Nuevos métodos para el análisis espectral de caminatas aleatorias

Manuel Domínguez de la Iglesia

Instituto de Matemáticas C.U., UNAM

Universidad de Colima
Colima, 17 de noviembre de 2017

Outline

Índice

Caminatas aleatorias I

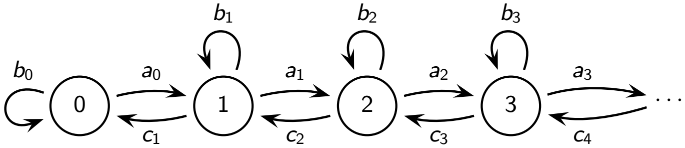
Sea $\{X_n : n = 0, 1, \ldots\}$ una caminata aleatoria (RW) con espacio de estados en los enteros no negativos $\mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Las RWs son cadenas de Markov a tiempo discreto cuyas transiciones sólo son posibles entre estados adyacentes o vecinos, i.e. para todo par de estados $i, j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ se tiene que

$$\mathbb{P}\left(X_{n+1} = j | X_n = i\right) = \begin{cases} a_n, & \text{si} \quad j = i + 1 \\ b_n, & \text{si} \quad j = i \\ c_n, & \text{si} \quad j = i - 1 \\ 0, & \text{si} \quad |i - j| > 1 \end{cases}$$

donde $0 < a_n, c_{n+1} < 1, n \geq 0$ (irreducible), $a_0 + b_0 \leq 1$ y $a_n + b_n + c_n = 1$.

Un diagrama de las posibles transiciones es



Caminatas aleatorias II

La RW está caracterizada por su matriz de transición de probabilidades (MTP) en un paso P, cuyas entradas (i,j) vienen dadas por

$$P_{ij} = \mathbb{P}\left(X_{n+1} = j | X_n = i\right)$$

De esta manera

$$P = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & 0 & & \\ c_1 & b_1 & a_1 & 0 & \\ 0 & c_2 & b_2 & a_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad b_i \geq 0, a_i, c_i > 0, \quad a_i + b_i + c_i = 1$$

Obsérvese que P es una matriz tridiagonal semi-infinita (matriz de Jacobi). La matriz P se dice que es estocástica.

Hay dos cuestiones importantes cuando se trabaja con RW:

- Determinar $P_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}\left(X_n = j | X_0 = i\right)$. Ésta viene dada por $(P^n)_{ij}$.
- Determinar la medida o distribución invariante. Ésta viene dada por un vector $\pi = (\pi_i)_i, \pi_i \geq 0$ tal que $\pi P = \pi$. Sus componentes (normalizadas) son

$$\pi_0 = 1, \quad \pi_i = \frac{a_0 a_1 \cdots a_{i-1}}{c_1 c_2 \cdots c_i}$$

Caminatas aleatorias II

La RW está caracterizada por su matriz de transición de probabilidades (MTP) en un paso P, cuyas entradas (i,j) vienen dadas por

$$P_{ij} = \mathbb{P}\left(X_{n+1} = j | X_n = i\right)$$

De esta manera

$$P = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & 0 & & \\ c_1 & b_1 & a_1 & 0 & \\ 0 & c_2 & b_2 & a_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad b_i \geq 0, a_i, c_i > 0, \quad a_i + b_i + c_i = 1$$

Obsérvese que P es una matriz tridiagonal semi-infinita (matriz de Jacobi). La matriz P se dice que es estocástica.

Hay dos cuestiones importantes cuando se trabaja con RW:

- Determinar $P_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}\left(X_n = j | X_0 = i\right)$. Ésta viene dada por $(P^n)_{ij}$.
- Determinar la medida o distribución invariante. Ésta viene dada por un vector $\boldsymbol{\pi} = (\pi_i)_i, \pi_i \geq 0$ tal que $\boldsymbol{\pi} P = \boldsymbol{\pi}$. Sus componentes (normalizadas) son

$$\pi_0 = 1, \quad \pi_i = \frac{a_0 a_1 \cdots a_{i-1}}{c_1 c_2 \cdots c_i}$$

Caminatas aleatorias II

La RW está caracterizada por su matriz de transición de probabilidades (MTP) en un paso P, cuyas entradas (i,j) vienen dadas por

$$P_{ij} = \mathbb{P}\left(X_{n+1} = j | X_n = i\right)$$

De esta manera

$$P = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & 0 & & \\ c_1 & b_1 & a_1 & 0 & \\ 0 & c_2 & b_2 & a_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad b_i \geq 0, a_i, c_i > 0, \quad a_i + b_i + c_i = 1$$

Obsérvese que P es una matriz tridiagonal semi-infinita (matriz de Jacobi). La matriz P se dice que es estocástica.

Hay dos cuestiones importantes cuando se trabaja con RW:

- Determinar $P_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}\left(X_n = j | X_0 = i\right)$. Ésta viene dada por $(P^n)_{ij}$.
- Determinar la medida o distribución invariante. Ésta viene dada por un vector $\boldsymbol{\pi} = (\pi_i)_i, \pi_i \geq 0$ tal que $\boldsymbol{\pi} P = \boldsymbol{\pi}$. Sus componentes (normalizadas) son

$$\pi_0 = 1, \quad \pi_i = \frac{a_0 a_1 \cdots a_{i-1}}{c_1 c_2 \cdots c_i}$$

Polinomios ortogonales I

Sea ψ una medida de Borel positiva sobre $\mathbb{R}$ con soporte infinito $\mathcal{S}$ y asumamos que todos los momentos existen y son finitos.

Asociado a esta medida ψ se puede considerar el espacio de Hilbert $L^2_\psi(\mathcal{S})$ con el producto interno

$$(f,g)_\psi = \int_{\mathcal{S}} f(x)\overline{g(x)}d\psi(x)$$

de todas las funciones medibles f tal que $(f,g)_\psi = \|f\|^2_\psi < \infty$.

Diremos que $(Q_n)_n$ es una sucesión de polinomios ortogonales (PO) con respecto a ψ si deg $Q_n = n$ y $(p_n, p_m)_\psi = h_n^2 \delta_{nm}$.

Todas las familias de PO satisfacen una relación de recurrencia a tres términos

$$xQ_n(x) = a_n Q_{n+1}(x) + b_n Q_n(x) + c_n Q_{n-1}(x), \quad Q_{-1} = 0, \quad Q_0 = 1$$

donde

$$a_n = (xQ_n, Q_{n+1})_\psi, \quad b_n = (xQ_n, Q_n)_\psi, \quad c_n = (xQ_n, Q_{n-1})_\psi$$

Se observa que $b_n \in \mathbb{R}$. Para la familia ortonormal se tiene además que $a_n = h_n/h_{n+1} > 0$ y $c_n = a_{n-1}$.

