_n'(t) = \lambda_n p_n(t)$$

$\Rightarrow$ Polinomios de Hermite, Laguerre y Jacobi (Bessel)
La ortonormalidad de $(p_n)_n$ con respecto a una medida positiva ρ

$$\langle p_n, p_m \rangle_\rho = \int_{\mathbb{R}} p_n(t) p_m(t) d\rho(t) = \delta_{nm}, \quad n, m \geqslant 0$$

se caracteriza en términos de una relación de recurrencia a tres términos

$$t p_n(t) = a_{n+1} p_{n+1}(t) + b_n p_n(t) + a_n p_{n-1}(t), \quad a_{n+1} \neq 0, \quad b_n \in \mathbb{R} \quad n \geqslant 0$$

Operador de Jacobi tridiagonal:

$$t \begin{pmatrix} p_0(t) \\ p_1(t) \\ p_2(t) \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 & a_1 & & & \\ a_1 & b_1 & a_2 & & \\ & a_2 & b_2 & a_3 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0(t) \\ p_1(t) \\ p_2(t) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Bochner (1929): caracterizar $(p_n)_n$ verificando

$$(c_2t^2 + c_1t + c_0)p_n''(t) + (d_1t + d_0)p_n'(t) = \lambda_n p_n(t)$$

$\Rightarrow$ Polinomios de Hermite, Laguerre y Jacobi (Bessel)
La ortonormalidad de $(p_n)_n$ con respecto a una medida positiva ρ

$$\langle p_n, p_m\rangle_\rho = \int_{\mathbb{R}} p_n(t)p_m(t)d\rho(t) = \delta_{nm}, \quad n, m \geqslant 0$$

se caracteriza en términos de una relación de recurrencia a tres términos

$$tp_n(t) = a_{n+1}p_{n+1}(t) + b_np_n(t) + a_np_{n-1}(t), \quad a_{n+1} \neq 0, \quad b_n \in \mathbb{R} \quad n \geqslant 0$$

Operador de Jacobi tridiagonal:

$$t\begin{pmatrix} p_0(t) \\ p_1(t) \\ p_2(t) \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 & a_1 & & & \\ a_1 & b_1 & a_2 & & \\ & a_2 & b_2 & a_3 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0(t) \\ p_1(t) \\ p_2(t) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Caso matricial

Krein (1949): polinomios ortogonales matriciales (POM)
Ortogonalidad: peso matricial W (definido positivo)
Producto interno a valores matriciales:

$$\langle P, Q \rangle_W = \int_{\mathbb{R}} P(t) dW(t) Q^*(t), \quad P, Q \quad \text{pol. mat.}$$

- $dW(t) = W(t)dt + M\delta_{t_0}(t)$
- Un peso matricial $W_1(t)$ se reduce a pesos escalares si existe una matriz no singular (independiente de t) T tal que $W_1(t) = TW_2(t)T^*$ con $W_2(t)$ diagonal.

Caso matricial

Krein (1949): polinomios ortogonales matriciales (POM)

Ortogonalidad: peso matricial W (definido positivo)

Producto interno a valores matriciales:

$$\langle P, Q\rangle_W = \int_{\mathbb{R}} P(t)dW(t)Q^*(t), \quad P, Q \quad \text{pol. mat.}$$

- $dW(t) = W(t)dt \in M_N(\mathbb{R})$
- Un peso matricial $W_1(t)$ se reduce a pesos escalares si existe una matriz no singular (independiente de t) T tal que $W_1(t) = TW_2(t)T^*$ con $W_2(t)$ diagonal.

Caso matricial

Krein (1949): polinomios ortogonales matriciales (POM)
Ortogonalidad: peso matricial W (definido positivo)
Producto interno a valores matriciales:

$$\langle P, Q \rangle_W = \int_{\mathbb{R}} P(t) dW(t) Q^*(t), \quad P, Q \quad \text{pol. mat.}$$

- $dW(t) = W(t)dt + M\delta_{t_0}(t)$
- Un peso matricial $W_1(t)$ se reduce a pesos escalares si existe una matriz no singular (independiente de t) T tal que $W_1(t) = TW_2(t)T^*$ con $W_2(t)$ diagonal.

Caso matricial

Krein (1949): polinomios ortogonales matriciales (POM)
Ortogonalidad: peso matricial W (definido positivo)
Producto interno a valores matriciales:

$$\langle P, Q \rangle_W = \int_{\mathbb{R}} P(t) dW(t) Q^*(t), \quad P, Q \quad \text{pol. mat.}$$

- $dW(t) = W(t)dt + M\delta_{t_0}(t)$.
- Un peso matricial $W_1(t)$ se reduce a pesos escalares si existe una matriz no singular (independiente de t) T tal que $W_1(t) = TW_2(t)T^*$ con $W_2(t)$ diagonal.

Caso matricial

Krein (1949): polinomios ortogonales matriciales (POM)
Ortogonalidad: peso matricial W (definido positivo)
Producto interno a valores matriciales:

$$\langle P, Q\rangle_W = \int_{\mathbb{R}} P(t)dW(t)Q^*(t), \quad P, Q \quad \text{pol. mat.}$$

- $dW(t) = W(t)dt + M\delta_{t_0}(t)$.
- Un peso matricial $W_1(t)$ se reduce a pesos escalares si existe una matriz no singular (independiente de t) T tal que $W_1(t) = TW_2(t)T^*$ con $W_2(t)$ diagonal.

Caso matricial

Krein (1949): polinomios ortogonales matriciales (POM)
Ortogonalidad: peso matricial W (definido positivo)
Producto interno a valores matriciales:

$$\langle P, Q\rangle_W = \int_{\mathbb{R}} P(t)dW(t)Q^*(t), \quad P, Q \quad \text{pol. mat.}$$

- $dW(t) = W(t)dt + M\delta_{t_0}(t)$.
- Un peso matricial $W_1(t)$ se reduce a pesos escalares si existe una matriz no singular (independiente de t) T tal que $W_1(t) = TW_2(t)T^*$ con $W_2(t)$ diagonal.

La ortonormalidad de $(P_n)_n$ con respecto a W

$$\langle P_n, P_m \rangle_W = \int_{\mathbb{R}} P_n(t) dW(t) P_m^*(t) = \delta_{nm} I, \quad n, m \geqslant 0$$

se caracteriza en términos de una relación de recurrencia a tres términos

$$tP_n(t) = A_{n+1} P_{n+1}(t) + B_n P_n(t) + A_n^* P_{n-1}(t), \quad n \geqslant 0$$
$$\det(A_{n+1}) \neq 0, \quad B_n = B_n^*$$

Operador de Jacobi tridiagonal por bloques

$$t \begin{pmatrix} P_0(t) \\ P_1(t) \\ P_2(t) \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_0 & A_1 & & & \\ A_1^* & B_1 & A_2 & & \\ & A_2^* & B_2 & A_3 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0(t) \\ P_1(t) \\ P_2(t) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

- Estudio sistemático en los últimos 20 años.

La ortonormalidad de $(P_n)_n$ con respecto a W

$$\langle P_n, P_m\rangle_W = \int_{\mathbb{R}} P_n(t)dW(t)P_m^*(t) = \delta_{nm}I, \quad n, m \geqslant 0$$

se caracteriza en términos de una relación de recurrencia a tres términos

$$tP_n(t) = A_{n+1}P_{n+1}(t) + B_nP_n(t) + A_n^*P_{n-1}(t), \quad n \geqslant 0$$
$$\det(A_{n+1}) \neq 0, \quad B_n = B_n^*$$

Operador de Jacobi tridiagonal por bloques

$$t\begin{pmatrix} P_0(t) \\ P_1(t) \\ P_2(t) \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_0 & A_1 & & & \\ A_1^* & B_1 & A_2 & & \\ & A_2^* & B_2 & A_3 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_0(t) \\ P_1(t) \\ P_2(t) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

- Estudio sistemático en los últimos 20 años.

La ortonormalidad de $(P_n)_n$ con respecto a W

$$\langle P_n, P_m \rangle_W = \int_{\mathbb{R}} P_n(t) dW(t) P_m^*(t) = \delta_{nm} I, \quad n, m \geqslant 0$$

se caracteriza en términos de una relación de recurrencia a tres términos

$$tP_n(t) = A_{n+1} P_{n+1}(t) + B_n P_n(t) + A_n^* P_{n-1}(t), \quad n \geqslant 0$$
$$\det(A_{n+1}) \neq 0, \quad B_n = B_n^*$$

Operador de Jacobi tridiagonal por bloques

$$t \begin{pmatrix} P_0(t) \\ P_1(t) \\ P_2(t) \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_0 & A_1 & & & \\ A_1^* & B_1 & A_2 & & \\ & A_2^* & B_2 & A_3 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0(t) \\ P_1(t) \\ P_2(t) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

- Estudio sistemático en los últimos 20 años.

Durán (1997): caracterizar $(P_n)_n$ ortonormales verificando

$$P_n''(t)F_2(t) + P_n'(t)F_1(t) + P_n(t)F_0(t) = \Lambda_n P_n(t), \quad n \geqslant 0$$

grad $F_i \leqslant i, \quad \Lambda_n$ hermíticos

Equivalente a la simetría de

$$D = \partial^2 F_2(t) + \partial^1 F_1(t) + \partial^1 F_0(t), \quad \partial = \frac{d}{dt}$$

con $\quad P_n D = \Lambda_n P_n$

D es simétrico con respecto a W si $\langle PD, Q\rangle_W = \langle P, QD\rangle_W$

No ha sido hasta muy recientemente cuando se han descubierto los primeros ejemplos: Grünbaum-Pacharoni-Tirao (2003) y Durán-Grünbaum (2004)

Durán (1997): caracterizar $(P_n)_n$ ortonormales verificando

$$P_n''(t)F_2(t) + P_n'(t)F_1(t) + P_n(t)F_0(t) = \Lambda_n P_n(t), \quad n \geqslant 0$$

grad $F_i \leqslant i$, $\quad \Lambda_n$ hermíticos

Equivalente a la simetría de

$$D = \partial^2 F_2(t) + \partial^1 F_1(t) + \partial^1 F_0(t), \quad \partial = \frac{d}{dt}$$

con $\quad P_n D = \Lambda_n P_n$

D es simétrico con respecto a W si $\langle PD, Q\rangle_W = \langle P, QD\rangle_W$

No ha sido hasta muy recientemente cuando se han descubierto los primeros ejemplos: Grünbaum-Pacharoni-Tirao (2003) y Durán-Grünbaum (2004)

Durán (1997): caracterizar $(P_n)_n$ ortonormales verificando

$$P_n''(t)F_2(t) + P_n'(t)F_1(t) + P_n(t)F_0(t) = \Lambda_n P_n(t), \quad n \geqslant 0$$

grad $F_i \leqslant i$, Λ_n hermíticos

Equivalente a la simetría de

$$D = \partial^2 F_2(t) + \partial^1 F_1(t) + \partial^1 F_0(t), \quad \partial = \frac{d}{dt}$$

con $P_n D = \Lambda_n P_n$

D es simétrico con respecto a W si $\langle PD, Q\rangle_W = \langle P, QD\rangle_W$

No ha sido hasta muy recientemente cuando se han descubierto los primeros ejemplos: Grünbaum-Pacharoni-Tirao (2003) y Durán-Grünbaum (2004)

Métodos para general ejemplos

- Funciones esféricas matriciales asociadas a $P_n(\mathbb{C}) = \mathrm{SU}(n+1)/\mathrm{U}(n)$ Grünbaum-Pacharoni-Tirao (2003)
- Durán-Grünbaum (2004):

Ecuaciones de simetría

$$F_2 W = W F_2^*$$

$$2(F_2 W)' = F_1 W + W F_1^*,$$

$$(F_2 W)'' - (F_1 W)' + F_0 W = W F_0^*$$

$$F_2(t) W(t), \quad (F_1(t) W(t) - W(t) F_1^*(t))$$

tienen límite cero en los extremos del soporte de W

Métodos para general ejemplos

- Funciones esféricas matriciales asociadas a $P_n(\mathbb{C}) = \mathrm{SU}(n+1)/\mathrm{U}(n)$ Grünbaum-Pacharoni-Tirao (2003)
- Durán-Grünbaum (2004):

Ecuaciones de simetría

$$F_2 W = W F_2^*$$

$$2(F_2 W)' = F_1 W + W F_1^*,$$

$$(F_2 W)'' - (F_1 W)' + F_0 W = W F_0^*$$

$$F_2(t)W(t), \quad (F_1(t)W(t) - W(t)F_1^*(t))$$

tienen límite cero en los extremos del soporte de W

Métodos para general ejemplos

- Funciones esféricas matriciales asociadas a $P_n(\mathbb{C}) = \mathrm{SU}(n+1)/\mathrm{U}(n)$ Grünbaum-Pacharoni-Tirao (2003)
- Durán-Grünbaum (2004):

Ecuaciones de simetría

$$F_2 W = W F_2^*$$

$$2(F_2 W)' = F_1 W + W F_1^*,$$

$$(F_2 W)'' - (F_1 W)' + F_0 W = W F_0^*$$

$$F_2(t)W(t), \quad (F_1(t)W(t) - W(t)F_1^*(t))$$

tienen límite cero en los extremos del soporte de W

Nuevos fenómenos

Para una familia fija de POM $(P_n)_n$ estudiamos el álgebra sobre $\mathbb{C}$

$$\mathcal{D}(W) = \left\{ D = \sum_{i=0}^{k} \partial^i F_i(t) : P_n D = \Lambda_n(D) P_n, \ n = 0, 1, 2, \dots \right\}$$

Caso escalar (Miranian, 2005): Si $\mathcal{F}$ es el operador diferencial de segundo orden de los polinomios clásicos (Hermite, Laguerre o Jacobi), entonces todo operador $\mathcal{U}$ tal que $\mathcal{U} p_n = \lambda_n p_n$

$$\mathcal{U} = \sum_{i=0}^{k} c_i \mathcal{F}^i, \quad c_i \in \mathbb{C}$$

$$\Rightarrow \mathcal{D}(\rho) \simeq \mathbb{C}[t]$$

Nuevos fenómenos

Para una familia fija de POM $(P_n)_n$ estudiamos el álgebra sobre $\mathbb{C}$

$$\mathcal{D}(W) = \left\{ D = \sum_{i=0}^{k} \partial^i F_i(t) : P_n D = \Lambda_n(D) P_n,\ n = 0, 1, 2, \ldots \right\}$$

Caso escalar (Miranian, 2005): Si $\mathcal{F}$ es el operador diferencial de segundo orden de los polinomios clásicos (Hermite, Laguerre o Jacobi), entonces todo operador $\mathcal{U}$ tal que $\mathcal{U}p_n = \lambda_n p_n$

$$\mathcal{U} = \sum_{i=0}^{k} c_i \mathcal{F}^i, \quad c_i \in \mathbb{C}$$

$$\Rightarrow \mathcal{D}(\rho) \simeq \mathbb{C}[t]$$

Nuevos fenómenos

Para una familia fija de POM $(P_n)_n$ estudiamos el álgebra sobre $\mathbb{C}$

$$\mathcal{D}(W) = \left\{ D = \sum_{i=0}^{k} \partial^i F_i(t) : P_n D = \Lambda_n(D) P_n, \; n = 0, 1, 2, \ldots \right\}$$

Caso escalar (Miranian, 2005): Si $\mathcal{F}$ es el operador diferencial de segundo orden de los polinomios clásicos (Hermite, Laguerre o Jacobi), entonces todo operador $\mathcal{U}$ tal que $\mathcal{U} p_n = \lambda_n p_n$

$$\mathcal{U} = \sum_{i=0}^{k} c_i \mathcal{F}^i, \quad c_i \in \mathbb{C}$$

$$\Rightarrow \mathcal{D}(\rho) \simeq \mathbb{C}[t]$$

Nuevos fenómenos

Origen: Existencia de varios operadores diferenciales linealmente independientes de segundo orden que tienen a una misma familia de POM como autofunciones.