Polinomios ortogonales I

Sea ψ una medida de Borel positiva sobre $\mathbb{R}$ con soporte infinito $\mathcal{S}$ y asumamos que todos los momentos existen y son finitos.
Asociado a esta medida ψ se puede considerar el espacio de Hilbert $L^2_\psi(\mathcal{S})$ con el producto interno

$$(f,g)_\psi = \int_{\mathcal{S}} f(x)\overline{g(x)}d\psi(x)$$

de todas las funciones medibles f tal que $(f,g)_\psi = \|f\|^2_\psi < \infty$.

Diremos que $(Q_n)_n$ es una sucesión de polinomios ortogonales (PO) con respecto a ψ si $\deg Q_n = n$ y $(p_n, p_m)_\psi = h_n^2\delta_{nm}$.

Todas las familias de PO satisfacen una relación de recurrencia a tres términos

$$xQ_n(x) = a_nQ_{n+1}(x) + b_nQ_n(x) + c_nQ_{n-1}(x), \quad Q_{-1} = 0, \quad Q_0 = 1$$

donde

$$a_n = (xQ_n, Q_{n+1})_\psi, \quad b_n = (xQ_n, Q_n)_\psi, \quad c_n = (xQ_n, Q_{n-1})_\psi$$

Se observa que $b_n \in \mathbb{R}$. Para la familia ortonormal se tiene además que $a_n = h_n/h_{n+1} > 0$ y $c_n = a_{n-1}$.

Polinomios ortogonales I

Sea ψ una medida de Borel positiva sobre $\mathbb{R}$ con soporte infinito $\mathcal{S}$ y asumamos que todos los momentos existen y son finitos.
Asociado a esta medida ψ se puede considerar el espacio de Hilbert $L^2_\psi(\mathcal{S})$ con el producto interno

$$(f,g)_\psi = \int_{\mathcal{S}} f(x)\overline{g(x)}d\psi(x)$$

de todas las funciones medibles f tal que $(f,g)_\psi = \|f\|^2_\psi < \infty$.

Diremos que $(Q_n)_n$ es una sucesión de polinomios ortogonales (PO) con respecto a ψ si $\deg Q_n = n$ y $(p_n, p_m)_\psi = h_n^2 \delta_{nm}$.

Todas las familias de PO satisfacen una relación de recurrencia a tres términos

$$xQ_n(x) = a_n Q_{n+1}(x) + b_n Q_n(x) + c_n Q_{n-1}(x), \quad Q_{-1} = 0, \quad Q_0 = 1$$

donde

$$a_n = (xQ_n, Q_{n+1})_\psi, \quad b_n = (xQ_n, Q_n)_\psi, \quad c_n = (xQ_n, Q_{n-1})_\psi$$

Se observa que $b_n \in \mathbb{R}$. Para la familia ortonormal se tiene además que $a_n = h_n/h_{n+1} > 0$ y $c_n = a_{n-1}$.

Polinomios ortogonales I

Sea ψ una medida de Borel positiva sobre $\mathbb{R}$ con soporte infinito $\mathcal{S}$ y asumamos que todos los momentos existen y son finitos.
Asociado a esta medida ψ se puede considerar el espacio de Hilbert $L^2_\psi(\mathcal{S})$ con el producto interno

$$(f,g)_\psi = \int_{\mathcal{S}} f(x)\overline{g(x)}d\psi(x)$$

de todas las funciones medibles f tal que $(f,g)_\psi = \|f\|^2_\psi < \infty$.

Diremos que $(Q_n)_n$ es una sucesión de polinomios ortogonales (PO) con respecto a ψ si $\deg Q_n = n$ y $(p_n, p_m)_\psi = h_n^2 \delta_{nm}$.

Todas las familias de PO satisfacen una relación de recurrencia a tres términos

$$xQ_n(x) = a_n Q_{n+1}(x) + b_n Q_n(x) + c_n Q_{n-1}(x), \quad Q_{-1} = 0, \quad Q_0 = 1$$

donde

$$a_n = (xQ_n, Q_{n+1})_\psi, \quad b_n = (xQ_n, Q_n)_\psi, \quad c_n = (xQ_n, Q_{n-1})_\psi$$

Se observa que $b_n \in \mathbb{R}$. Para la familia ortonormal se tiene además que $a_n = h_n/h_{n+1} > 0$ y $c_n = a_{n-1}$.

Polinomios ortogonales II

Otra manera alternativa de escribir la relación de recurrencia a tres términos es denotando el vector de POs como

$$Q = (Q_0(x), Q_1(x), \ldots)^T$$

Entonces se tiene que $xQ = JQ$ donde J es la matriz tridiagonal

$$J = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & 0 & & \\ c_1 & b_1 & a_1 & 0 & \\ 0 & c_2 & b_2 & a_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Esta matriz se conoce como matriz de Jacobi y tiene la misma estructura que la MTP de una RW. Cuando la familia es la ortonormal, J es simétrica.

El resultado inverso (o Teorema Espectral o de Favard) también es cierto, i.e. para una matriz de Jacobi J (simétrica) con $b_n \in \mathbb{R}$ y $a_n > 0$, entonces existe una única medida ψ positiva en $\mathbb{R}$ (medida espectral) tal que los correspondientes polinomios Q_n son ortogonales.

Polinomios ortogonales II

Otra manera alternativa de escribir la relación de recurrencia a tres términos es denotando el vector de POs como

$$Q = (Q_0(x), Q_1(x), \dots)^T$$

Entonces se tiene que $xQ = JQ$ donde J es la matriz tridiagonal

$$J = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & 0 & & \\ c_1 & b_1 & a_1 & 0 & \\ 0 & c_2 & b_2 & a_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Esta matriz se conoce como matriz de Jacobi y tiene la misma estructura que la MTP de una RW. Cuando la familia es la ortonormal, J es simétrica.

El resultado inverso (o Teorema Espectral o de Favard) también es cierto, i.e. para una matriz de Jacobi J (simétrica) con $b_n \in \mathbb{R}$ y $a_n > 0$, entonces existe una única medida ψ positiva en $\mathbb{R}$ (medida espectral) tal que los correspondientes polinomios Q_n son ortogonales.

Fórmula de Karlin-McGregor

Sea P la MTP de una RW irreducible. Construimos una sucesión de polinomios $(Q_n)_n$ mediante la relación

$$xQ = PQ, \quad Q = (Q_0(x), Q_1(x), \ldots)^T$$

tal que $Q_0(x) = 1$. Se observa que $Q_n(x)$ es un polinomio en x de grado exactamente n y que verifican una relación de recurrencia a tres términos

$$xQ_n(x) = a_n Q_{n+1}(x) + b_n Q_n(x) + c_n Q_{n-1}(x), \quad Q_{-1} = 0, \quad Q_0 = 1$$

Para poder aplicar el Teorema Espectral necesitamos *simetrizar* la matriz P. Esto siempre es posible hacerlo mediante el vector invariante $\pi = (\pi_i)_i$, ya que éste verifica las ecuaciones de simetría $\pi_i P_{ij} = \pi_j P_{ji}$. La matriz $\Pi P \Pi^{-1}$ es simétrica, donde $\Pi = \mathrm{diag}\{\sqrt{\pi_0}, \sqrt{\pi_1}, \ldots\}$.