- Funciones esféricas matriciales: Grünbaum-Pacharoni-Tirao (2002)
- Marco de POM: Grünbaum-Pacharoni-Tirao (2003)

Primer estudio del álgebra: Castro-Grünbaum (2006)
Otros autores:

- Op. dif.: Durán y López-Rodríguez (2006), Pacharoni-Román (2007)
- Álgebras: Grünbaum-MdI (2007), Durán-MdI (2008)

Álgebras: conjeturas, excepto una (Tirao) de Castro-Grünbaum (2006)
Propiedades (Grünbaum-Tirao, 2007):

- La aplicación $D \mapsto (\Lambda_n(D))_n$ es una *representación fiel*, i.e.
  - $\Lambda_n(D_1 D_2) = \Lambda_n(D_1)\Lambda_n(D_2)$
  - $\Lambda_n(D) = 0$ para todo n, entonces $D = 0$
- Para $D \in \mathcal{D}(W)$, existe $D^* \in \mathcal{D}(W)$ tal que $\langle PD, Q\rangle_W = \langle P, QD^*\rangle_W$
  $\Rightarrow \mathcal{D}(W) = \mathcal{S}(W) \oplus i\mathcal{S}(W)$

Nuevos fenómenos

Origen: Existencia de varios operadores diferenciales linealmente independientes de segundo orden que tienen a una misma familia de POM como autofunciones.

- Funciones esféricas matriciales: Grünbaum-Pacharoni-Tirao (2002)
- Marco de POM: Grünbaum-Pacharoni-Tirao (2003)

Primer estudio del álgebra: Castro-Grünbaum (2006)

Otros autores:

- Op. dif.: Durán y López-Rodríguez (2006), Pacharoni-Román (2007)
- Álgebras: Grünbaum-MdI (2007), Durán-MdI (2008)

Álgebras: conjeturas, excepto una (Tirao) de Castro-Grünbaum (2006)

Propiedades (Grünbaum-Tirao, 2007):

- La aplicación $D \mapsto (\Lambda_n(D))_n$ es una *representación fiel*, i.e.
  - $\Lambda_n(D_1 D_2) = \Lambda_n(D_1)\Lambda_n(D_2)$
  - $\Lambda_n(D) = 0$ para todo n, entonces $D = 0$
- Para $D \in \mathcal{D}(W)$, existe $D^* \in \mathcal{D}(W)$ tal que $\langle PD, Q\rangle_W = \langle P, QD^*\rangle_W$

  $\Rightarrow \mathcal{D}(W) = \mathcal{S}(W) \oplus \imath\mathcal{S}(W)$

Nuevos fenómenos

Origen: Existencia de varios operadores diferenciales linealmente independientes de segundo orden que tienen a una misma familia de POM como autofunciones.

- Funciones esféricas matriciales: Grünbaum-Pacharoni-Tirao (2002)
- Marco de POM: Grünbaum-Pacharoni-Tirao (2003)

Primer estudio del álgebra: Castro-Grünbaum (2006)

Otros autores:

- Op. dif.: Durán y López-Rodríguez (2006), Pacharoni-Román (2007)
- Álgebras: Grünbaum-MdI (2007), Durán-MdI (2008)

Álgebras: conjeturas, excepto una (Tirao) de Castro-Grünbaum (2006)

Propiedades (Grünbaum-Tirao, 2007):

- La aplicación $D \mapsto (\Lambda_n(D))_n$ es una *representación fiel*, i.e.
  - $\Lambda_n(D_1 D_2) = \Lambda_n(D_1)\Lambda_n(D_2)$
  - $\Lambda_n(D) = 0$ para todo n, entonces $D = 0$
- Para $D \in \mathcal{D}(W)$, existe $D^* \in \mathcal{D}(W)$ tal que $\langle PD, Q\rangle_W = \langle P, QD^*\rangle_W$
  $\Rightarrow \mathcal{D}(W) = \mathcal{S}(W) \oplus i\mathcal{S}(W)$

Nuevos fenómenos

Origen: Existencia de varios operadores diferenciales linealmente independientes de segundo orden que tienen a una misma familia de POM como autofunciones.

- Funciones esféricas matriciales: Grünbaum-Pacharoni-Tirao (2002)
- Marco de POM: Grünbaum-Pacharoni-Tirao (2003)

Primer estudio del álgebra: Castro-Grünbaum (2006)
Otros autores:

- Op. dif.: Durán y López-Rodríguez (2006), Pacharoni-Román (2007)
- Álgebras: Grünbaum-MdI (2007), Durán-MdI (2008)

Álgebras: conjeturas, excepto una (Tirao) de Castro-Grünbaum (2006)
Propiedades (Grünbaum-Tirao, 2007):

- La aplicación $D \mapsto (\Lambda_n(D))_n$ es una *representación fiel*, i.e.
  - $\Lambda_n(D_1D_2) = \Lambda_n(D_1)\Lambda_n(D_2)$
  - $\Lambda_n(D) = 0$ para todo n, entonces $D = 0$
- Para $D \in \mathcal{D}(W)$, existe $D^* \in \mathcal{D}(W)$ tal que $\langle PD, Q\rangle_W = \langle P, QD^*\rangle_W$

  $\Rightarrow \mathcal{D}(W) = \mathcal{S}(W) \oplus i\mathcal{S}(W)$

Nuevos fenómenos

Origen: Existencia de varios operadores diferenciales linealmente independientes de segundo orden que tienen a una misma familia de POM como autofunciones.

- Funciones esféricas matriciales: Grünbaum-Pacharoni-Tirao (2002)
- Marco de POM: Grünbaum-Pacharoni-Tirao (2003)

Primer estudio del álgebra: Castro-Grünbaum (2006)
Otros autores:

- Op. dif.: Durán y López-Rodríguez (2006), Pacharoni-Román (2007)
- Álgebras: Grünbaum-MdI (2007), Durán-MdI (2008)

Álgebras: conjeturas, excepto una (Tirao) de Castro-Grünbaum (2006)
Propiedades (Grünbaum-Tirao, 2007):

- La aplicación $D \mapsto (\Lambda_n(D))_n$ es una *representación fiel*, i.e.
  - $\Lambda_n(D_1 D_2) = \Lambda_n(D_1)\Lambda_n(D_2)$
  - $\Lambda_n(D) = 0$ para todo n, entonces $D = 0$
- Para $D \in \mathcal{D}(W)$, existe $D^* \in \mathcal{D}(W)$ tal que $\langle PD, Q\rangle_W = \langle P, QD^*\rangle_W$

  $\Rightarrow \mathcal{D}(W) = \mathcal{S}(W) \oplus i\mathcal{S}(W)$

Nuevos fenómenos

Origen: Existencia de varios operadores diferenciales linealmente independientes de segundo orden que tienen a una misma familia de POM como autofunciones.

- Funciones esféricas matriciales: Grünbaum-Pacharoni-Tirao (2002)
- Marco de POM: Grünbaum-Pacharoni-Tirao (2003)

Primer estudio del álgebra: Castro-Grünbaum (2006)
Otros autores:

- Op. dif.: Durán y López-Rodríguez (2006), Pacharoni-Román (2007)
- Álgebras: Grünbaum-MdI (2007), Durán-MdI (2008)

Álgebras: conjeturas, excepto una (Tirao) de Castro-Grünbaum (2006)
Propiedades (Grünbaum-Tirao, 2007):

- La aplicación $D \mapsto (\Lambda_n(D))_n$ es una *representación fiel*, i.e.
  - $\Lambda_n(D_1 D_2) = \Lambda_n(D_1)\Lambda_n(D_2)$
  - $\Lambda_n(D) = 0$ para todo n, entonces $D = 0$
- Para $D \in \mathcal{D}(W)$, existe $D^* \in \mathcal{D}(W)$ tal que $\langle PD, Q\rangle_W = \langle P, QD^*\rangle_W$
  $\Rightarrow \mathcal{D}(W) = \mathcal{S}(W) \oplus \imath\mathcal{S}(W)$

Nuevos fenómenos

Origen: Existencia de varios operadores diferenciales linealmente independientes de segundo orden que tienen a una misma familia de POM como autofunciones.

- Funciones esféricas matriciales: Grünbaum-Pacharoni-Tirao (2002)
- Marco de POM: Grünbaum-Pacharoni-Tirao (2003)

Primer estudio del álgebra: Castro-Grünbaum (2006)
Otros autores:

- Op. dif.: Durán y López-Rodríguez (2006), Pacharoni-Román (2007)
- Álgebras: Grünbaum-MdI (2007), Durán-MdI (2008)

Álgebras: conjeturas, excepto una (Tirao) de Castro-Grünbaum (2006)
Propiedades (Grünbaum-Tirao, 2007):

- La aplicación $D \mapsto (\Lambda_n(D))_n$ es una *representación fiel*, i.e.
  - $\Lambda_n(D_1 D_2) = \Lambda_n(D_1)\Lambda_n(D_2)$
  - $\Lambda_n(D) = 0$ para todo n, entonces $D = 0$
- Para $D \in \mathcal{D}(W)$, existe $D^* \in \mathcal{D}(W)$ tal que $\langle PD, Q\rangle_W = \langle P, QD^*\rangle_W$ $\Rightarrow \mathcal{D}(W) = \mathcal{S}(W) \oplus \imath\mathcal{S}(W)$

Nuevos fenómenos

Origen: Existencia de varios operadores diferenciales linealmente independientes de segundo orden que tienen a una misma familia de POM como autofunciones.

- Funciones esféricas matriciales: Grünbaum-Pacharoni-Tirao (2002)
- Marco de POM: Grünbaum-Pacharoni-Tirao (2003)

Primer estudio del álgebra: Castro-Grünbaum (2006)
Otros autores:

- Op. dif.: Durán y López-Rodríguez (2006), Pacharoni-Román (2007)
- Álgebras: Grünbaum-MdI (2007), Durán-MdI (2008)

Álgebras: conjeturas, excepto una (Tirao) de Castro-Grünbaum (2006)
Propiedades (Grünbaum-Tirao, 2007):

- La aplicación $D \mapsto (\Lambda_n(D))_n$ es una *representación fiel*, i.e.
  - $\Lambda_n(D_1 D_2) = \Lambda_n(D_1)\Lambda_n(D_2)$
  - $\Lambda_n(D) = 0$ para todo n, entonces $D = 0$
- Para $D \in \mathcal{D}(W)$, existe $D^* \in \mathcal{D}(W)$ tal que $\langle PD, Q\rangle_W = \langle P, QD^*\rangle_W$
  $\Rightarrow \mathcal{D}(W) = \mathcal{S}(W) \oplus \imath\mathcal{S}(W)$

Aportaciones originales

1. Nuevos fenómenos:
   - Familias distintas de POM (mónicos) que comparten un mismo operador diferencial de segundo orden.
   - Existencia de familias de POM verificando ecuaciones diferenciales de orden impar (no reducibles a escalares).
2. Nuevos métodos y familias de POM verificando ecuaciones diferenciales de segundo orden.
3. Ecuaciones de simetría para operadores diferenciales de orden genérico.
4. Nuevas aportaciones a otros fenómenos:
   - Varios operadores diferenciales linealmente independientes de segundo orden que tienen a una misma familia de POM como autofunciones.
   - Álgebra de operadores diferenciales.
5. Aplicaciones: una familia de procesos *quasi-birth-and-death*.

Aportaciones originales

1. Nuevos fenómenos:
   - Familias distintas de POM (mónicos) que comparten un mismo operador diferencial de segundo orden.
   - Existencia de familias de POM verificando ecuaciones diferenciales de orden impar (no reducibles a escalares).
2. Nuevos métodos y familias de POM verificando ecuaciones diferenciales de segundo orden.
3. Ecuaciones de simetría para operadores diferenciales de orden genérico.
4. Nuevas aportaciones a otros fenómenos:
   - Varios operadores diferenciales linealmente independientes de segundo orden que tienen a una misma familia de POM como autofunciones.
   - Álgebra de operadores diferenciales.
5. Aplicaciones: una familia de procesos *quasi-birth-and-death*.

Aportaciones originales

1. Nuevos fenómenos:
   - Familias distintas de POM (mónicos) que comparten un mismo operador diferencial de segundo orden.
   - Existencia de familias de POM verificando ecuaciones diferenciales de orden impar (no reducibles a escalares).
2. Nuevos métodos y familias de POM verificando ecuaciones diferenciales de segundo orden.
3. Ecuaciones de simetría para operadores diferenciales de orden genérico.
4. Nuevas aportaciones a otros fenómenos:
   - Varios operadores diferenciales linealmente independientes de segundo orden que tienen a una misma familia de POM como autofunciones.
   - Álgebra de operadores diferenciales.
5. Aplicaciones: una familia de procesos *quasi-birth-and-death*.

Aportaciones originales

1. Nuevos fenómenos:
   - Familias distintas de POM (mónicos) que comparten un mismo operador diferencial de segundo orden.
   - Existencia de familias de POM verificando ecuaciones diferenciales de orden impar (no reducibles a escalares).
2. Nuevos métodos y familias de POM verificando ecuaciones diferenciales de segundo orden.
3. Ecuaciones de simetría para operadores diferenciales de orden genérico.
4. Nuevas aportaciones a otros fenómenos:
   - Varios operadores diferenciales linealmente independientes de segundo orden que tienen a una misma familia de POM como autofunciones.
   - Álgebra de operadores diferenciales.
5. Aplicaciones: una familia de procesos *quasi-birth-and-death*.

Aportaciones originales

1. Nuevos fenómenos:
   - Familias distintas de POM (mónicos) que comparten un mismo operador diferencial de segundo orden.
   - Existencia de familias de POM verificando ecuaciones diferenciales de orden impar (no reducibles a escalares).
2. Nuevos métodos y familias de POM verificando ecuaciones diferenciales de segundo orden.
3. Ecuaciones de simetría para operadores diferenciales de orden genérico.
4. Nuevas aportaciones a otros fenómenos:
   - Varios operadores diferenciales linealmente independientes de segundo orden que tienen a una misma familia de POM como autofunciones.
   - Álgebra de operadores diferenciales.
5. Aplicaciones: una familia de procesos *quasi-birth-and-death*.

Aportaciones originales

1. Nuevos fenómenos:
   - Familias distintas de POM (mónicos) que comparten un mismo operador diferencial de segundo orden.
   - Existencia de familias de POM verificando ecuaciones diferenciales de orden impar (no reducibles a escalares).
2. Nuevos métodos y familias de POM verificando ecuaciones diferenciales de segundo orden.
3. Ecuaciones de simetría para operadores diferenciales de orden genérico.
4. Nuevas aportaciones a otros fenómenos:
   - Varios operadores diferenciales linealmente independientes de segundo orden que tienen a una misma familia de POM como autofunciones.
   - Álgebra de operadores diferenciales.
5. Aplicaciones: una familia de procesos *quasi-birth-and-death*.