Lo anterior es equivalente a decir que P es un operador *lineal, autoadjunto y acotado* de normal ≤ 1 en el espacio de Hilbert

$$\ell^2_\pi(\mathbb{Z}_{\geq 0}) = \left\{ (a_n)_n : (a,a)_\pi = \sum_{n \geq 0} |a_n|^2 \pi_n < \infty \right\}$$

Fórmula de Karlin-McGregor

Sea P la MTP de una RW irreducible. Construimos una sucesión de polinomios $(Q_n)_n$ mediante la relación

$$xQ = PQ, \quad Q = (Q_0(x), Q_1(x), \ldots)^T$$

tal que $Q_0(x) = 1$. Se observa que $Q_n(x)$ es un polinomio en x de grado exactamente n y que verifican una relación de recurrencia a tres términos

$$xQ_n(x) = a_n Q_{n+1}(x) + b_n Q_n(x) + c_n Q_{n-1}(x), \quad Q_{-1} = 0, \quad Q_0 = 1$$

Para poder aplicar el Teorema Espectral necesitamos *simetrizar* la matriz P. Esto siempre es posible hacerlo mediante el vector invariante $\boldsymbol{\pi} = (\pi_i)_i$, ya que éste verifica las ecuaciones de simetría $\pi_i P_{ij} = \pi_j P_{ji}$. La matriz $\Pi P \Pi^{-1}$ es simétrica, donde $\Pi = \mathrm{diag}\{\sqrt{\pi_0}, \sqrt{\pi_1}, \ldots\}$.

Lo anterior es equivalente a decir que P es un operador *lineal, autoadjunto y acotado* de normal ≤ 1 en el espacio de Hilbert

$$\ell^2_\pi(\mathbb{Z}_{\geq 0}) = \left\{ (a_n)_n : (a, a)_\pi = \sum_{n\geq 0} |a_n|^2 \pi_n < \infty \right\}$$

Fórmula de Karlin-McGregor

Sea P la MTP de una RW irreducible. Construimos una sucesión de polinomios $(Q_n)_n$ mediante la relación

$$xQ = PQ, \quad Q = (Q_0(x), Q_1(x), \dots)^T$$

tal que $Q_0(x) = 1$. Se observa que $Q_n(x)$ es un polinomio en x de grado exactamente n y que verifican una relación de recurrencia a tres términos

$$xQ_n(x) = a_n Q_{n+1}(x) + b_n Q_n(x) + c_n Q_{n-1}(x), \quad Q_{-1} = 0, \quad Q_0 = 1$$

Para poder aplicar el Teorema Espectral necesitamos *simetrizar* la matriz P. Esto siempre es posible hacerlo mediante el vector invariante $\boldsymbol{\pi} = (\pi_i)_i$, ya que éste verifica las ecuaciones de simetría $\pi_i P_{ij} = \pi_j P_{ji}$. La matriz $\Pi P \Pi^{-1}$ es simétrica, donde $\Pi = \mathrm{diag}\{\sqrt{\pi_0}, \sqrt{\pi_1}, \dots\}$.

Lo anterior es equivalente a decir que P es un operador *lineal, autoadjunto y acotado* de normal ≤ 1 en el espacio de Hilbert

$$\ell^2_{\boldsymbol{\pi}}(\mathbb{Z}_{\geq 0}) = \left\{ (a_n)_n : (a, a)_{\boldsymbol{\pi}} = \sum_{n \geq 0} |a_n|^2 \pi_n < \infty \right\}$$

El Teorema Espectral (o teorema de Favard) asegura que hay una correspondencia biyectiva entre operadores tridiagonales (como P) autoadjuntos y acotados (en norma 1) en $\ell^2_{\pi}(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ y medidas positivas $d\psi(x)$ en $\mathbb{R}$ con soporte $[-1,1]$ sobre $L^2_{\psi}([-1,1])$ (medidas espectrales). De hecho para f analítica en $|x|<1$ se tiene

$$\left(e^{(0)}, f(P)e^{(0)}\right)_{\pi} = \int_{-1}^{1} f(x)d\psi(x)$$

donde $e^{(0)} = (1,0,0,\ldots)^T$.

Teorema (Representación de Karlin-McGregor)

Se tiene la siguiente representación integral de P^n

$$P^n_{ij} = \mathbb{P}(X_n = j | X_0 = i) = \pi_j \int_{-1}^{1} x^n Q_i(x)Q_j(x)d\psi(x)$$

donde π_j son las componentes de la medida o distribución invariante y en este caso se tiene que

$$\pi_j = \left(\int_{-1}^{1} Q_j^2(x)d\psi(x)\right)^{-1}$$

Además, la familia de polinomios $(Q_n)_n$ es ortogonal con respecto a $d\psi$ y completa en el espacio $L^2_{\psi}([-1,1])$.

El Teorema Espectral (o teorema de Favard) asegura que hay una correspondencia biyectiva entre operadores tridiagonales (como P) autoadjuntos y acotados (en norma 1) en $\ell^2_{\boldsymbol{\pi}}(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ y medidas positivas $d\psi(x)$ en $\mathbb{R}$ con soporte $[-1,1]$ sobre $L^2_\psi([-1,1])$ (medidas espectrales). De hecho para f analítica en $|x|<1$ se tiene

$$\left(e^{(0)}, f(P)e^{(0)}\right)_{\boldsymbol{\pi}} = \int_{-1}^{1} f(x)d\psi(x)$$

donde $e^{(0)} = (1,0,0,\ldots)^T$.

Teorema (Representación de Karlin-McGregor)

Se tiene la siguiente representación integral de P^n

$$P^n_{ij} = \mathbb{P}(X_n = j | X_0 = i) = \pi_j \int_{-1}^{1} x^n Q_i(x)Q_j(x)d\psi(x)$$

donde π_j son las componentes de la medida o distribución invariante y en este caso se tiene que

$$\pi_j = \left(\int_{-1}^{1} Q_j^2(x)d\psi(x)\right)^{-1}$$

Además, la familia de polinomios $(Q_n)_n$ es ortogonal con respecto a $d\psi$ y completa en el espacio $L^2_\psi([-1,1])$.

Métodos para calcular la medida ψ

Se define la *caminata aleatoria k-asociada* a P a una nueva caminata aleatoria cuya matriz de transición $\tilde{P}$ es la misma que la de P pero quitándole las primeras k filas y columnas.

Para el caso $k=0$ sea ψ la medida asociada a P y $\tilde{\psi}$ la medida asociada a $\tilde{P}$. Se tiene el siguiente

Teorema

Para una medida ω con soporte $[-1,1]$, se define la transformada de Cauchy o Stieltjes como

$$B(z;\omega)=\int_{-1}^{1}\frac{d\omega(x)}{x-z},\quad z\in\mathbb{C}\setminus[-1,1]$$

Se tiene entonces que

$$B(z;\psi)\left(z-b_0+a_0c_1B(z;\tilde{\psi})\right)+1=0$$

Para calcular la medida ψ sabiendo su transformada de Cauchy se suele usar la fórmula de inversión de Stieltjes

$$\pi\int_{x_1}^{x_2}d\psi(x)+\frac{\pi}{2}\left[d_1\delta_{x_1}+d_2\delta_{x_2}\right]=\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{x_1}^{x_2}\operatorname{Im}B(\xi+i\epsilon;\psi)d\xi$$

Métodos para calcular la medida ψ

Se define la *caminata aleatoria k-asociada* a P a una nueva caminata aleatoria cuya matriz de transición $\tilde{P}$ es la misma que la de P pero quitándole las primeras k filas y columnas.
Para el caso $k=0$ sea ψ la medida asociada a P y $\tilde{\psi}$ la medida asociada a $\tilde{P}$.
Se tiene el siguiente

Teorema

Para una medida ω con soporte $[-1,1]$, se define la transformada de Cauchy o Stieltjes como

$$B(z;\omega)=\int_{-1}^{1}\frac{d\omega(x)}{x-z},\quad z\in\mathbb{C}\setminus[-1,1]$$

Se tiene entonces que

$$B(z;\psi)\left(z-b_0+a_0c_1B(z;\tilde{\psi})\right)+1=0$$

Para calcular la medida ψ sabiendo su transformada de Cauchy se suele usar la fórmula de inversión de Stieltjes

$$\pi\int_{x_1}^{x_2}d\psi(x)+\frac{\pi}{2}\left[d_1\delta_{x_1}+d_2\delta_{x_2}\right]=\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{x_1}^{x_2}\mathrm{Im}B(\xi+i\epsilon;\psi)d\xi$$

Métodos para calcular la medida ψ

Se define la *caminata aleatoria k-asociada* a P a una nueva caminata aleatoria cuya matriz de transición $\tilde{P}$ es la misma que la de P pero quitándole las primeras k filas y columnas.
Para el caso $k = 0$ sea ψ la medida asociada a P y $\tilde{\psi}$ la medida asociada a $\tilde{P}$.
Se tiene el siguiente

Teorema

Para una medida ω con soporte $[-1,1]$, se define la transformada de Cauchy o Stieltjes como

$$B(z;\omega) = \int_{-1}^{1} \frac{d\omega(x)}{x - z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus [-1,1]$$

Se tiene entonces que

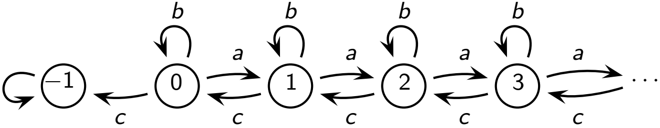
$$B(z;\psi)\left(z - b_0 + a_0 c_1 B(z;\tilde{\psi})\right) + 1 = 0$$

Para calcular la medida ψ sabiendo su transformada de Cauchy se suele usar la fórmula de inversión de Stieltjes

$$\pi \int_{x_1}^{x_2} d\psi(x) + \frac{\pi}{2}\left[d_1 \delta_{x_1} + d_2 \delta_{x_2}\right] = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{x_1}^{x_2} \operatorname{Im} B(\xi + i\epsilon;\psi)\, d\xi$$

Ejemplo: RW con coeficientes constantes

Sea P con $a_n = a, c_{n+1} = c, b_n = b, n \geq 0$, con $a + b + c = 1$.



P y $\tilde{P}$ son la misma y por lo tanto sus correspondientes medidas ψ. La transformada de Cauchy $B(z) = B(z;\psi)$ debe verificar

$$acB(z)^2 + (z-b)B(z) + 1 = 0$$

Por lo tanto

$$B(z) = \frac{b - z + \sqrt{(z-\sigma_+)(z-\sigma_-)}}{2ac}, \quad \sigma_\pm = 1 - (\sqrt{a} \mp \sqrt{c})^2$$

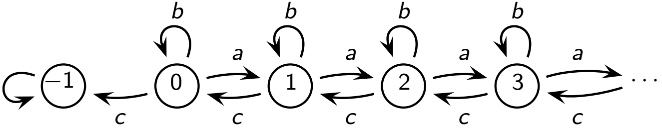
Por lo tanto la medida ψ está definida por

$$d\psi(x) = \frac{\sqrt{(\sigma_+ - x)(x-\sigma_-)}}{2\pi ac}dx, \quad x \in [\sigma_-, \sigma_+] \subseteq [-1,1]$$

En este caso la familia de polinomios $(Q_n)_n$ se pueden escribir en términos de los polinomios de Chebyshev de segunda especie.

Ejemplo: RW con coeficientes constantes

Sea P con $a_n = a, c_{n+1} = c, b_n = b, n \geq 0$, con $a + b + c = 1$.



P y $\tilde{P}$ son la misma y por lo tanto sus correspondientes medidas ψ. La transformada de Cauchy $B(z) = B(z;\psi)$ debe verificar

$$acB(z)^2 + (z - b)B(z) + 1 = 0$$

Por lo tanto

$$B(z) = \frac{b - z + \sqrt{(z-\sigma_+)(z-\sigma_-)}}{2ac}, \quad \sigma_\pm = 1 - (\sqrt{a} \mp \sqrt{c})^2$$

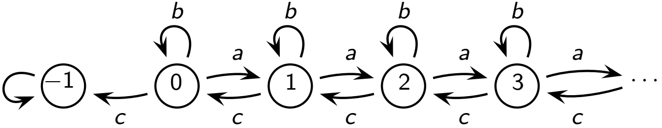
Por lo tanto la medida ψ está definida por

$$d\psi(x) = \frac{\sqrt{(\sigma_+ - x)(x - \sigma_-)}}{2\pi ac}dx, \quad x \in [\sigma_-, \sigma_+] \subseteq [-1, 1]$$

En este caso la familia de polinomios $(Q_n)_n$ se pueden escribir en términos de los polinomios de Chebyshev de segunda especie.

Ejemplo: RW con coeficientes constantes

Sea P con $a_n = a, c_{n+1} = c, b_n = b, n \geq 0$, con $a + b + c = 1$.