Aportaciones originales

1. Nuevos fenómenos:
   - Familias distintas de POM (mónicos) que comparten un mismo operador diferencial de segundo orden.
   - Existencia de familias de POM verificando ecuaciones diferenciales de orden impar (no reducibles a escalares).
2. Nuevos métodos y familias de POM verificando ecuaciones diferenciales de segundo orden.
3. Ecuaciones de simetría para operadores diferenciales de orden genérico.
4. Nuevas aportaciones a otros fenómenos:
   - Varios operadores diferenciales linealmente independientes de segundo orden que tienen a una misma familia de POM como autofunciones.
   - Álgebra de operadores diferenciales.
5. Aplicaciones: una familia de procesos *quasi-birth-and-death*.

Aportaciones originales

1. Nuevos fenómenos:
   - Familias distintas de POM (mónicos) que comparten un mismo operador diferencial de segundo orden.
   - Existencia de familias de POM verificando ecuaciones diferenciales de orden impar (no reducibles a escalares).
2. Nuevos métodos y familias de POM verificando ecuaciones diferenciales de segundo orden.
3. Ecuaciones de simetría para operadores diferenciales de orden genérico.
4. Nuevas aportaciones a otros fenómenos:
   - Varios operadores diferenciales linealmente independientes de segundo orden que tienen a una misma familia de POM como autofunciones.
   - Álgebra de operadores diferenciales.
5. Aplicaciones: una familia de procesos *quasi-birth-and-death*.

Aportaciones originales

1. Nuevos fenómenos:
   - Familias distintas de POM (mónicos) que comparten un mismo operador diferencial de segundo orden.
   - Existencia de familias de POM verificando ecuaciones diferenciales de orden impar (no reducibles a escalares).
2. Nuevos métodos y familias de POM verificando ecuaciones diferenciales de segundo orden.
3. Ecuaciones de simetría para operadores diferenciales de orden genérico.
4. Nuevas aportaciones a otros fenómenos:
   - Varios operadores diferenciales linealmente independientes de segundo orden que tienen a una misma familia de POM como autofunciones.
   - Álgebra de operadores diferenciales.
5. Aplicaciones: una familia de procesos *quasi-birth-and-death*.

Aportaciones originales

1. Nuevos fenómenos:
   - Familias distintas de POM (mónicos) que comparten un mismo operador diferencial de segundo orden.
   - Existencia de familias de POM verificando ecuaciones diferenciales de orden impar (no reducibles a escalares).
2. Nuevos métodos y familias de POM verificando ecuaciones diferenciales de segundo orden.
3. Ecuaciones de simetría para operadores diferenciales de orden genérico.
4. Nuevas aportaciones a otros fenómenos:
   - Varios operadores diferenciales linealmente independientes de segundo orden que tienen a una misma familia de POM como autofunciones.
   - Álgebra de operadores diferenciales.
5. Aplicaciones: una familia de procesos *quasi-birth-and-death*.

Parte A

Operadores diferenciales simétricos con varias familias de POM como autofunciones

Objetivo

Situación dual a $\mathcal{D}(W)$: buscamos familias distintas de POM (mónicos) $(P_{n,\gamma})_n$ que sean autofunciones de un operador diferencial de segundo orden fijo D

$$P_{n,\gamma}D = \Gamma_n P_{n,\gamma}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

$P_{n,\gamma}$ ortogonales con respecto a $W + \gamma M(t_0)\delta_{t_0}, \quad \gamma \geqslant 0$

Caso escalar $(\rho + m\delta_{t_0})$

- Segundo orden: no aparecen operadores diferenciales simétricos.
- Cuarto orden: t_0 en la frontera del soporte, en cuyo caso no es simétrico con respecto al antiguo peso (Krall, 1941):

$$\text{Tipo Laguerre } e^{-t} + M\delta_0$$
$$\text{Tipo Legendre } 1 + M(\delta_{-1} + \delta_1)$$
$$\text{Tipo Jacobi } (1-t)^{\alpha} + M\delta_0$$

Objetivo

Situación dual a $\mathcal{D}(W)$: buscamos familias distintas de POM (mónicos) $(P_{n,\gamma})_n$ que sean autofunciones de un operador diferencial de segundo orden fijo D

$$P_{n,\gamma} D = \Gamma_n P_{n,\gamma}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

$P_{n,\gamma}$ ortogonales con respecto a $W + \gamma M(t_0)\delta_{t_0}, \quad \gamma \geqslant 0$

Caso escalar $(\rho + m\delta_{t_0})$

- Segundo orden: no aparecen operadores diferenciales simétricos.
- Cuarto orden: t_0 en la frontera del soporte, en cuyo caso no es simétrico con respecto al antiguo peso (Krall, 1941):

$$\text{Tipo Laguerre } e^{-t} + M\delta_0$$
$$\text{Tipo Legendre } 1 + M(\delta_{-1} + \delta_1)$$
$$\text{Tipo Jacobi } (1-t)^{\alpha} + M\delta_0$$

Objetivo

Situación dual a $\mathcal{D}(W)$: buscamos familias distintas de POM (mónicos) $(P_{n,\gamma})_n$ que sean autofunciones de un operador diferencial de segundo orden fijo D

$$P_{n,\gamma} D = \Gamma_n P_{n,\gamma}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

$$P_{n,\gamma} \text{ ortogonales con respecto a } W + \gamma M(t_0)\delta_{t_0}, \quad \gamma \geqslant 0$$

Caso escalar $(\rho + m\delta_{t_0})$

- Segundo orden: no aparecen operadores diferenciales simétricos.
- Cuarto orden: t_0 en la frontera del soporte, en cuyo caso no es simétrico con respecto al antiguo peso (Krall, 1941):

$$\text{Tipo Laguerre } e^{-t} + M\delta_0$$
$$\text{Tipo Legendre } 1 + M(\delta_{-1} + \delta_1)$$
$$\text{Tipo Jacobi } (1-t)^{\alpha} + M\delta_0$$

Objetivo

Situación dual a $\mathcal{D}(W)$: buscamos familias distintas de POM (mónicos) $(P_{n,\gamma})_n$ que sean autofunciones de un operador diferencial de segundo orden fijo D

$$P_{n,\gamma}D = \Gamma_n P_{n,\gamma}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

$$P_{n,\gamma} \text{ ortogonales con respecto a } W + \gamma M(t_0)\delta_{t_0}, \quad \gamma \geqslant 0$$

Caso escalar $(\rho + m\delta_{t_0})$

- Segundo orden: no aparecen operadores diferenciales simétricos.
- Cuarto orden: t_0 en la frontera del soporte, en cuyo caso no es simétrico con respecto al antiguo peso (Krall, 1941):

$$\text{Tipo Laguerre } e^{-t} + M\delta_0$$
$$\text{Tipo Legendre } 1 + M(\delta_{-1} + \delta_1)$$
$$\text{Tipo Jacobi } (1-t)^{\alpha} + M\delta_0$$

Objetivo

Situación dual a $\mathcal{D}(W)$: buscamos familias distintas de POM (mónicos) $(P_{n,\gamma})_n$ que sean autofunciones de un operador diferencial de segundo orden fijo D

$$P_{n,\gamma} D = \Gamma_n P_{n,\gamma}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

$$P_{n,\gamma} \text{ ortogonales con respecto a } W + \gamma M(t_0)\delta_{t_0}, \quad \gamma \geqslant 0$$

Caso escalar $(\rho + m\delta_{t_0})$

- Segundo orden: no aparecen operadores diferenciales simétricos.
- Cuarto orden: t_0 en la frontera del soporte, en cuyo caso no es simétrico con respecto al antiguo peso (Krall, 1941):

$$\text{Tipo Laguerre } e^{-t} + M\delta_0$$
$$\text{Tipo Legendre } 1 + M(\delta_{-1} + \delta_1)$$
$$\text{Tipo Jacobi } (1-t)^{\alpha} + M\delta_0$$

Método para encontrar ejemplos

Teorema

Sea W *un peso matricial y* $D = \sum_{i=0}^{k} \partial^i F_i(t)$ *un operador diferencial de orden* k*. Supongamos que, asociado al punto* $t_0 \in \mathbb{R}$*, existe una matriz semidefinida positiva (hermítica)* $M(t_0)$ *tal que*

$$F_j(t_0)M(t_0) = 0, \quad j = 1, \dots, k,$$
$$F_0 M(t_0) = M(t_0)F_0^*.$$

Entonces

$$D \text{ es simétrico con respecto a } W$$
$$\Leftrightarrow$$
$$D \text{ es simétrico con respecto a } W + M(t_0)\delta_{t_0}$$

Ejemplo donde $t_0 \in \mathbb{R}$

$$W(t) = e^{-t^2} \begin{pmatrix} 1 + a^2 t^2 & at \\ at & 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Durán-Grünbaum (2004): Peso matricial.

Castro-Grünbaum (2006): Álgebra de operadores diferenciales.

Ecuaciones de simetría $\Rightarrow$ Expresión lineal de operadores diferenciales simétricos de orden a lo sumo 2 (dimensión real 5).

Restricciones:

$$F_2(t_0)M(t_0) = 0,$$
$$F_1(t_0)M(t_0) = 0,$$
$$F_0 M(t_0) = M(t_0) F_0^*$$

Ejemplo donde $t_0 \in \mathbb{R}$

$$W(t) = e^{-t^2} \begin{pmatrix} 1 + a^2 t^2 & at \\ at & 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Durán-Grünbaum (2004): Peso matricial.
Castro-Grünbaum (2006): Álgebra de operadores diferenciales.

Ecuaciones de simetría $\Rightarrow$ Expresión lineal de operadores diferenciales simétricos de orden a lo sumo 2 (dimensión real 5).

Restricciones:

$$\begin{aligned} F_2(t_0)M(t_0) &= 0, \\ F_1(t_0)M(t_0) &= 0, \\ F_0 M(t_0) &= M(t_0)F_0^* \end{aligned}$$

Ejemplo donde $t_0 \in \mathbb{R}$

$$W(t) = e^{-t^2} \begin{pmatrix} 1 + a^2 t^2 & at \\ at & 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Durán-Grünbaum (2004): Peso matricial.

Castro-Grünbaum (2006): Álgebra de operadores diferenciales.

Ecuaciones de simetría $\Rightarrow$ Expresión lineal de operadores diferenciales simétricos de orden a lo sumo 2 (dimensión real 5).

Restricciones:

$$\begin{aligned} F_2(t_0)M(t_0) &= 0, \\ F_1(t_0)M(t_0) &= 0, \\ F_0 M(t_0) &= M(t_0)F_0^* \end{aligned}$$

$t_0 = 0$

$$D = \partial^2 F_2(t) + \partial^1 F_1(t) + \partial^0 F_0(t),$$

$$F_2(t) = \begin{pmatrix} 1 - at & -1 + a^2t^2 \\ -1 & 1 + at \end{pmatrix}$$

$$F_1(t) = \begin{pmatrix} -2a - 2t & 2a + 2(2 + a^2)t \\ 0 & -2t \end{pmatrix}$$

$$F_0(t) = \begin{pmatrix} -1 & 2\frac{2+a^2}{a^2} \\ \frac{4}{a^2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ D es simétrico con respecto a la familia de pesos matriciales

$$W_\gamma(t) = e^{-t^2} \begin{pmatrix} 1 + a^2t^2 & at \\ at & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \delta_0(t), \quad \gamma \geqslant 0$$

$t_0 = 0$

$$D = \partial^2 F_2(t) + \partial^1 F_1(t) + \partial^0 F_0(t),$$

$$F_2(t) = \begin{pmatrix} 1 - at & -1 + a^2t^2 \\ -1 & 1 + at \end{pmatrix}$$

$$F_1(t) = \begin{pmatrix} -2a - 2t & 2a + 2(2 + a^2)t \\ 0 & -2t \end{pmatrix}$$

$$F_0(t) = \begin{pmatrix} -1 & 2\frac{2+a^2}{a^2} \\ \frac{4}{a^2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ D es simétrico con respecto a la familia de pesos matriciales

$$W_\gamma(t) = e^{-t^2} \begin{pmatrix} 1 + a^2t^2 & at \\ at & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \delta_0(t), \quad \gamma \geqslant 0$$

$$D = \partial^2 F_2(t) + \partial^1 F_1(t) + \partial^0 F_0(t),$$

$$F_2(t) = \begin{pmatrix} -\xi^{\mp}_{a,t_0} + at_0 - at & -1 - (a^2 t_0)t + a^2 t^2 \\ -1 & -\xi^{\mp}_{a,t_0} + at \end{pmatrix}$$

$$F_1(t) = \begin{pmatrix} -2a + 2\xi^{\mp}_{a,t_0} t & -2t_0 - 2a\xi^{\mp}_{a,t_0} + 2(2 + a^2)t \\ 2t_0 & 2(\xi^{\mp}_{a,t_0} - at_0)t \end{pmatrix}$$

$$F_0(t) = \begin{pmatrix} \xi^{\mp}_{a,t_0} + 2\frac{t_0}{a} & 2\frac{2+a^2}{a^2} \\ \frac{4}{a^2} & -\xi^{\mp}_{a,t_0} - 2\frac{t_0}{a} \end{pmatrix}$$

$$M(t_0) = \begin{pmatrix} (\xi^{\pm}_{t_0,a})^2 & \xi^{\pm}_{t_0,a} \\ \xi^{\pm}_{t_0,a} & 1 \end{pmatrix}, \quad \xi^{\pm}_{a,t_0} = \frac{at_0 \pm \sqrt{4 + a^2 t_0^2}}{2}$$

Otro peso matricial donde $t_0 \in \mathbb{R}$

$$W(t) = t^{\alpha} e^{-t} \begin{pmatrix} t^2 + a^2(t-1)^2 & a(t-1) \\ a(t-1) & 1 \end{pmatrix}, \quad t > 0, \quad \alpha > -1$$

Durán-Grünbaum (2004)

$t_0 = -1, \alpha = 0, a = 1$

$$D = \partial^2 \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+2t)}{2} & -1 + 2t^2 \\ 1 & \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-2t)}{2} \end{pmatrix} +$$

$$\partial^1 \begin{pmatrix} (1-\sqrt{2})(5+2\sqrt{2}-t) & -2\sqrt{2}+6t \\ -2 & (1+\sqrt{2})(t-1) \end{pmatrix} + \partial^0 \begin{pmatrix} -1+\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 1-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 3+2\sqrt{2} & -1-\sqrt{2} \\ -1-\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Otro peso matricial donde $t_0 \in \mathbb{R}$

$$W(t) = t^{\alpha} e^{-t} \begin{pmatrix} t^2 + a^2(t-1)^2 & a(t-1) \\ a(t-1) & 1 \end{pmatrix}, \quad t > 0, \quad \alpha > -1$$

Durán-Grünbaum (2004)

$t_0 = -1, \alpha = 0, a = 1$

$$D = \partial^2 \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+2t)}{2} & -1 + 2t^2 \\ 1 & \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-2t)}{2} \end{pmatrix} +$$
$$\partial^1 \begin{pmatrix} (1-\sqrt{2})(5+2\sqrt{2}-t) & -2\sqrt{2}+6t \\ -2 & (1+\sqrt{2})(t-1) \end{pmatrix} + \partial^0 \begin{pmatrix} -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 3 + 2\sqrt{2} & -1 - \sqrt{2} \\ -1 - \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Adenda

Cono y cono convexo asociado a un operador diferencial fijo D:

$$\mathfrak{X}(D) = \{W : P_n^W D = \Gamma_n P_n^W, \quad n \geqslant 0, \quad \text{i.e.} \quad D \in \mathcal{D}(W)\}$$

$$\Upsilon(D) = \{W : \ D \text{ es simétrico con respecto a } W\}$$

Tenemos que en los ejemplos que se estudian en esta memoria

$$\Upsilon(D) = \{\gamma W + \zeta M(t_0)\delta_{t_0},\ \gamma > 0, \zeta \geqslant 0\} = \mathfrak{X}(D)$$

Adenda

Cono y cono convexo asociado a un operador diferencial fijo D:

$$\mathfrak{X}(D) = \{W : P_n^W D = \Gamma_n P_n^W, \quad n \geqslant 0, \quad \text{i.e.} \quad D \in \mathcal{D}(W)\}$$

$$\Upsilon(D) = \{W : \ D \text{ es simétrico con respecto a } W\}$$

Tenemos que en los ejemplos que se estudian en esta memoria

$$\Upsilon(D) = \{\gamma W + \zeta M(t_0)\delta_{t_0}, \ \gamma > 0, \zeta \geqslant 0\} = \mathfrak{X}(D)$$

A. J. Durán y MdI, *Second order differential operators having several families of orthogonal matrix polynomials as eigenfunctions*, preprint.