P y $\tilde{P}$ son la misma y por lo tanto sus correspondientes medidas ψ. La transformada de Cauchy $B(z) = B(z; \psi)$ debe verificar

$$acB(z)^2 + (z - b)B(z) + 1 = 0$$

Por lo tanto

$$B(z) = \frac{b - z + \sqrt{(z - \sigma_+)(z - \sigma_-)}}{2ac}, \quad \sigma_\pm = 1 - (\sqrt{a} \mp \sqrt{c})^2$$

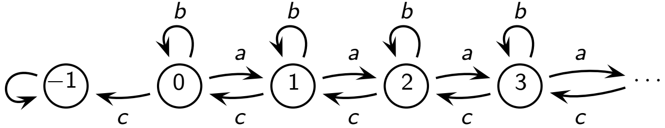
Por lo tanto la medida ψ está definida por

$$d\psi(x) = \frac{\sqrt{(\sigma_+ - x)(x - \sigma_-)}}{2\pi ac} dx, \quad x \in [\sigma_-, \sigma_+] \subseteq [-1, 1]$$

En este caso la familia de polinomios $(Q_n)_n$ se pueden escribir en términos de los polinomios de Chebyshev de segunda especie.

Ejemplo: RW con coeficientes constantes

Sea P con $a_n = a, c_{n+1} = c, b_n = b, n \geq 0$, con $a + b + c = 1$.



P y $\tilde{P}$ son la misma y por lo tanto sus correspondientes medidas ψ. La transformada de Cauchy $B(z) = B(z;\psi)$ debe verificar

$$acB(z)^2 + (z - b)B(z) + 1 = 0$$

Por lo tanto

$$B(z) = \frac{b - z + \sqrt{(z-\sigma_+)(z-\sigma_-)}}{2ac}, \quad \sigma_\pm = 1 - (\sqrt{a} \mp \sqrt{c})^2$$

Por lo tanto la medida ψ está definida por

$$d\psi(x) = \frac{\sqrt{(\sigma_+ - x)(x - \sigma_-)}}{2\pi ac}dx, \quad x \in [\sigma_-, \sigma_+] \subseteq [-1, 1]$$

En este caso la familia de polinomios $(Q_n)_n$ se pueden escribir en términos de los polinomios de Chebyshev de segunda especie.

Resultado inverso

En general, dada una medida positiva ψ soportada dentro del intervalo $[-1,1]$, no siempre se tiene que su matriz de Jacobi asociada vaya a ser una MTP de una RW. Para ello

Teorema (E. van Doorn)

Sea ψ una medida soportada dentro del intervalo $[-1,1]$ y consideremos la familia mónica de PO $\widehat{P}_n(x)$ que satisface

$$x\widehat{P}_n(x)=\widehat{P}_{n+1}(x)+\alpha_n\widehat{P}_n(x)+\beta_n\widehat{P}_{n-1}(x),\quad \widehat{P}_{-1}=0,\quad \widehat{P}_0=1$$

donde $\alpha_n\geq 0$ y $\beta_{n+1}>0, n\geq 0$. Para que $\widehat{P}_n(x)$ sea la sucesión de polinomios de una RW es necesario y suficiente que la sucesión

$$Q_n(x)=\frac{\widehat{P}_n(x)}{\widehat{P}_n(1)}$$

satisfaga que $xQ=PQ$ donde P es una matriz de Jacobi con coeficientes a_n,b_n,c_n que verifican que $a_n,c_{n+1}>0$ y $b_n\geq 0, n\geq 0$.

Interpretación geométrica: la medida ψ debe tener *más peso* en el intervalo $[0,1]$ que en el intervalo $[-1,0]$.

Resultado inverso

En general, dada una medida positiva ψ soportada dentro del intervalo $[-1,1]$, no siempre se tiene que su matriz de Jacobi asociada vaya a ser una MTP de una RW. Para ello

Teorema (E. van Doorn)

Sea ψ una medida soportada dentro del intervalo $[-1,1]$ y consideremos la familia mónica de PO $\widehat{P}_n(x)$ que satisface

$$x\widehat{P}_n(x) = \widehat{P}_{n+1}(x) + \alpha_n \widehat{P}_n(x) + \beta_n \widehat{P}_{n-1}(x), \quad \widehat{P}_{-1} = 0, \quad \widehat{P}_0 = 1$$

donde $\alpha_n \geq 0$ y $\beta_{n+1} > 0, n \geq 0$. Para que $\widehat{P}_n(x)$ sea la sucesión de polinomios de una RW es necesario y suficiente que la sucesión

$$Q_n(x) = \frac{\widehat{P}_n(x)}{\widehat{P}_n(1)}$$

satisfaga que $xQ = PQ$ donde P es una matriz de Jacobi con coeficientes a_n, b_n, c_n que verifican que $a_n, c_{n+1} > 0$ y $b_n \geq 0, n \geq 0$.

Interpretación geométrica: la medida ψ debe tener *más peso* en el intervalo $[0,1]$ que en el intervalo $[-1,0]$.

Ejemplo: polinomios de Jacobi

Los polinomios de Jacobi $Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, son ortogonales con respecto al peso

$$w_{\alpha,\beta}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}x^\alpha(1-x)^\beta, \quad x\in[0,1], \quad \alpha,\beta>-1$$

normalizados por la condición $Q_n^{(\alpha,\beta)}(1)=1$.

Los polinomios de Jacobi satisfacen la relación de recurrencia a tres términos

$$xQ_n^{(\alpha,\beta)}(x) = a_nQ_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) + b_nQ_n^{(\alpha,\beta)}(x) + c_nQ_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x), \quad n\geq 0$$

donde los coeficientes a_n, b_n, c_n están definidos por

$$a_n = \frac{(n+\beta+1)(n+1+\alpha+\beta)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+2+\alpha+\beta)}, \quad n\geq 0$$

$$b_n = \frac{(n+\beta+1)(n+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+2+\alpha+\beta)} + \frac{(n+\alpha)(n+\alpha+\beta)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)}, \quad n\geq 0$$

$$c_n = \frac{n(n+\alpha)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)}, \quad n\geq 1$$

Se tiene que todos los coeficientes son no negativos, $a_0+b_0=1$ y $a_n+b_n+c_n=1, n\geq 1$. Por lo tanto su matriz de Jacobi $J=P$ es una matriz estocástica que es la MTP de una RW.

Ejemplo: polinomios de Jacobi

Los polinomios de Jacobi $Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, son ortogonales con respecto al peso

$$w_{\alpha,\beta}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} x^\alpha (1-x)^\beta, \quad x \in [0,1], \quad \alpha, \beta > -1$$

normalizados por la condición $Q_n^{(\alpha,\beta)}(1) = 1$.

Los polinomios de Jacobi satisfacen la relación de recurrencia a tres términos

$$x Q_n^{(\alpha,\beta)}(x) = a_n Q_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) + b_n Q_n^{(\alpha,\beta)}(x) + c_n Q_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x), \quad n \geq 0$$

donde los coeficientes a_n, b_n, c_n están definidos por

$$a_n = \frac{(n+\beta+1)(n+1+\alpha+\beta)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+2+\alpha+\beta)}, \quad n \geq 0$$

$$b_n = \frac{(n+\beta+1)(n+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+2+\alpha+\beta)} + \frac{(n+\alpha)(n+\alpha+\beta)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)}, \quad n \geq 0$$

$$c_n = \frac{n(n+\alpha)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)}, \quad n \geq 1$$

Se tiene que todos los coeficientes son no negativos, $a_0 + b_0 = 1$ y $a_n + b_n + c_n = 1, n \geq 1$. Por lo tanto su matriz de Jacobi $J = P$ es una matriz estocástica que es la MTP de una RW.

Ejemplo: polinomios de Jacobi

Los polinomios de Jacobi $Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, son ortogonales con respecto al peso

$$w_{\alpha,\beta}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}x^\alpha(1-x)^\beta, \quad x \in [0,1], \quad \alpha,\beta > -1$$

normalizados por la condición $Q_n^{(\alpha,\beta)}(1) = 1$.

Los polinomios de Jacobi satisfacen la relación de recurrencia a tres términos

$$xQ_n^{(\alpha,\beta)}(x) = a_n Q_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) + b_n Q_n^{(\alpha,\beta)}(x) + c_n Q_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x), \quad n \geq 0$$

donde los coeficientes a_n, b_n, c_n están definidos por

$$a_n = \frac{(n+\beta+1)(n+1+\alpha+\beta)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+2+\alpha+\beta)}, \quad n \geq 0$$

$$b_n = \frac{(n+\beta+1)(n+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+2+\alpha+\beta)} + \frac{(n+\alpha)(n+\alpha+\beta)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)}, \quad n \geq 0$$

$$c_n = \frac{n(n+\alpha)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)}, \quad n \geq 1$$

Se tiene que todos los coeficientes son no negativos, $a_0 + b_0 = 1$ y $a_n + b_n + c_n = 1, n \geq 1$. Por lo tanto su matriz de Jacobi $J = P$ es una matriz estocástica que es la MTP de una RW.

Índice

Factorización UL estocástica

Sea P la MTP de una RW irreducible. Queremos hacer una factorización UL de P de la siguiente manera

$$P = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & & \\ c_1 & b_1 & a_1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 & x_0 & & \\ 0 & y_1 & x_1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_0 & 0 & & \\ r_1 & s_1 & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} = P_U P_L$$

con la condición de que P_U y P_L son también matrices estocásticas, i.e. todas sus entradas son no negativas y

$$x_n + y_n = 1, \quad n \geq 0, \quad s_0 = 1, \quad r_n + s_n = 1, \quad n \geq 1$$

Igualando coeficientes se tiene que

$$\begin{aligned} a_n &= x_n s_{n+1}, \quad n \geq 0 \\ b_n &= x_n r_{n+1} + y_n s_n, \quad n \geq 0 \\ c_n &= y_n r_n, \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

Las únicas ecuaciones relevantes van a ser la primera y la tercera, i.e.

$$a_n = (1 - y_n) s_{n+1}, \quad c_{n+1} = y_{n+1}(1 - s_{n+1}), \quad n \geq 0$$

Se observa que siempre hay un parámetro libre, y_0.

Factorización UL estocástica

Sea P la MTP de una RW irreducible. Queremos hacer una factorización UL de P de la siguiente manera

$$P = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & & \\ c_1 & b_1 & a_1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 & x_0 & & \\ 0 & y_1 & x_1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_0 & 0 & & \\ r_1 & s_1 & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} = P_U P_L$$

con la condición de que P_U y P_L son también matrices estocásticas, i.e. todas sus entradas son no negativas y

$$x_n + y_n = 1, \quad n \geq 0, \quad s_0 = 1, \quad r_n + s_n = 1, \quad n \geq 1$$

Igualando coeficientes se tiene que

$$\begin{aligned} a_n &= x_n s_{n+1}, \quad n \geq 0 \\ b_n &= x_n r_{n+1} + y_n s_n, \quad n \geq 0 \\ c_n &= y_n r_n, \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

Las únicas ecuaciones relevantes van a ser la primera y la tercera, i.e.

$$a_n = (1 - y_n) s_{n+1}, \quad c_{n+1} = y_{n+1}(1 - s_{n+1}), \quad n \geq 0$$

Se observa que siempre hay un parámetro libre, y_0.

Factorización UL estocástica

Sea P la MTP de una RW irreducible. Queremos hacer una factorización UL de P de la siguiente manera

$$P = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & & \\ c_1 & b_1 & a_1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 & x_0 & & \\ 0 & y_1 & x_1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_0 & 0 & & \\ r_1 & s_1 & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} = P_U P_L$$

con la condición de que P_U y P_L son también matrices estocásticas, i.e. todas sus entradas son no negativas y

$$x_n + y_n = 1, \quad n \geq 0, \quad s_0 = 1, \quad r_n + s_n = 1, \quad n \geq 1$$

Igualando coeficientes se tiene que

$$\begin{aligned} a_n &= x_n s_{n+1}, \quad n \geq 0 \\ b_n &= x_n r_{n+1} + y_n s_n, \quad n \geq 0 \\ c_n &= y_n r_n, \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

Las únicas ecuaciones relevantes van a ser la primera y la tercera, i.e.

$$a_n = (1 - y_n) s_{n+1}, \quad c_{n+1} = y_{n+1}(1 - s_{n+1}), \quad n \geq 0$$

Se observa que siempre hay un parámetro libre, y_0.

Factorización LU estocástica

De igual manera podríamos haber considerado la factorización LU de P

$$P = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & & \\ c_1 & b_1 & a_1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{s}_0 & 0 & & \\ \tilde{r}_1 & \tilde{s}_1 & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{y}_0 & \tilde{x}_0 & & \\ 0 & \tilde{y}_1 & \tilde{x}_1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} = \widetilde{P}_L \widetilde{P}_U$$

con la condición de que $\widetilde{P}_L$ y $\widetilde{P}_U$ sean también matrices estocásticas. En este caso tenemos las relaciones

$$\begin{aligned} a_n &= \tilde{s}_n \tilde{x}_n, \quad n \geq 0 \\ b_n &= \tilde{r}_n \tilde{x}_{n-1} + \tilde{s}_n \tilde{y}_n, \quad n \geq 0 \\ c_n &= \tilde{r}_n \tilde{y}_{n-1}, \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

La diferencia entre ambas es que en la factorización UL va a aparecer un parámetro libre y_0, mientras que en la LU la descomposición será única.

Este tipo de descomposiciones ya aparecieron en la literatura (W.K. Grassmann, D.P. Heyman, V. Vigon, etc.) en un contexto diferente relacionado con cadenas de Markov censuradas y factorizaciones de Wiener-Hopf.