Parte B

Familias de POM verificando ecuaciones diferenciales de orden impar

El peso $W_{\alpha,\nu_1,\dots,\nu_{N-1}}$

$$W_{\alpha,\nu_1,\dots,\nu_{N-1}}(t) = t^{\alpha} e^{-t} e^{At} t^{\frac{1}{2}J} t^{\frac{1}{2}J^*} e^{A^* t},\ \alpha > -1,\ t > 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \nu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \nu_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \nu_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \nu_i \in \mathbb{C}\setminus\{0\},\ J = \begin{pmatrix} N-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & N-2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Factorización

$W_{\alpha,\nu_1,\dots,\nu_{N-1}}(t) = t^{\alpha} e^{-t} T(t) T^*(t)$, donde

$$\begin{cases} T'(t) = \dfrac{1}{2}\left(A + \dfrac{J}{t}\right) T(t), \\ T(1) = e^{A} \end{cases} \qquad \mathrm{ad}_A J = [A, J] = -A$$

El peso $W_{\alpha,\nu_1,\ldots,\nu_{N-1}}$

$$W_{\alpha,\nu_1,\ldots,\nu_{N-1}}(t) = t^{\alpha}e^{-t}e^{At}t^{\frac{1}{2}J}t^{\frac{1}{2}J^*}e^{A^*t}, \ \alpha > -1, \ t > 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \nu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \nu_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \nu_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \nu_i \in \mathbb{C}\setminus\{0\}, \ J = \begin{pmatrix} N-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & N-2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Factorización

$W_{\alpha,\nu_1,\ldots,\nu_{N-1}}(t) = t^{\alpha}e^{-t}T(t)T^*(t)$, donde

$$\begin{cases} T'(t) = \dfrac{1}{2}\left(A + \dfrac{J}{t}\right)T(t), \\ T(1) = e^{A} \end{cases} \qquad \mathrm{ad}_A J = [A, J] = -A$$

Operadores diferenciales de segundo orden

$$D_1 = \partial^2 tI + \partial^1[(\alpha+1)I + J + t(A-I)] + \partial^0[(J+\alpha I)A - J]$$

$$i(N-i)|\nu_{N-1}|^2 = (N-1)|\nu_i|^2 + (N-i-1)|\nu_i|^2|\nu_{N-1}|^2,\ i = 1, \dots, N-2$$

$\Rightarrow D_2 = \partial^2 F_2 + \partial^1 F_1 + \partial^0 F_0$, donde

$$F_2 = t(J - At),$$

$$F_1 = ((1+\alpha)I + J)J + Y - t(J + (\alpha+2)A + Y^* - \mathrm{ad}_A Y),$$

$$F_0 = \frac{N-1}{|\nu_{N-1}|^2}[J - (\alpha I + J)A]$$

con $(Y)_{i+1,i} = \frac{i(N-i)}{\nu_i}$ y $(Y)_{i,j} = 0$ en otro sitio.

$$\prod_{i=1}^{N}\left((i-1)D_1 - D_2 + \left[\frac{(N-1)(N-i)}{|\nu_{N-1}|^2} + (i-1)(N-i)\right]I\right) = 0$$

Operadores diferenciales de segundo orden

$$D_1 = \partial^2 tI + \partial^1[(\alpha+1)I + J + t(A-I)] + \partial^0[(J+\alpha I)A - J]$$

$$i(N-i)|\nu_{N-1}|^2 = (N-1)|\nu_i|^2 + (N-i-1)|\nu_i|^2|\nu_{N-1}|^2,\ i = 1,\ldots,N-2$$

$\Rightarrow D_2 = \partial^2 F_2 + \partial^1 F_1 + \partial^0 F_0$, donde

$$F_2 = t(J - At),$$

$$F_1 = ((1+\alpha)I + J)J + Y - t(J + (\alpha+2)A + Y^* - \mathrm{ad}_A Y),$$

$$F_0 = \frac{N-1}{|\nu_{N-1}|^2}[J - (\alpha I + J)A]$$

con $(Y)_{i+1,i} = \frac{i(N-i)}{\nu_i}$ y $(Y)_{i,j} = 0$ en otro sitio.

$$\prod_{i=1}^{N}\left((i-1)D_1 - D_2 + \left[\frac{(N-1)(N-i)}{|\nu_{N-1}|^2} + (i-1)(N-i)\right]I\right) = 0$$

Operadores diferenciales de segundo orden

$$D_1 = \partial^2 tI + \partial^1[(\alpha+1)I + J + t(A-I)] + \partial^0[(J+\alpha I)A - J]$$

$$i(N-i)|\nu_{N-1}|^2 = (N-1)|\nu_i|^2 + (N-i-1)|\nu_i|^2|\nu_{N-1}|^2,\ i = 1, \dots, N-2$$

$\Rightarrow D_2 = \partial^2 F_2 + \partial^1 F_1 + \partial^0 F_0$, donde

$$F_2 = t(J - At),$$

$$F_1 = ((1+\alpha)I + J)J + Y - t(J + (\alpha+2)A + Y^* - \mathrm{ad}_A Y),$$

$$F_0 = \frac{N-1}{|\nu_{N-1}|^2}[J - (\alpha I + J)A]$$

con $(Y)_{i+1,i} = \frac{i(N-i)}{\nu_i}$ y $(Y)_{i,j} = 0$ en otro sitio.

$$\prod_{i=1}^{N}\left((i-1)D_1 - D_2 + \left[\frac{(N-1)(N-i)}{|\nu_{N-1}|^2} + (i-1)(N-i)\right] I\right) = 0$$

Operadores diferenciales de segundo orden

$$D_1 = \partial^2 tI + \partial^1[(\alpha+1)I + J + t(A-I)] + \partial^0[(J+\alpha I)A - J]$$

$$i(N-i)|\nu_{N-1}|^2 = (N-1)|\nu_i|^2 + (N-i-1)|\nu_i|^2|\nu_{N-1}|^2,\ i = 1, \dots, N-2$$

$\Rightarrow D_2 = \partial^2 F_2 + \partial^1 F_1 + \partial^0 F_0$, donde

$$F_2 = t(J - At),$$
$$F_1 = ((1+\alpha)I + J)J + Y - t(J + (\alpha+2)A + Y^* - \mathrm{ad}_A Y),$$
$$F_0 = \frac{N-1}{|\nu_{N-1}|^2}[J - (\alpha I + J)A]$$

con $(Y)_{i+1,i} = \frac{i(N-i)}{\nu_i}$ y $(Y)_{i,j} = 0$ en otro sitio.

$$\prod_{i=1}^{N}\left((i-1)D_1 - D_2 + \left[\frac{(N-1)(N-i)}{|\nu_{N-1}|^2} + (i-1)(N-i)\right] I\right) = 0$$

Ejemplo con δ_0 en tamaño $N \times N$

Ecuaciones de simetría $\Rightarrow$ Expresión lineal de operadores diferenciales simétricos de orden a lo sumo 2 (dimensión real 3).

$t_0 = 0$

$$D = -(N-1)D_1 + D_2$$

$$(M)_{ij} = \left(\prod_{k=\min\{i,j\}}^{\max\{i,j\}-1} \frac{\nu_k(\alpha+N-k)}{N-k}\right)\left(\prod_{k=1}^{N-\max\{i,j\}} \frac{\nu_{N-k}(\alpha+k)}{k}\right)^2$$

$\Rightarrow$ D es simétrico con respecto a la familia de pesos matriciales

$$W_\gamma(t) = W_{\alpha,\nu_1,\dots,\nu_{N-1}}(t) + \gamma M\delta_0(t), \quad \gamma \geqslant 0$$

Ejemplo con δ_0 en tamaño $N \times N$

Ecuaciones de simetría $\Rightarrow$ Expresión lineal de operadores diferenciales simétricos de orden a lo sumo 2 (dimensión real 3).

$t_0 = 0$

$$D = -(N-1)D_1 + D_2$$

$$(M)_{ij} = \left(\prod_{k=\min\{i,j\}}^{\max\{i,j\}-1} \frac{\nu_k(\alpha+N-k)}{N-k}\right)\left(\prod_{k=1}^{N-\max\{i,j\}} \frac{\nu_{N-k}(\alpha+k)}{k}\right)^2$$

$\Rightarrow$ D es simétrico con respecto a la familia de pesos matriciales

$$W_\gamma(t) = W_{\alpha,\nu_1,\dots,\nu_{N-1}}(t) + \gamma M\delta_0(t), \quad \gamma \geqslant 0$$

Ejemplo con δ_0 en tamaño $N \times N$

Ecuaciones de simetría $\Rightarrow$ Expresión lineal de operadores diferenciales simétricos de orden a lo sumo 2 (dimensión real 3).

$t_0 = 0$

$$D = -(N-1)D_1 + D_2$$

$$(M)_{ij} = \left(\prod_{k=\min\{i,j\}}^{\max\{i,j\}-1} \frac{\nu_k(\alpha+N-k)}{N-k} \right) \left(\prod_{k=1}^{N-\max\{i,j\}} \frac{\nu_{N-k}(\alpha+k)}{k} \right)^2$$

$\Rightarrow D$ es simétrico con respecto a la familia de pesos matriciales

$$W_\gamma(t) = W_{\alpha,\nu_1,\dots,\nu_{N-1}}(t) + \gamma M \delta_0(t), \quad \gamma \geq 0$$

Ejemplo con δ_0 en tamaño $N \times N$

Ecuaciones de simetría $\Rightarrow$ Expresión lineal de operadores diferenciales simétricos de orden a lo sumo 2 (dimensión real 3).

$t_0 = 0$

$$D = -(N-1)D_1 + D_2$$

$$(M)_{ij} = \left(\prod_{k=\min\{i,j\}}^{\max\{i,j\}-1} \frac{\nu_k(\alpha + N - k)}{N-k} \right) \left(\prod_{k=1}^{N-\max\{i,j\}} \frac{\nu_{N-k}(\alpha + k)}{k} \right)^2$$

$\Rightarrow$ D es simétrico con respecto a la familia de pesos matriciales

$$W_\gamma(t) = W_{\alpha,\nu_1,\dots,\nu_{N-1}}(t) + \gamma M \delta_0(t), \quad \gamma \geqslant 0$$

Álgebra de operadores diferenciales

El peso $W_{\alpha,a}$

$$W_{\alpha,a}(t) = t^{\alpha}e^{-t}\underbrace{\begin{pmatrix} t(1+|a|^2t) & at \\ \bar{a}t & 1 \end{pmatrix}}_{R_a(t)}, \quad \alpha > -1, \quad t > 0$$

Cantero-Moral-Velázquez (2006)

Fórmula de Rodrigues

$$\mathcal{P}_{n,\alpha,a}(t) = \Phi_{n,\alpha,a}\left[t^{\alpha+n}e^{-t}(R_a(t)+X_{n,a})\right]^{(n)}R_a^{-1}(t)t^{-\alpha}e^{t}, \quad n = 1,2,\dots$$

$$\Phi_{n,\alpha,a} = \begin{pmatrix} 1 & -a(1+\alpha) \\ 0 & 1/\lambda_{n,a} \end{pmatrix}, \quad X_{n,a} = \begin{pmatrix} 0 & -an \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{n,a} = 1+n|a|^2$$

Álgebra de operadores diferenciales

El peso $W_{\alpha,a}$

$$W_{\alpha,a}(t) = t^{\alpha} e^{-t} \underbrace{\begin{pmatrix} t(1+|a|^2 t) & at \\ \bar{a}t & 1 \end{pmatrix}}_{R_a(t)}, \quad \alpha > -1, \quad t > 0$$

Cantero-Moral-Velázquez (2006)

Fórmula de Rodrigues

$$\mathcal{P}_{n,\alpha,a}(t) = \Phi_{n,\alpha,a}\left[t^{\alpha+n} e^{-t}(R_a(t) + X_{n,a})\right]^{(n)} R_a^{-1}(t) t^{-\alpha} e^{t}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$\Phi_{n,\alpha,a} = \begin{pmatrix} 1 & -a(1+\alpha) \\ 0 & 1/\lambda_{n,a} \end{pmatrix}, \quad X_{n,a} = \begin{pmatrix} 0 & -an \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{n,a} = 1 + n|a|^2$$

Operadores diferenciales nuevos linealmente independientes

$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$
1	0	2	2	2	2	2	2	2

- Grünbaum-Pacharoni-Tirao (2003) y Castro-Grünbaum (2005): Ejemplos de POM verificando ecuaciones diferenciales de primer orden (pesos matriciales reducibles a escalares).

Base para los operadores de segundo orden

$$L_1 = \partial^2 \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} + \partial^1 \begin{pmatrix} \alpha+2-t & at \\ 0 & \alpha+1-t \end{pmatrix} + \partial^0 \begin{pmatrix} -\frac{1+|a|^2}{|a|^2} & (1+\alpha)a \\ 0 & -\frac{1}{|a|^2} \end{pmatrix}$$

$$L_2 = \partial^2 \begin{pmatrix} t & -2at^2 \\ 0 & -t \end{pmatrix} + \partial^1 \begin{pmatrix} \alpha+2+t & -\frac{(2+|a|^2(2\alpha+5))t}{\bar{a}} \\ \frac{2}{a} & -t-\alpha-1 \end{pmatrix} + \partial^0 \begin{pmatrix} \frac{1+|a|^2}{|a|^2} & -\frac{(1+\alpha)(2+|a|^2)}{\bar{a}} \\ 0 & -\frac{1}{|a|^2} \end{pmatrix}$$

Operadores diferenciales nuevos linealmente independientes

$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$
1	0	2	2	2	2	2	2	2

- Grünbaum-Pacharoni-Tirao (2003) y Castro-Grünbaum (2005): Ejemplos de POM verificando ecuaciones diferenciales de primer orden (pesos matriciales reducibles a escalares).