Factorización LU estocástica

De igual manera podríamos haber considerado la factorización LU de P

$$P = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & & \\ c_1 & b_1 & a_1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{s}_0 & 0 & & \\ \tilde{r}_1 & \tilde{s}_1 & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{y}_0 & \tilde{x}_0 & & \\ 0 & \tilde{y}_1 & \tilde{x}_1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} = \widetilde{P}_L \widetilde{P}_U$$

con la condición de que $\widetilde{P}_L$ y $\widetilde{P}_U$ sean también matrices estocásticas. En este caso tenemos las relaciones

$$\begin{aligned} a_n &= \tilde{s}_n \tilde{x}_n, \quad n \geq 0 \\ b_n &= \tilde{r}_n \tilde{x}_{n-1} + \tilde{s}_n \tilde{y}_n, \quad n \geq 0 \\ c_n &= \tilde{r}_n \tilde{y}_{n-1}, \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

La diferencia entre ambas es que en la factorización UL va a aparecer un parámetro libre y_0, mientras que en la LU la descomposición será única.

Este tipo de descomposiciones ya aparecieron en la literatura (W.K. Grassmann, D.P. Heyman, V. Vigon, etc.) en un contexto diferente relacionado con cadenas de Markov censuradas y factorizaciones de Wiener-Hopf.

Factorización LU estocástica

De igual manera podríamos haber considerado la factorización LU de P

$$P = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & & \\ c_1 & b_1 & a_1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{s}_0 & 0 & & \\ \tilde{r}_1 & \tilde{s}_1 & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{y}_0 & \tilde{x}_0 & & \\ 0 & \tilde{y}_1 & \tilde{x}_1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} = \widetilde{P}_L \widetilde{P}_U$$

con la condición de que $\widetilde{P}_L$ y $\widetilde{P}_U$ sean también matrices estocásticas. En este caso tenemos las relaciones

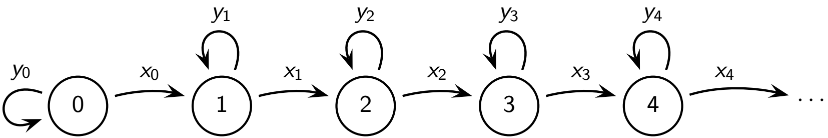
$$\begin{aligned} a_n &= \tilde{s}_n \tilde{x}_n, \quad n \geq 0 \\ b_n &= \tilde{r}_n \tilde{x}_{n-1} + \tilde{s}_n \tilde{y}_n, \quad n \geq 0 \\ c_n &= \tilde{r}_n \tilde{y}_{n-1}, \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

La diferencia entre ambas es que en la factorización UL va a aparecer un parámetro libre y_0, mientras que en la LU la descomposición será única.

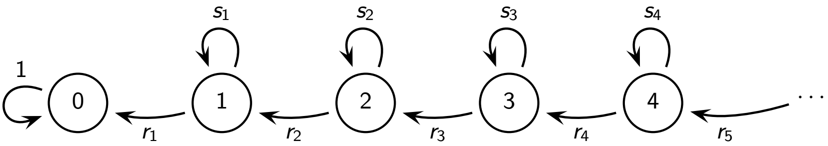
Este tipo de descomposiciones ya aparecieron en la literatura (W.K. Grassmann, D.P. Heyman, V. Vigon, etc.) en un contexto diferente relacionado con cadenas de Markov censuradas y factorizaciones de Wiener-Hopf.

INTERPRETACIÓN PROBABILÍSTICA

De la factorización $P = P_U P_L$ observamos que P_U es una caminata aleatoria de nacimiento puro con espacio de estados $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ y con diagrama



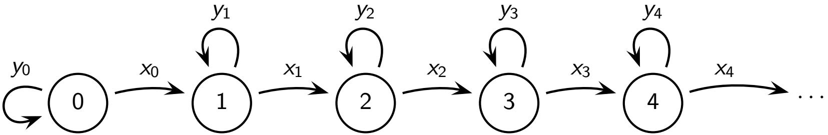
mientras que P_L es una caminata aleatoria de muerte pura con espacio de estados $\mathbb{Z}_{\geq 0}$, con un estado absorbente en 0 y con diagrama



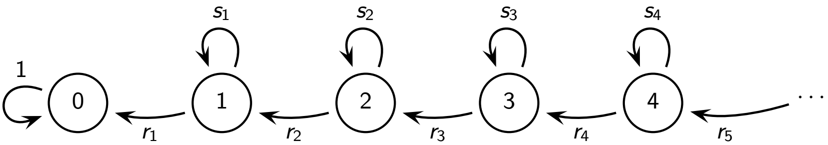
La RW para P será la combinación simultánea de ambas caminatas descompuestas. Primero la de nacimiento puro e inmediatamente después la de muerte pura.

INTERPRETACIÓN PROBABILÍSTICA

De la factorización $P = P_U P_L$ observamos que P_U es una caminata aleatoria de nacimiento puro con espacio de estados $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ y con diagrama



mientras que P_L es una caminata aleatoria de muerte pura con espacio de estados $\mathbb{Z}_{\geq 0}$, con un estado absorbente en 0 y con diagrama



La RW para P será la combinación simultánea de ambas caminatas descompuestas. Primero la de nacimiento puro e inmediatamente después la de muerte pura.

Relación con fracciones continuas

De las relaciones

$$a_n = (1 - y_n)s_{n+1}, \quad c_{n+1} = y_{n+1}(1 - s_{n+1}), \quad n \geq 0$$

es posible obtener todos los coeficientes x_n, y_n, r_n, s_n de P_U y P_L en términos de y_0. En efecto si y_0 es fijo y $s_0 = 1$, entonces

$$s_1 = \frac{a_0}{1 - y_0}, \quad y_1 = \frac{c_1}{1 - s_1}, \quad s_2 = \frac{a_1}{1 - y_1}, \quad y_2 = \frac{c_2}{1 - s_2}, \quad \text{etc.}$$

y por cada y_n y s_n tenemos $x_n = 1 - y_n$ y $r_n = 1 - s_n$. Esto no implica que ambos factores sean estocásticos todavía, ya que necesitamos que todas las entradas sean no negativas.

Despejando y_0 de cada una de las relaciones podemos ver que va apareciendo la siguiente fracción continua

$$H = 1 - \cfrac{a_0}{1 - \cfrac{c_1}{1 - \cfrac{a_1}{1 - \cfrac{c_2}{1 - \cdots}}}}$$

que necesitaremos que sea convergente y que $0 < H < 1$.

Relación con fracciones continuas

De las relaciones

$$a_n = (1 - y_n)s_{n+1}, \quad c_{n+1} = y_{n+1}(1 - s_{n+1}), \quad n \geq 0$$

es posible obtener todos los coeficientes x_n, y_n, r_n, s_n de P_U y P_L en términos de y_0. En efecto si y_0 es fijo y $s_0 = 1$, entonces

$$s_1 = \frac{a_0}{1 - y_0}, \quad y_1 = \frac{c_1}{1 - s_1}, \quad s_2 = \frac{a_1}{1 - y_1}, \quad y_2 = \frac{c_2}{1 - s_2}, \quad \text{etc.}$$

y por cada y_n y s_n tenemos $x_n = 1 - y_n$ y $r_n = 1 - s_n$. Esto no implica que ambos factores sean estocásticos todavía, ya que necesitamos que todas las entradas sean no negativas.