Base para los operadores de segundo orden

$$L_1 = \partial^2 \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} + \partial^1 \begin{pmatrix} \alpha+2-t & at \\ 0 & \alpha+1-t \end{pmatrix} + \partial^0 \begin{pmatrix} -\frac{1+|a|^2}{|a|^2} & (1+\alpha)a \\ 0 & -\frac{1}{|a|^2} \end{pmatrix}$$

$$L_2 = \partial^2 \begin{pmatrix} t & -2at^2 \\ 0 & -t \end{pmatrix} + \partial^1 \begin{pmatrix} \alpha+2+t & -\frac{(2+|a|^2(2\alpha+5))t}{\bar{a}} \\ \frac{2}{a} & -t-\alpha-1 \end{pmatrix} + \partial^0 \begin{pmatrix} \frac{1+|a|^2}{|a|^2} & -\frac{(1+\alpha)(2+|a|^2)}{\bar{a}} \\ 0 & -\frac{1}{|a|^2} \end{pmatrix}$$

Operadores diferenciales nuevos linealmente independientes

$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$
1	0	2	2	2	2	2	2	2

- Grünbaum-Pacharoni-Tirao (2003) y Castro-Grünbaum (2005): Ejemplos de POM verificando ecuaciones diferenciales de primer orden (pesos matriciales reducibles a escalares).

Base para los operadores de segundo orden

$$L_1 = \partial^2 \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} + \partial^1 \begin{pmatrix} \alpha+2-t & at \\ 0 & \alpha+1-t \end{pmatrix} + \partial^0 \begin{pmatrix} -\frac{1+|a|^2}{|a|^2} & (1+\alpha)a \\ 0 & -\frac{1}{|a|^2} \end{pmatrix}$$

$$L_2 = \partial^2 \begin{pmatrix} t & -2at^2 \\ 0 & -t \end{pmatrix} + \partial^1 \begin{pmatrix} \alpha+2+t & -\frac{(2+|a|^2(2\alpha+5))t}{\bar{a}} \\ \frac{2}{a} & -t-\alpha-1 \end{pmatrix} +$$

$$\partial^0 \begin{pmatrix} \frac{1+|a|^2}{|a|^2} & -\frac{(1+\alpha)(2+|a|^2)}{\bar{a}} \\ 0 & -\frac{1}{|a|^2} \end{pmatrix}$$

Operadores diferenciales nuevos linealmente independientes

$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$
1	0	2	2	2	2	2	2	2

- Grünbaum-Pacharoni-Tirao (2003) y Castro-Grünbaum (2005): Ejemplos de POM verificando ecuaciones diferenciales de primer orden (pesos matriciales reducibles a escalares).

Base para los operadores de segundo orden

$$L_1 = \partial^2 \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} + \partial^1 \begin{pmatrix} \alpha+2-t & at \\ 0 & \alpha+1-t \end{pmatrix} + \partial^0 \begin{pmatrix} -\frac{1+|a|^2}{|a|^2} & (1+\alpha)a \\ 0 & -\frac{1}{|a|^2} \end{pmatrix}$$

$$L_2 = \partial^2 \begin{pmatrix} t & -2at^2 \\ 0 & -t \end{pmatrix} + \partial^1 \begin{pmatrix} \alpha+2+t & -\frac{(2+|a|^2(2\alpha+5))t}{\bar{a}} \\ \frac{2}{a} & -t-\alpha-1 \end{pmatrix} + \partial^0 \begin{pmatrix} \frac{1+|a|^2}{|a|^2} & -\frac{(1+\alpha)(2+|a|^2)}{\bar{a}} \\ 0 & -\frac{1}{|a|^2} \end{pmatrix}$$

Operadores de tercer orden I

$$
\begin{aligned}
L_3 =& \partial^3 \begin{pmatrix} -|a|^2t^2 & at^2(1+|a|^2t) \\ -\bar{a}t & |a|^2t^2 \end{pmatrix} + \\
& \partial^2 \begin{pmatrix} -t(2+|a|^2(\alpha+5)) & at(2\alpha+4+t(1+|a|^2(\alpha+5))) \\ -\bar{a}(\alpha+2) & t(2+|a|^2(\alpha+2)) \end{pmatrix} + \\
& \partial^1 \begin{pmatrix} t-2(\alpha+2)(1+|a|^2) & \frac{|a|^2(\alpha+1)(\alpha+2)+t(1+2|a|^2(1+|a|^2(\alpha+2))}{\bar{a}} \\ -\frac{1}{a} & 2\alpha+2-t \end{pmatrix} + \\
& \partial^0 \begin{pmatrix} 1+\alpha & -\frac{1}{\bar{a}}(1+\alpha)(|a|^2\alpha-1) \\ \frac{1}{a} & -(1+\alpha) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Operadores de tercer orden II

$$
\begin{aligned}
L_4 =&\partial^3 \begin{pmatrix} |a|^2 t^2 & a t^2(-1+|a|^2 t) \\ \overline{a} t & -|a|^2 t^2 \end{pmatrix} + \\
&\partial^2 \begin{pmatrix} |a|^2 t(\alpha+5) & -at(-2\alpha-4+t(3+|a|^2(\alpha+5))) \\ \overline{a}(\alpha+2) & -|a|^2 t(\alpha+2) \end{pmatrix} + \\
&\partial^1 \begin{pmatrix} 2|a|^2(\alpha+2)+t & a(\alpha+1)(\alpha+2) - t\left(\frac{1}{\overline{a}} + 2a(2+|a|^2)(\alpha+2)\right) \\ -\frac{1}{a} & -t \end{pmatrix} \\
&+ \partial^0 \begin{pmatrix} 1+\alpha & -\frac{1}{\overline{a}}(1+\alpha)(1+|a|^2(\alpha+2)) \\ \frac{1}{a} & -(1+\alpha) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Conjetura

- Orden par: Orden $0=\{I\}$, Orden 2i $=\{L_1^i, L_1^{i-1}L_2\}$, $i \geqslant 1$
- Orden impar: Orden $1=\{0\}$, Orden 4i-1 $=\{L_1^iL_3 - L_3L_1^i, L_2^iL_3 + L_3L_2^i\}$, $i \geqslant 0$

  Orden 4i+1 $=\{L_1^iL_3 + L_3L_1^i, L_2^iL_3 - L_3L_2^i\}$, $i \geqslant 0$

Operadores de tercer orden II

$$
\begin{aligned}
L_4 =&\partial^3 \begin{pmatrix} |a|^2t^2 & at^2(-1+|a|^2t) \\ \overline{a}t & -|a|^2t^2 \end{pmatrix} + \\
&\partial^2 \begin{pmatrix} |a|^2t(\alpha+5) & -at(-2\alpha-4+t(3+|a|^2(\alpha+5))) \\ \overline{a}(\alpha+2) & -|a|^2t(\alpha+2) \end{pmatrix} + \\
&\partial^1 \begin{pmatrix} 2|a|^2(\alpha+2)+t & a(\alpha+1)(\alpha+2)-t\left(\frac{1}{\overline{a}}+2a(2+|a|^2)(\alpha+2)\right) \\ -\frac{1}{a} & -t \end{pmatrix} \\
&+\partial^0 \begin{pmatrix} 1+\alpha & -\frac{1}{\overline{a}}(1+\alpha)(1+|a|^2(\alpha+2)) \\ \frac{1}{a} & -(1+\alpha) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Conjetura

- Orden par: Orden $0=\{I\}$, Orden 2i $=\{L_1^i, L_1^{i-1}L_2\}$, $i \geqslant 1$
- Orden impar: Orden $1=\{0\}$, Orden 4i-1 $=\{L_1^iL_3-L_3L_1^i, L_2^iL_3+L_3L_2^i\}$, $i\geqslant 0$

  Orden 4i+1 $=\{L_1^iL_3+L_3L_1^i, L_2^iL_3-L_3L_2^i\}$, $i\geqslant 0$

Relaciones entre los operadores

Cuatro relaciones cuadráticas

$$L_1^2 = L_2^2 \qquad L_3^2 = -L_4^2$$
$$L_1 L_2 = L_2 L_1 \qquad L_3 L_4 = -L_4 L_3$$

Cuatro relaciones permutacionales

$$L_1 L_3 - L_2 L_4 = 0 \qquad L_2 L_3 - L_1 L_4 = 0$$
$$L_3 L_2 + L_4 L_1 = 0 \qquad L_3 L_1 + L_4 L_2 = 0$$

Cuatro relaciones cuadráticas más

$$L_3 = L_1 L_4 - L_4 L_1$$
$$L_3 = L_2 L_3 + L_3 L_2 \qquad L_4 = L_2 L_4 + L_4 L_2$$

Relaciones cúbicas

$$L_1 L_3^2 = L_3^2 L_1 \qquad L_2 L_3^2 = L_3^2 L_2$$

Relaciones entre los operadores

Cuatro relaciones cuadráticas

$$L_1^2 = L_2^2 \qquad L_3^2 = -L_4^2$$
$$L_1 L_2 = L_2 L_1 \quad L_3 L_4 = -L_4 L_3$$

Cuatro relaciones permutacionales

$$L_1 L_3 - L_2 L_4 = 0 \quad L_2 L_3 - L_1 L_4 = 0$$
$$L_3 L_2 + L_4 L_1 = 0 \quad L_3 L_1 + L_4 L_2 = 0$$

Cuatro relaciones cuadráticas más

$$L_3 = L_1 L_4 - L_4 L_1$$
$$L_3 = L_2 L_3 + L_3 L_2 \quad L_4 = L_2 L_4 + L_4 L_2$$

Relaciones cúbicas

$$L_1 L_3^2 = L_3^2 L_1 \quad L_2 L_3^2 = L_3^2 L_2$$

Relaciones entre los operadores

Cuatro relaciones cuadráticas

$$\begin{array}{cc} L_1^2 = L_2^2 & L_3^2 = -L_4^2 \\ L_1L_2 = L_2L_1 & L_3L_4 = -L_4L_3 \end{array}$$

Cuatro relaciones permutacionales

$$\begin{array}{cc} L_1L_3 - L_2L_4 = 0 & L_2L_3 - L_1L_4 = 0 \\ L_3L_2 + L_4L_1 = 0 & L_3L_1 + L_4L_2 = 0 \end{array}$$

Cuatro relaciones cuadráticas más

$$\begin{array}{cc} L_3 = L_1L_4 - L_4L_1 & L_4 = L_1L_3 - L_3L_1 \\ L_3 = L_2L_3 + L_3L_2 & L_4 = L_2L_4 + L_4L_2 \end{array}$$

Relaciones cúbicas

$$L_1L_3^2 = L_3^2L_1 \quad L_2L_3^2 = L_3^2L_2$$

Relaciones entre los operadores

Cuatro relaciones cuadráticas

$$L_1^2 = L_2^2 \qquad L_3^2 = -L_4^2$$
$$L_1L_2 = L_2L_1 \quad L_3L_4 = -L_4L_3$$

Cuatro relaciones permutacionales

$$L_1L_3 - L_2L_4 = 0 \quad L_2L_3 - L_1L_4 = 0$$
$$L_3L_2 + L_4L_1 = 0 \quad L_3L_1 + L_4L_2 = 0$$

Cuatro relaciones cuadráticas más

$$L_3 = L_1L_4 - L_4L_1 \quad L_4 = L_1L_3 - L_3L_1$$
$$L_3 = L_2L_3 + L_3L_2 \quad L_4 = L_2L_4 + L_4L_2$$

Relaciones cúbicas

$$L_1L_3^2 = L_3^2L_1 \quad L_2L_3^2 = L_3^2L_2$$

Relaciones entre los operadores

Cuatro relaciones cuadráticas

$$L_1^2 = L_2^2 \qquad L_3^2 = -L_4^2$$
$$L_1L_2 = L_2L_1 \qquad L_3L_4 = -L_4L_3$$

Cuatro relaciones permutacionales

$$L_1L_3 - L_2L_4 = 0 \qquad L_2L_3 - L_1L_4 = 0$$
$$L_3L_2 + L_4L_1 = 0 \qquad L_3L_1 + L_4L_2 = 0$$

Cuatro relaciones cuadráticas más

$$L_3 = L_1L_4 - L_4L_1 \qquad L_4 = L_1L_3 - L_3L_1 \checkmark$$
$$L_3 = L_2L_3 + L_3L_2 \qquad L_4 = L_2L_4 + L_4L_2$$

Relaciones cúbicas

$$L_1L_3^2 = L_3^2L_1 \qquad L_2L_3^2 = L_3^2L_2$$

L_2 en función de L_1 y L_3

$$\begin{aligned}\left[|a|^2(2+\alpha)-1\right]\left[|a|^2(\alpha-1)-1\right]L_2 &= 2|a|^2\left[|a|^2(2\alpha+1)-2\right]L_1\\ &+\left[|a|^4(\alpha^2+\alpha-5)-|a|^2(2\alpha+1)+1\right]L_1^2\\ &-2|a|^2\left[|a|^2(2\alpha+1)-2\right]L_1^3+3|a|^4L_1^4\\ &-\frac{1}{2}\left[|a|^2(2\alpha+1)-2\right]L_3^2+\frac{15}{2}|a|^2L_3^2L_1-\frac{9}{2}|a|^2L_3L_1L_3\end{aligned}$$

Conjetura

$$\mathcal{D}(W_{\alpha,a}) \quad \text{generado por} \quad \{I, L_1, L_3\}$$

Nota

Para ciertos valores excepcionales de $\alpha = 1 + \frac{1}{|a|^2}$ ó $\alpha = -2 + \frac{1}{|a|^2}$
$\Rightarrow$ Conjetura: $\mathcal{D}(W_{\alpha,a}) \quad$ generado por $\quad \{I, L_1, L_2, L_3\}$

L_2 en función de L_1 y L_3

$$\begin{aligned}\left[|a|^2(2+\alpha)-1\right]\left[|a|^2(\alpha-1)-1\right]L_2 &= 2|a|^2\left[|a|^2(2\alpha+1)-2\right]L_1\\ &+\left[|a|^4(\alpha^2+\alpha-5)-|a|^2(2\alpha+1)+1\right]L_1^2\\ &-2|a|^2\left[|a|^2(2\alpha+1)-2\right]L_1^3+3|a|^4L_1^4\\ &-\frac{1}{2}\left[|a|^2(2\alpha+1)-2\right]L_3^2+\frac{15}{2}|a|^2L_3^2L_1-\frac{9}{2}|a|^2L_3L_1L_3\end{aligned}$$

Conjetura

$$\mathcal{D}(W_{\alpha,a}) \quad \text{generado por} \quad \{I, L_1, L_3\}$$

Nota

Para ciertos valores excepcionales de $\alpha = 1+\frac{1}{|a|^2}$ ó $\alpha = -2+\frac{1}{|a|^2}$
$\Rightarrow$ Conjetura: $\mathcal{D}(W_{\alpha,a})$ generado por $\{I, L_1, L_2, L_3\}$

L_2 en función de L_1 y L_3

$$\begin{aligned}\left[|a|^2(2+\alpha)-1\right]\left[|a|^2(\alpha-1)-1\right]L_2 &= 2|a|^2\left[|a|^2(2\alpha+1)-2\right]L_1\\ &+\left[|a|^4(\alpha^2+\alpha-5)-|a|^2(2\alpha+1)+1\right]L_1^2\\ &-2|a|^2\left[|a|^2(2\alpha+1)-2\right]L_1^3+3|a|^4L_1^4\\ &-\frac{1}{2}\left[|a|^2(2\alpha+1)-2\right]L_3^2+\frac{15}{2}|a|^2L_3^2L_1-\frac{9}{2}|a|^2L_3L_1L_3\end{aligned}$$

Conjetura

$$\mathcal{D}(W_{\alpha,a}) \quad \text{generado por} \quad \{I, L_1, L_3\}$$

Nota

Para ciertos valores excepcionales de $\alpha = 1 + \frac{1}{|a|^2}$ ó $\alpha = -2 + \frac{1}{|a|^2}$
$\Rightarrow$ Conjetura: $\mathcal{D}(W_{\alpha,a}) \quad$ generado por $\quad \{I, L_1, L_2, L_3\}$

A. J. Durán y MdI, *Some examples of orthogonal matrix polynomials satisfying odd order differential equations*, J. Approx. Theory **150**, No. 2, (2008), 153–174.

El ejemplo de 1 salto

$$W(t) = t^{\alpha}(1-t)^{\beta}\, T(t)T^{*}(t), \quad \alpha, \beta > -1, \quad D_1 = F_2(t)\partial^2 + F_1(t)\partial^1 + F_0(t)\partial^0$$

$$F_2(t) = t(1-t)I$$

$$F_1(t) = \begin{pmatrix} \alpha+3 & 0 & 0 \\ -1 & \alpha+2 & 0 \\ 0 & -2 & \alpha+1 \end{pmatrix} - t\begin{pmatrix} \alpha+\beta+4 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha+\beta+5 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha+\beta+6 \end{pmatrix}$$

$$F_0(t) = \begin{pmatrix} 0 & 2(\beta-k+1) & 0 \\ 0 & -(\alpha+\beta-k+2) & \beta-k+2 \\ 0 & 0 & -2(\alpha+\beta-k+3) \end{pmatrix}, \quad 0 < k < \beta+1$$

Grünbaum-Pacharoni-Tirao (2005)

Nuevo operador diferencial de segundo orden

$$D_2 = G_2(t)\partial^2 + G_1(t)\partial^1 + G_0(t)\partial^0$$

$$\begin{aligned}
G_2(t) &= \begin{pmatrix} t(1-t) & 0 & 0 \\ t/2 & t(1-t)/2 & 0 \\ 0 & -t & 0 \end{pmatrix} \\
G_1(t) &= \begin{pmatrix} \alpha+\beta-k+4 & \beta-k+1 & 0 \\ -(\alpha+\beta-k+4)/2 & (\alpha+4)/2 & (\beta-k+2)/2 \\ 0 & -(\alpha+\beta-k+5) & -(\beta-k+2) \end{pmatrix} \\
&\quad -t\begin{pmatrix} \alpha+\beta+4 & \beta-k+1 & 0 \\ 0 & (\alpha+\beta+5)/2 & (\beta-k+2)/2 \\ 0 & 0 & \alpha+\beta+6 \end{pmatrix} \\
G_0(t) &= \begin{pmatrix} 0 & -k(\beta-k+1) & 0 \\ 0 & k(\alpha+\beta-k+2)/2 & -k(\beta-k+2)/2 \\ 0 & 0 & k(\alpha+\beta-k+3) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Operadores diferenciales nuevos linealmente independientes

$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$
1	0	2	0	3	0	3	0	3

Conjetura

- Orden par: orden $0=\{I\}$, Orden $2\mathrm{i}=\{D_1^i, D_2^i, D_1^{i-1}D_2\}$, $i\geqslant 1$
- Orden impar: $\{0\}$

$$\underbrace{\left(D_1-D_2\right)}_{p_1(D_1,D_2)}\underbrace{\left(D_2-k(\alpha+\beta-k+3)I\right)}_{p_2(D_1,D_2)}\underbrace{\left(D_1-2D_2+(1+k)(\alpha+\beta-k+2)I\right)}_{p_3(D_1,D_2)}=0$$

Conjetura

$$\mathcal{D}(W)\simeq\mathbb{C}[x,y]/J,\quad J=< p_1(x,y)p_2(x,y)p_3(x,y) >$$

Operadores diferenciales nuevos linealmente independientes

$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$
1	0	2	0	3	0	3	0	3

Conjetura

- Orden par: orden $0=\{I\}$, Orden $2i=\{D_1^i, D_2^i, D_1^{i-1}D_2\}$, $i \geqslant 1$
- Orden impar: $\{0\}$

$$\underbrace{\left(D_1-D_2\right)}_{p_1(D_1,D_2)}\underbrace{\left(D_2-k(\alpha+\beta-k+3)I\right)}_{p_2(D_1,D_2)}\underbrace{\left(D_1-2D_2+(1+k)(\alpha+\beta-k+2)I\right)}_{p_3(D_1,D_2)}=0$$

Conjetura

$$\mathcal{D}(W)\simeq\mathbb{C}[x,y]/J, \quad J=< p_1(x,y)p_2(x,y)p_3(x,y) >$$

Operadores diferenciales nuevos linealmente independientes

$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$
1	0	2	0	3	0	3	0	3

Conjetura

- Orden par: orden $0 = \{I\}$, Orden $2i = \{D_1^i, D_2^i, D_1^{i-1}D_2\}$, $i \geqslant 1$
- Orden impar: $\{0\}$

$$\underbrace{(D_1 - D_2)}_{p_1(D_1,D_2)}\underbrace{(D_2 - k(\alpha+\beta-k+3)I)}_{p_2(D_1,D_2)}\underbrace{(D_1 - 2D_2 + (1+k)(\alpha+\beta-k+2)I)}_{p_3(D_1,D_2)} = 0$$

Conjetura

$$\mathcal{D}(W) \simeq \mathbb{C}[x,y]/J, \quad J = < p_1(x,y)p_2(x,y)p_3(x,y) >$$

Operadores diferenciales nuevos linealmente independientes

$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$
1	0	2	0	3	0	3	0	3

Conjetura

- Orden par: orden $0 = \{I\}$, Orden $2i = \{D_1^i, D_2^i, D_1^{i-1}D_2\}$, $i \geqslant 1$
- Orden impar: $\{0\}$

$$\underbrace{\left(D_1 - D_2\right)}_{p_1(D_1,D_2)}\underbrace{\left(D_2 - k(\alpha+\beta-k+3)I\right)}_{p_2(D_1,D_2)}\underbrace{\left(D_1 - 2D_2 + (1+k)(\alpha+\beta-k+2)I\right)}_{p_3(D_1,D_2)} = 0$$

Conjetura

$$\mathcal{D}(W) \simeq \mathbb{C}[x,y]/J, \quad J = < p_1(x,y)p_2(x,y)p_3(x,y) >$$

El ejemplo de 2 saltos

$$W(t) = t^{\alpha}(1-t)^{\beta}\,T(t)\,T^{*}(t), \quad \alpha,\beta > -1, \quad D_1 = F_2(t)\partial^2 + F_1(t)\partial^1 + F_0(t)\partial^0$$

$$\begin{aligned}
F_2(t) &= t(1-t)I \\
F_1(t) &= \begin{pmatrix} \alpha+3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \alpha+2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \alpha+2 & 0 \\ 0 & -\frac{k_2-k_1+2}{k_2-k_1+1} & -\frac{k_2-k_1}{k_2-k_1+1} & \alpha+1 \end{pmatrix} \\
&\quad -t\begin{pmatrix} \alpha+\beta+4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha+\beta+5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha+\beta+5 & \\ 0 & 0 & 0 & \alpha+\beta+6 \end{pmatrix} \\
F_0(t) &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{(k_2-k_1+2)(\beta-k_2+1)}{k_2-k_1+1} & \frac{(k_2-k_1)(\beta-k_1+2)}{k_2-k_1+1} & 0 \\ 0 & -(\alpha+\beta+2)+k_2 & 0 & \beta-k_1+2 \\ 0 & 0 & -(\alpha+\beta+3)+k_1 & \beta-k_2+1 \\ 0 & 0 & 0 & -2(\alpha+\beta+3)+k_1+k_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Grünbaum-Pacharoni-Tirao (2005)

Dos nuevos operadores diferenciales de segundo orden

$$D_2 = G_2(t)\partial^2 + G_1(t)\partial^1 + G_0(t)\partial^0$$
$$D_3 = H_2(t)\partial^2 + H_1(t)\partial^1 + H_0(t)\partial^0$$

con G_2 y H_2 dados por

$$G_2(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_1-k_2-1}{k_1-k_2}t & 0 & \frac{k_1-k_2-1}{k_1-k_2}t(1-t) & 0 \\ 0 & \frac{k_1-k_2-2}{k_1-k_2-1}t & \frac{1}{k_1-k_2-1}t & t(1-t) \end{pmatrix}$$

$$H_2(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{k_1-k_2-2}t & \frac{1}{k_1-k_2-2}t(1-t) & 0 & 0 \\ -t & 0 & -t(1-t) & 0 \\ 0 & -t & 0 & -t(1-t) \end{pmatrix}$$

Operadores diferenciales nuevos linealmente independientes

$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$
1	0	3	0	6	0	6	0	6

$$E = J_4(t)\partial^4 + J_3(t)\partial^3 + J_2(t)\partial^2 + J_1(t)\partial^1 + J_0(t)\partial^0$$
$$F = K_4(t)\partial^4 + K_3(t)\partial^3 + K_2(t)\partial^2 + K_1(t)\partial^1 + K_0(t)\partial^0$$

con sus coeficientes líderes $J_4(t)$ y $K_4(t)$ dados por

$$J_4(t) = \frac{(\beta-k_1+2)(k_1-k_2)}{(\beta-k_2+1)}t^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{k_1-k_2-2}(1-t) & 0 & \frac{1}{k_1-k_2-2}(1-t)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{k_1-k_2-1} & 0 & -\frac{1}{k_1-k_2-2}(1-t) & 0 \end{pmatrix}$$

$$K_4(t) = \frac{(\beta-k_2+1)(k_1-k_2-2)}{(\beta-k_1+2)}t^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{k_1-k_2}(1-t) & \frac{1}{k_1-k_2}(1-t)^2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{k_2-k_1+1} & \frac{1}{k_2-k_1+1}(1-t) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Operadores diferenciales nuevos linealmente independientes

$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$
1	0	3	0	6	0	6	0	6

$$E = J_4(t)\partial^4 + J_3(t)\partial^3 + J_2(t)\partial^2 + J_1(t)\partial^1 + J_0(t)\partial^0$$
$$F = K_4(t)\partial^4 + K_3(t)\partial^3 + K_2(t)\partial^2 + K_1(t)\partial^1 + K_0(t)\partial^0$$

con sus coeficientes líderes $J_4(t)$ y $K_4(t)$ dados por

$$J_4(t) = \frac{(\beta-k_1+2)(k_1-k_2)}{(\beta-k_2+1)}t^2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{k_1-k_2-2}(1-t) & 0 & \frac{1}{k_1-k_2-2}(1-t)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{k_1-k_2-1} & 0 & -\frac{1}{k_1-k_2-2}(1-t) & 0 \end{pmatrix}$$

$$K_4(t) = \frac{(\beta-k_2+1)(k_1-k_2-2)}{(\beta-k_1+2)}t^2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{k_1-k_2}(1-t) & \frac{1}{k_1-k_2}(1-t)^2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{k_2-k_1+1} & \frac{1}{k_2-k_1+1}(1-t) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Conjetura

$$\text{orden } 0 = \{I\}, \text{ orden } 2 = \{D_1, D_2, D_3\},$$
$$\text{orden } 2\text{i} = \{D_1^i, D_2^i, D_3^i, D_1^{i-1}D_2, D_1^{i-2}E, D_2^{i-2}F\}, \ i \geqslant 2$$

$$D_2\big(D_1 + D_3 - k_1(\alpha+\beta-k_1+3)I\big) = 0$$

$$\big[(k_1-k_2)D_2 + (k_1-k_2-1)D_3\big]\big[-D_1 + (k_1-k_2-1)D_2 + (k_1-k_2-2)D_3 + (1+k_2)(\alpha+\beta-k_2+2)I\big] = 0$$

$$D_1E + ED_3 = \big(k_1(\alpha+\beta-k_1+2)+1+k_2\big)E$$

$$ED_1 - D_1E = (k_1-k_2-1)E$$

$$FD_1 + D_3F = \big(k_1(\alpha+\beta-k_1+2)+1+k_2\big)F$$

$$D_1F - FD_1 = (k_1-k_2-1)F$$

$$D_2E = 0 \quad \text{y} \quad FD_2 = 0$$

Conjetura

$$\mathcal{D}(W) \quad \text{generado por} \quad \{I, D_1, D_2, D_3, E, F\}$$

Conjetura

$$\text{orden } 0 = \{I\}, \text{ orden } 2 = \{D_1, D_2, D_3\},$$
$$\text{orden } 2\text{i} = \{D_1^i, D_2^i, D_3^i, D_1^{i-1}D_2, D_1^{i-2}E, D_2^{i-2}F\}, \ i \geqslant 2$$

$$D_2\big(D_1 + D_3 - k_1(\alpha + \beta - k_1 + 3)I\big) = 0$$

$$\big[(k_1 - k_2)D_2 + (k_1 - k_2 - 1)D_3\big]\big[-D_1 + (k_1 - k_2 - 1)D_2 + (k_1 - k_2 - 2)D_3 + (1 + k_2)(\alpha + \beta - k_2 + 2)I\big] = 0$$

$$D_1E + ED_3 = \big(k_1(\alpha + \beta - k_1 + 2) + 1 + k_2\big)E$$

$$ED_1 - D_1E = (k_1 - k_2 - 1)E$$

$$FD_1 + D_3F = \big(k_1(\alpha + \beta - k_1 + 2) + 1 + k_2\big)F$$

$$D_1F - FD_1 = (k_1 - k_2 - 1)F$$

$$D_2E = 0 \quad \text{y} \quad FD_2 = 0$$

Conjetura

$$\mathcal{D}(W) \quad \text{generado por} \quad \{I, D_1, D_2, D_3, E, F\}$$

Conjetura

$$\text{orden } 0 = \{I\}, \text{ orden } 2 = \{D_1, D_2, D_3\},$$
$$\text{orden } 2\text{i} = \{D_1^i, D_2^i, D_3^i, D_1^{i-1}D_2, D_1^{i-2}E, D_2^{i-2}F\}, \ i \geqslant 2$$

$$D_2\big(D_1 + D_3 - k_1(\alpha + \beta - k_1 + 3)I\big) = 0$$

$$\big[(k_1 - k_2)D_2 + (k_1 - k_2 - 1)D_3\big]\big[-D_1 + (k_1 - k_2 - 1)D_2 + (k_1 - k_2 - 2)D_3 + (1 + k_2)(\alpha + \beta - k_2 + 2)I\big] = 0$$

$$D_1E + ED_3 = \big(k_1(\alpha + \beta - k_1 + 2) + 1 + k_2\big)E$$

$$ED_1 - D_1E = (k_1 - k_2 - 1)E$$

$$FD_1 + D_3F = \big(k_1(\alpha + \beta - k_1 + 2) + 1 + k_2\big)F$$

$$D_1F - FD_1 = (k_1 - k_2 - 1)F$$

$$D_2E = 0 \quad \text{y} \quad FD_2 = 0$$

Conjetura

$$\mathcal{D}(W) \quad \text{generado por} \quad \{I, D_1, D_2, D_3, E, F\}$$

F. A. Grünbaum y MdI, *Matrix valued orthogonal polynomials related to $SU(N+1)$, their algebras of differential operators and the corresponding curves*, Exp. Math. **16**, No. 2, (2007), 189–207.

Parte C

Aplicaciones: una familia de procesos quasi-birth-and-death

Introducción: Procesos de nacimiento y muerte

Matriz de probabilidades de transición

$$P = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & & & \\ c_1 & b_1 & a_1 & & \\ & c_2 & b_2 & a_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad b_n \geqslant 0, a_n, c_n > 0, \quad a_n + b_n + c_n = 1$$

Introducción: Procesos de nacimiento y muerte

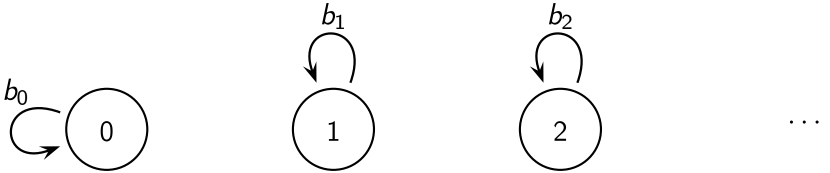
Matriz de probabilidades de transición

$$P = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & & & \\ c_1 & b_1 & a_1 & & \\ & c_2 & b_2 & a_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad b_n \geqslant 0, a_n, c_n > 0, \quad a_n + b_n + c_n = 1$$

Introducción: Procesos de nacimiento y muerte

Matriz de probabilidades de transición

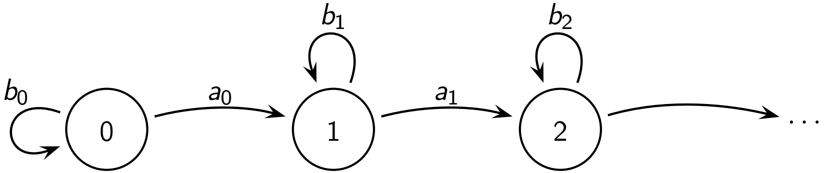
$$P = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & & & \\ c_1 & b_1 & a_1 & & \\ & c_2 & b_2 & a_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad b_n \geqslant 0, a_n, c_n > 0, \quad a_n + b_n + c_n = 1$$



Introducción: Procesos de nacimiento y muerte

Matriz de probabilidades de transición

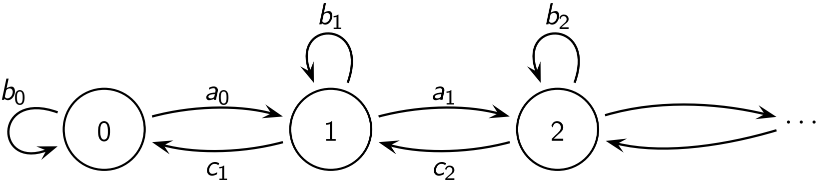
$$P = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & & & \\ c_1 & b_1 & a_1 & & \\ & c_2 & b_2 & a_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad b_n \geqslant 0, a_n, c_n > 0, \quad a_n + b_n + c_n = 1$$



Introducción: Procesos de nacimiento y muerte

Matriz de probabilidades de transición

$$P = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & & & \\ c_1 & b_1 & a_1 & & \\ & c_2 & b_2 & a_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad b_n \geqslant 0, a_n, c_n > 0, \quad a_n + b_n + c_n = 1$$



Introduciendo la familia de polinomios $(q_n)_n$ por las condiciones $q_{-1}(t) = 0$, $q_0(t) = 1$ y la fórmula de recursión

$$t \begin{pmatrix} q_0(t) \\ q_1(t) \\ \vdots \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} q_0(t) \\ q_1(t) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

i.e.

$$tq_n(t) = a_n q_{n+1}(t) + b_n q_n(t) + c_n q_{n-1}(t), \quad n = 0, 1, \ldots$$

existe una única medida $d\psi(t)$ con soporte en el intervalo $[-1, 1]$ tal que

$$\int_{-1}^{1} q_i(t) q_j(t) d\psi(t) \Big/ \int_{-1}^{1} q_j(t)^2 d\psi(t) = \delta_{ij}$$

Matriz de probabilidades de transición en n pasos:

$$\mathrm{Prob}\{E_i \to E_j \text{ en } n \text{ pasos}\} = P_{ij}^n = \sum_{k_1,k_2,\dots,k_{n-1}} P_{ik_1}P_{k_1k_2}\cdots P_{k_{n-1}j}$$

Karlin y McGregor (1959): obtener una representación integral de P^n

Fórmula de Karlin-McGregor

$$P_{ij}^n = \int_{-1}^1 t^n q_i(t)q_j(t)d\psi(t) \Big/ \int_{-1}^1 q_j(t)^2 d\psi(t)$$

Medida o distribución invariante

Un vector $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots)$ no nulo con entradas no negativas tal que

$$\pi P = \pi$$

$$\Rightarrow \pi_i = \frac{a_0 a_1 \cdots a_{i-1}}{c_1 c_2 \cdots c_i} = \frac{1}{\int_{-1}^1 q_i^2(t)d\psi(t)} = \frac{1}{\|q_i\|^2}$$

Matriz de probabilidades de transición en n pasos:

$$\text{Prob}\{E_i \to E_j \text{ en } n \text{ pasos}\} = P_{ij}^n = \sum_{k_1,k_2,\ldots,k_{n-1}} P_{ik_1} P_{k_1 k_2} \cdots P_{k_{n-1}j}$$

Karlin y McGregor (1959): obtener una representación integral de P^n

Fórmula de Karlin-McGregor

$$P_{ij}^n = \int_{-1}^{1} t^n q_i(t) q_j(t) d\psi(t) \Big/ \int_{-1}^{1} q_j(t)^2 d\psi(t)$$

Medida o distribución invariante

Un vector $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \ldots)$ no nulo con entradas no negativas tal que

$$\pi P = \pi$$

$$\Rightarrow \pi_i = \frac{a_0 a_1 \cdots a_{i-1}}{c_1 c_2 \cdots c_i} = \frac{1}{\int_{-1}^{1} q_i^2(t) d\psi(t)} = \frac{1}{\|q_i\|^2}$$

Matriz de probabilidades de transición en n pasos:

$$\text{Prob}\{E_i \to E_j \text{ en } n \text{ pasos}\} = P_{ij}^n = \sum_{k_1,k_2,\dots,k_{n-1}} P_{ik_1} P_{k_1 k_2} \cdots P_{k_{n-1} j}$$

Karlin y McGregor (1959): obtener una representación integral de P^n

Fórmula de Karlin-McGregor

$$P_{ij}^n = \int_{-1}^{1} t^n q_i(t) q_j(t) d\psi(t) \Big/ \int_{-1}^{1} q_j(t)^2 d\psi(t)$$

Medida o distribución invariante

Un vector $\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots)$ no nulo con entradas no negativas tal que

$$\boldsymbol{\pi} P = \boldsymbol{\pi}$$

$$\Rightarrow \pi_i = \frac{a_0 a_1 \cdots a_{i-1}}{c_1 c_2 \cdots c_i} = \frac{1}{\int_{-1}^{1} q_i^2(t) d\psi(t)} = \frac{1}{\|q_i\|^2}$$

Matriz de probabilidades de transición en n pasos:

$$\text{Prob}\{E_i \to E_j \text{ en } n \text{ pasos}\} = P_{ij}^n = \sum_{k_1,k_2,\dots,k_{n-1}} P_{ik_1} P_{k_1 k_2} \cdots P_{k_{n-1}j}$$

Karlin y McGregor (1959): obtener una representación integral de P^n

Fórmula de Karlin-McGregor

$$P_{ij}^n = \int_{-1}^{1} t^n q_i(t) q_j(t) d\psi(t) \Big/ \int_{-1}^{1} q_j(t)^2 d\psi(t)$$

Medida o distribución invariante

Un vector $\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots)$ no nulo con entradas no negativas tal que

$$\boldsymbol{\pi} P = \boldsymbol{\pi}$$

$$\Rightarrow \pi_i = \frac{a_0 a_1 \cdots a_{i-1}}{c_1 c_2 \cdots c_i} = \frac{1}{\int_{-1}^{1} q_i^2(t) d\psi(t)} = \frac{1}{\|q_i\|^2}$$

Matriz de probabilidades de transición en n pasos:

$$\mathrm{Prob}\{E_i \longrightarrow E_j \text{ en } n \text{ pasos}\} = P_{ij}^n = \sum_{k_1,k_2,\dots,k_{n-1}} P_{ik_1}P_{k_1k_2}\cdots P_{k_{n-1}j}$$

Karlin y McGregor (1959): obtener una representación integral de P^n

Fórmula de Karlin-McGregor

$$P_{ij}^n = \int_{-1}^1 t^n q_i(t)q_j(t)d\psi(t) \Big/ \int_{-1}^1 q_j(t)^2 d\psi(t)$$

Medida o distribución invariante

Un vector $\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots)$ no nulo con entradas no negativas tal que

$$\boldsymbol{\pi} P = \boldsymbol{\pi}$$

$$\Rightarrow \pi_i = \frac{a_0a_1\cdots a_{i-1}}{c_1c_2\cdots c_i} = \frac{1}{\int_{-1}^1 q_i^2(t)d\psi(t)} = \frac{1}{\|q_i\|^2}$$

Procesos quasi-birth-and-death

Matriz de probabilidades de transición

$$P = \begin{pmatrix} B_0 & A_0 & & & \\ C_1 & B_1 & A_1 & & \\ & C_2 & B_2 & A_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} (A_n)_{ij}, (B_n)_{ij}, (C_n)_{ij} \geqslant 0, \ \det(A_n), \det(C_n) \neq 0 \\ \sum_j (A_n)_{ij} + (B_n)_{ij} + (C_n)_{ij} = 1, \ i = 1, \ldots, N \end{array}$$

Caso particular: matriz pentadiagonal

$$P = \left(\begin{array}{cc|cc|cc|cc|c} b_0 & a_0 & d_0 & 0 & \multicolumn{2}{c|}{0} & & & \\ c_1 & b_1 & a_1 & d_1 & & & & & \\ \hline e_2 & c_2 & b_2 & a_2 & d_2 & 0 & \multicolumn{2}{c|}{0} & \\ 0 & e_3 & c_3 & b_3 & a_3 & d_3 & & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & e_4 & c_4 & b_4 & a_4 & d_4 & 0 & \ddots \\ & & 0 & e_5 & c_5 & b_5 & a_5 & d_5 & \\ \hline & & \multicolumn{2}{c|}{\ddots} & \multicolumn{2}{c|}{\ddots} & \multicolumn{2}{c|}{\ddots} & \ddots \end{array}\right)$$

Procesos quasi-birth-and-death

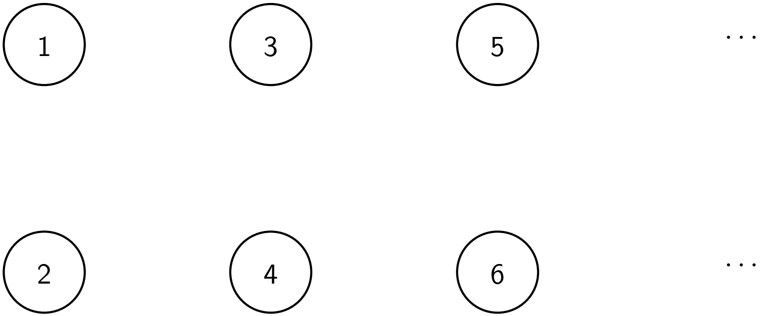
Matriz de probabilidades de transición

$$P = \begin{pmatrix} B_0 & A_0 & & & \\ C_1 & B_1 & A_1 & & \\ & C_2 & B_2 & A_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{l} (A_n)_{ij}, (B_n)_{ij}, (C_n)_{ij} \geqslant 0, \ \det(A_n), \det(C_n) \neq 0 \\ \sum_j (A_n)_{ij} + (B_n)_{ij} + (C_n)_{ij} = 1, \ i = 1, \ldots, N \end{array}$$

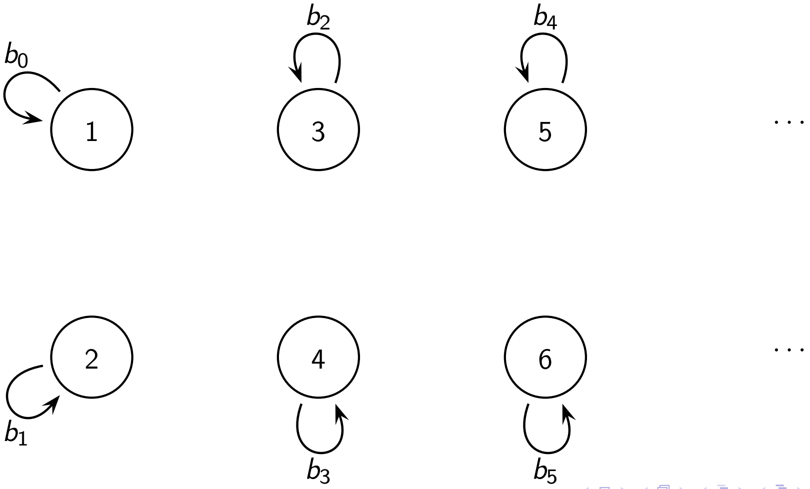
Caso particular: matriz pentadiagonal

$$P = \left(\begin{array}{cc|cc|cc|cc|c} b_0 & a_0 & d_0 & 0 & \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{0}} & & & \\ c_1 & b_1 & a_1 & d_1 & & & & & \\ \hline e_2 & c_2 & b_2 & a_2 & d_2 & 0 & \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{0}} & \\ 0 & e_3 & c_3 & b_3 & a_3 & d_3 & & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{0}} & e_4 & c_4 & b_4 & a_4 & d_4 & 0 & \ddots \\ & & 0 & e_5 & c_5 & b_5 & a_5 & d_5 & \\ \hline & & \multicolumn{2}{c|}{\ddots} & \multicolumn{2}{c|}{\ddots} & \multicolumn{2}{c|}{\ddots} & \ddots \end{array}\right)$$

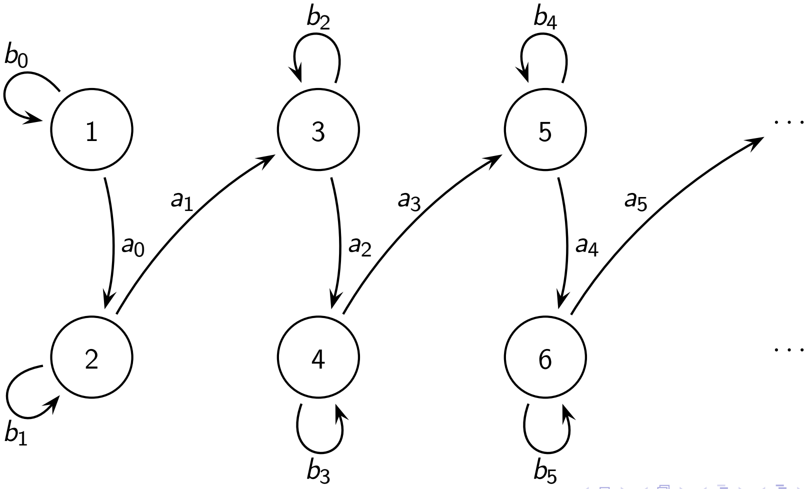
Diagrama



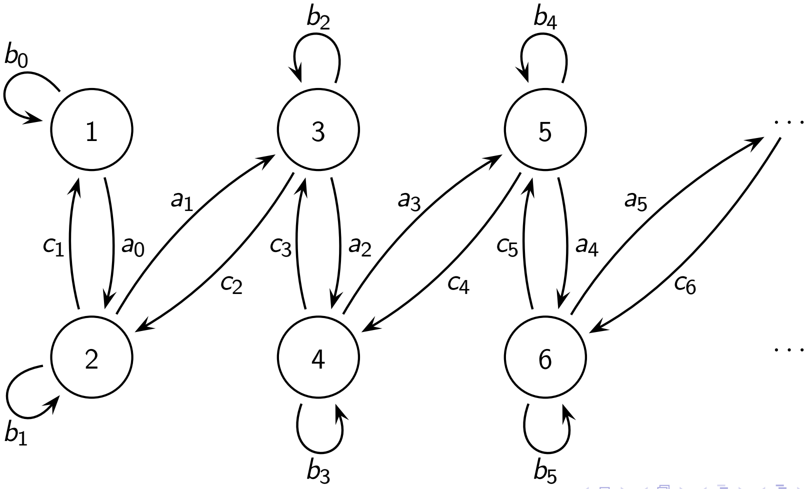
Diagrama



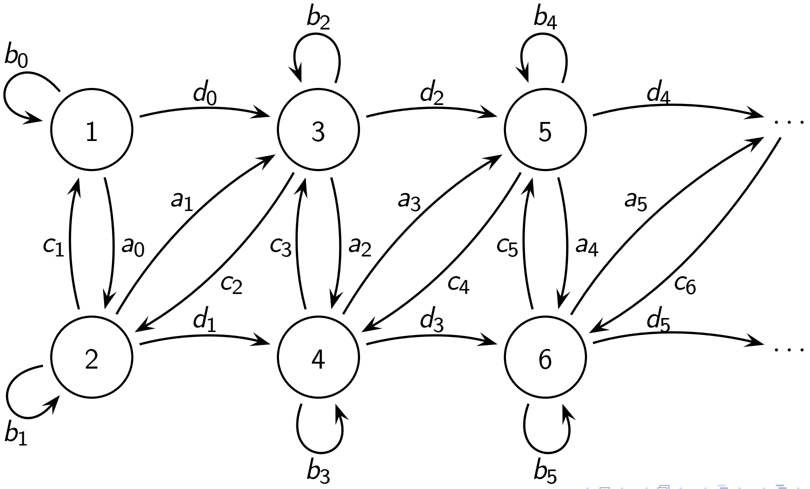
Diagrama



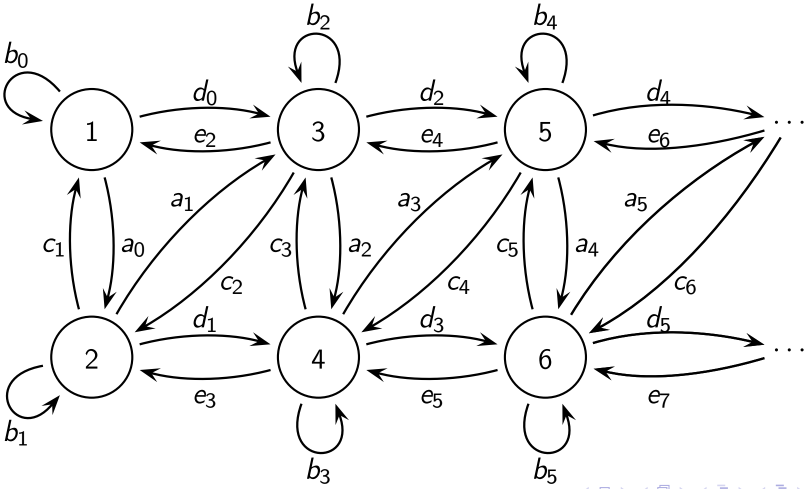
Diagrama



Diagrama


b_0
b_2
b_4
d_0
d_2
d_4
1
3
5
. . .
a_1
a_3
a_5
c_1
a_0
c_3
a_2
c_5
a_4
c_2
c_4
c_6
d_1
d_3
d_5
2
4
6
. . .
b_1
b_3
b_5

Diagrama


b_0
b_1
b_2
b_3
b_4
b_5
1
2
3
4
5
6
d_0
d_1
d_2
d_3
d_4
d_5
e_2
e_3
e_4
e_5
e_6
e_7
a_0
a_1
a_2
a_3
a_4
a_5
c_1
c_2
c_3
c_4
c_5
c_6
$\cdots$
$\cdots$

POM: Grünbaum (2007) y Dette-Reuther-Studden-Zygmunt (2007): Introduciendo la familia de polinomios matriciales $(Q_n)_n$ por las condiciones $Q_{-1}(t) = 0$, $Q_0(t) = I$ y la fórmula de recursión

$$t\begin{pmatrix} Q_0(t) \\ Q_1(t) \\ \vdots \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} Q_0(t) \\ Q_1(t) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

i.e.

$$tQ_n(t) = A_n Q_{n+1}(t) + B_n Q_n(t) + C_n Q_{n-1}(t), \quad n = 0, 1, \ldots$$

y bajo ciertas condiciones técnicas sobre A_n, B_n, C_n, existe un único peso matricial $dW(t)$ con soporte en el intervalo $[-1, 1]$ tal que

$$\left(\int_{-1}^{1} Q_i(t)dW(t)Q_j^*(t)\right)\left(\int_{-1}^{1} Q_j(t)dW(t)Q_j^*(t)\right)^{-1} = \delta_{ij}I$$

Fórmula de Karlin-McGregor

$$P_{ij}^n = \left(\int_{-1}^{1} t^n Q_i(t) dW(t) Q_j^*(t) \right) \left(\int_{-1}^{1} Q_j(t) dW(t) Q_j^*(t) \right)^{-1}$$

Medida o distribución invariante

Vector no nulo con entradas no negativas

$$\boldsymbol{\pi} = (\boldsymbol{\pi}^0; \boldsymbol{\pi}^1; \cdots) = (\pi_1^0, \pi_2^0, \ldots, \pi_N^0; \pi_1^1, \pi_2^1, \ldots, \pi_N^1; \cdots)$$

tal que

$$\boldsymbol{\pi} P = \boldsymbol{\pi}$$

$$\Rightarrow \pi_i^j = ?$$

Fórmula de Karlin-McGregor

$$P_{ij}^n = \left(\int_{-1}^{1} t^n Q_i(t) dW(t) Q_j^*(t) \right) \left(\int_{-1}^{1} Q_j(t) dW(t) Q_j^*(t) \right)^{-1}$$

Medida o distribución invariante

Vector no nulo con entradas no negativas

$$\boldsymbol{\pi} = (\boldsymbol{\pi}^0; \boldsymbol{\pi}^1; \cdots) \equiv (\pi_1^0, \pi_2^0, \ldots, \pi_N^0; \pi_1^1, \pi_2^1, \ldots, \pi_N^1; \cdots)$$

tal que

$$\boldsymbol{\pi} P = \boldsymbol{\pi}$$

$$\Rightarrow \pi_i^j = ?$$

La familia de procesos (tamaño $N \times N$)

Conjugación

$$W(t) = T^* \widetilde{W}(t) T$$

donde

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\dfrac{\alpha + \beta - k + 2}{\beta - k + 1} \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{W}(t) = t^{\alpha}(1-t)^{\beta} \begin{pmatrix} kt + \beta - k + 1 & (1-t)(\beta - k + 1) \\ (1-t)(\beta - k + 1) & (1-t)^2(\beta - k + 1) \end{pmatrix}$$

$t \in (0,1)$, $\alpha, \beta > -1$, $0 < k < \beta + 1$

Pacharoni-Tirao (2006)

Consideramos la familia de POM $(Q_n(t))_n$ tal que

- Relación de recurrencia a tres términos

$$tQ_n(t) = A_n Q_{n+1}(t) + B_n Q_n(t) + C_n Q_{n-1}(t), \quad n = 0, 1, \ldots$$

cuya matriz de Jacobi es estocástica

- Escogiendo $Q_0(t) = I$ se tiene que el coeficiente líder de Q_n es

$$\frac{\Gamma(\beta+2)\Gamma(\alpha+\beta+2n+2)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+2)\Gamma(\beta+n+2)} \begin{pmatrix} \frac{k+n}{k} & -\frac{n(\alpha+\beta+2n+2)}{(\alpha+\beta+n+2)(\alpha+\beta-k+2)} \\ 0 & \frac{(n+\alpha+\beta-k+2)(\alpha+\beta+2n+2)}{(\alpha+\beta+n+2)(\alpha+\beta-k+2)} \end{pmatrix}$$

- Además las normas son diagonales:

$$\|Q_n\|_W^2 = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+1)\Gamma(\beta+2)^2(n+\alpha+\beta-k+2)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+2)\Gamma(n+\beta+2)} \times \begin{pmatrix} \frac{n+k}{k(2n+\alpha+\beta+2)} & 0 \\ 0 & \frac{(n+\alpha+1)(n+k+1)}{(\beta-k+1)(2n+\alpha+\beta+3)(n+\alpha+\beta+2)} \end{pmatrix}$$

Consideramos la familia de POM $(Q_n(t))_n$ tal que

- Relación de recurrencia a tres términos

$$tQ_n(t) = A_nQ_{n+1}(t) + B_nQ_n(t) + C_nQ_{n-1}(t), \quad n = 0, 1, \dots$$

  cuya matriz de Jacobi es estocástica

- Escogiendo $Q_0(t) = I$ se tiene que el coeficiente líder de Q_n es

$$\frac{\Gamma(\beta+2)\Gamma(\alpha+\beta+2n+2)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+2)\Gamma(\beta+n+2)}\begin{pmatrix} \frac{k+n}{k} & -\frac{n(\alpha+\beta+2n+2)}{(\alpha+\beta+n+2)(\alpha+\beta-k+2)} \\ 0 & \frac{(n+\alpha+\beta-k+2)(\alpha+\beta+2n+2)}{(\alpha+\beta+n+2)(\alpha+\beta-k+2)} \end{pmatrix}$$

- Además las normas son diagonales:

$$\|Q_n\|_W^2 = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+1)\Gamma(\beta+2)^2(n+\alpha+\beta-k+2)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+2)\Gamma(n+\beta+2)} \times \begin{pmatrix} \frac{n+k}{k(2n+\alpha+\beta+2)} & 0 \\ 0 & \frac{(n+\alpha+1)(n+k+1)}{(\beta-k+1)(2n+\alpha+\beta+3)(n+\alpha+\beta+2)} \end{pmatrix}$$

Consideramos la familia de POM $(Q_n(t))_n$ tal que

- Relación de recurrencia a tres términos

$$tQ_n(t) = A_n Q_{n+1}(t) + B_n Q_n(t) + C_n Q_{n-1}(t), \quad n = 0, 1, \ldots$$

cuya matriz de Jacobi es estocástica

- Escogiendo $Q_0(t) = I$ se tiene que el coeficiente líder de Q_n es

$$\frac{\Gamma(\beta+2)\Gamma(\alpha+\beta+2n+2)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+2)\Gamma(\beta+n+2)} \begin{pmatrix} \frac{k+n}{k} & -\frac{n(\alpha+\beta+2n+2)}{(\alpha+\beta+n+2)(\alpha+\beta-k+2)} \\ 0 & \frac{(n+\alpha+\beta-k+2)(\alpha+\beta+2n+2)}{(\alpha+\beta+n+2)(\alpha+\beta-k+2)} \end{pmatrix}$$

- Además las normas son diagonales:

$$\|Q_n\|_W^2 = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+1)\Gamma(\beta+2)^2(n+\alpha+\beta-k+2)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+2)\Gamma(n+\beta+2)} \times \begin{pmatrix} \frac{n+k}{k(2n+\alpha+\beta+2)} & 0 \\ 0 & \frac{(n+\alpha+1)(n+k+1)}{(\beta-k+1)(2n+\alpha+\beta+3)(n+\alpha+\beta+2)} \end{pmatrix}$$

Matriz de Jacobi pentadiagonal

Caso particular $\alpha = \beta = 0$, $k = 1/2$:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & & & & & & \\ \frac{2}{9} & \frac{7}{18} & \frac{4}{45} & \frac{3}{10} & & & & & \\ \frac{5}{36} & \frac{1}{18} & \frac{107}{225} & \frac{3}{50} & \frac{27}{50} & & & & \\ & \frac{1}{6} & \frac{4}{75} & \frac{23}{50} & \frac{6}{175} & \frac{2}{7} & & & \\ & & \frac{14}{75} & \frac{2}{75} & \frac{597}{1225} & \frac{4}{147} & \frac{40}{147} & & \\ & & & \frac{1}{5} & \frac{6}{245} & \frac{47}{98} & \frac{8}{441} & \frac{5}{18} & \\ & & & & \frac{81}{392} & \frac{3}{196} & \frac{1955}{3969} & \frac{5}{324} & \frac{175}{648} \\ & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Medida invariante

Medida invariante

El vector fila

$$\boldsymbol{\pi} = (\boldsymbol{\pi}^0; \boldsymbol{\pi}^1; \cdots)$$

$$\boldsymbol{\pi}^n = \left(\frac{1}{\left(\|Q_n\|_W^2\right)_{1,1}}, \frac{1}{\left(\|Q_n\|_W^2\right)_{2,2}}, \cdots, \frac{1}{\left(\|Q_n\|_W^2\right)_{N,N}} \right), \quad n \geqslant 0$$

es una medida invariante de P.

Caso particular $N = 2$, $\alpha = \beta = 0$, $k = 1/2$:

$$\pi^n = \left(\frac{2(n+1)^3}{(2n+3)(2n+1)}, \frac{(n+1)(n+2)}{2n+3} \right), \quad n \geqslant 0$$

$$\pi = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}; \frac{16}{15}, \frac{6}{5}; \frac{54}{35}, \frac{12}{7}; \frac{128}{63}, \frac{20}{9}; \frac{250}{99}, \frac{30}{11}; \frac{432}{143}, \frac{42}{13}; \frac{686}{195}, \frac{56}{15}; \cdots \right)$$

Medida invariante

Medida invariante

El vector fila

$$\boldsymbol{\pi} = (\boldsymbol{\pi}^0; \boldsymbol{\pi}^1; \cdots)$$

$$\boldsymbol{\pi}^n = \left(\frac{1}{\left(\|Q_n\|_W^2\right)_{1,1}}, \frac{1}{\left(\|Q_n\|_W^2\right)_{2,2}}, \cdots, \frac{1}{\left(\|Q_n\|_W^2\right)_{N,N}} \right), \quad n \geqslant 0$$

es una medida invariante de P.

Caso particular $N = 2$, $\alpha = \beta = 0$, $k = 1/2$:

$$\boldsymbol{\pi}^n = \left(\frac{2(n+1)^3}{(2n+3)(2n+1)}, \frac{(n+1)(n+2)}{2n+3} \right), \quad n \geqslant 0$$

$$\boldsymbol{\pi} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}; \frac{16}{15}, \frac{6}{5}; \frac{54}{35}, \frac{12}{7}; \frac{128}{63}, \frac{20}{9}; \frac{250}{99}, \frac{30}{11}; \frac{432}{143}, \frac{42}{13}; \frac{686}{195}, \frac{56}{15}; \cdots \right)$$

F. A. Grünbaum y MdI, *Matrix valued orthogonal polynomials arising from group representation theory and a family of quasi-birth-and-death processes*, bajo revisión en SIAM Journal of Matrix Analysis and applications.

Gracias por su atención