Despejando y_0 de cada una de las relaciones podemos ver que va apareciendo la siguiente fracción continua

$$H = 1 - \cfrac{a_0}{1 - \cfrac{c_1}{1 - \cfrac{a_1}{1 - \cfrac{c_2}{1 - \cdots}}}}$$

que necesitaremos que sea convergente y que $0 < H < 1$.

Resultado principal

Teorema (Grünbaum y MdI, 2017)

Sea H la fracción continua anterior y $H_n = A_n/B_n$ los correspondientes convergentes. Asumamos que

$$0 < A_n < B_n, \quad n \geq 1$$

Entonces H es convergente. Además, si $P = P_U P_L$, entonces ambas P_U y P_L son matrices estocásticas si y sólo si se elige y_0 en el rango siguiente

$$0 \leq y_0 \leq H$$

Para la descomposición LU no hay parámetro libre, con lo que la condición de estocasticidad viene dada en términos de una cota superior del coeficiente $\tilde{y}_0 = a_0$, i.e. $0 < a_0 \leq \widetilde{H}$ donde

$$\widetilde{H} = 1 - \cfrac{c_1}{1 - \cfrac{a_1}{1 - \cfrac{c_2}{1 - \cfrac{a_2}{1 - \cdots}}}}$$

Resultado principal

Teorema (Grünbaum y MdI, 2017)

Sea H la fracción continua anterior y $H_n = A_n/B_n$ los correspondientes convergentes. Asumamos que

$$0 < A_n < B_n, \quad n \geq 1$$

Entonces H es convergente. Además, si $P = P_U P_L$, entonces ambas P_U y P_L son matrices estocásticas si y sólo si se elige y_0 en el rango siguiente

$$0 \leq y_0 \leq H$$

Para la descomposición LU no hay parámetro libre, con lo que la condición de estocasticidad viene dada en términos de una cota superior del coeficiente $\tilde{y}_0 = a_0$, i.e. $0 < a_0 \leq \widetilde{H}$ donde

$$\widetilde{H} = 1 - \cfrac{c_1}{1 - \cfrac{a_1}{1 - \cfrac{c_2}{1 - \cfrac{a_2}{1 - \cdots}}}}$$

Transformación de Darboux discreta

Si $P = P_U P_L$, entonces invirtiendo el orden de multiplicación obtenemos otra matriz tridiagonal de la forma

$$\widetilde{P} = P_L P_U = \begin{pmatrix} s_0 & 0 & & \\ r_1 & s_1 & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 & x_0 & & \\ 0 & y_1 & x_1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_0 & \tilde{a}_0 & & \\ \tilde{c}_1 & \tilde{b}_1 & \tilde{a}_1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Ésta se llama la transformación de Darboux discreta (Matveev, Salle, Grünbaum, Haine, Horozov, Iliev, etc.).

Los nuevos coeficientes vienen dados por

$$\tilde{a}_n = s_n x_n, \quad n \geq 0,$$
$$\tilde{b}_n = r_n x_{n-1} + s_n y_n, \quad n \geq 0,$$
$$\tilde{c}_n = r_n y_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Obsérvese que $\widetilde{P}$ es una matriz que también es estocástica, ya que la multiplicación de matrices estocásticas sigue siendo estocástica. Esto da lugar a la generación de una *familia* de nuevas RW con coeficientes $(\tilde{a}_n)_n$, $(\tilde{b}_n)_n$ y $(\tilde{c}_n)_n$ y que dependen de un parámetro libre y_0.

Mismo resultado para transformaciones LU, pero sin parámetro libre.

Transformación de Darboux discreta

Si $P = P_U P_L$, entonces invirtiendo el orden de multiplicación obtenemos otra matriz tridiagonal de la forma

$$\widetilde{P} = P_L P_U = \begin{pmatrix} s_0 & 0 & & \\ r_1 & s_1 & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 & x_0 & & \\ 0 & y_1 & x_1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_0 & \tilde{a}_0 & & \\ \tilde{c}_1 & \tilde{b}_1 & \tilde{a}_1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Ésta se llama la transformación de Darboux discreta (Matveev, Salle, Grünbaum, Haine, Horozov, Iliev, etc.).
Los nuevos coeficientes vienen dados por

$$\begin{aligned} \tilde{a}_n &= s_n x_n, \quad n \geq 0, \\ \tilde{b}_n &= r_n x_{n-1} + s_n y_n, \quad n \geq 0, \\ \tilde{c}_n &= r_n y_{n-1}, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Obsérvese que $\widetilde{P}$ es una matriz que también es estocástica, ya que la multiplicación de matrices estocásticas sigue siendo estocástica. Esto da lugar a la generación de una *familia* de nuevas RW con coeficientes $(\tilde{a}_n)_n$, $(\tilde{b}_n)_n$ y $(\tilde{c}_n)_n$ y que dependen de un parámetro libre y_0.

Mismo resultado para transformaciones LU, pero sin parámetro libre.

Transformación de Darboux discreta

Si $P = P_U P_L$, entonces invirtiendo el orden de multiplicación obtenemos otra matriz tridiagonal de la forma

$$\widetilde{P} = P_L P_U = \begin{pmatrix} s_0 & 0 & & \\ r_1 & s_1 & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 & x_0 & & \\ 0 & y_1 & x_1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_0 & \tilde{a}_0 & & \\ \tilde{c}_1 & \tilde{b}_1 & \tilde{a}_1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Ésta se llama la transformación de Darboux discreta (Matveev, Salle, Grünbaum, Haine, Horozov, Iliev, etc.).
Los nuevos coeficientes vienen dados por

$$\begin{aligned} \tilde{a}_n &= s_n x_n, \quad n \geq 0, \\ \tilde{b}_n &= r_n x_{n-1} + s_n y_n, \quad n \geq 0, \\ \tilde{c}_n &= r_n y_{n-1}, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Obsérvese que $\widetilde{P}$ es una matriz que también es estocástica, ya que la multiplicación de matrices estocásticas sigue siendo estocástica. Esto da lugar a la generación de una *familia* de nuevas RW con coeficientes $(\tilde{a}_n)_n$, $(\tilde{b}_n)_n$ y $(\tilde{c}_n)_n$ y que dependen de un parámetro libre y_0.

Mismo resultado para transformaciones LU, pero sin parámetro libre.

Transformación de Darboux discreta

Si $P = P_U P_L$, entonces invirtiendo el orden de multiplicación obtenemos otra matriz tridiagonal de la forma

$$\widetilde{P} = P_L P_U = \begin{pmatrix} s_0 & 0 & & \\ r_1 & s_1 & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 & x_0 & & \\ 0 & y_1 & x_1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_0 & \tilde{a}_0 & & \\ \tilde{c}_1 & \tilde{b}_1 & \tilde{a}_1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Ésta se llama la transformación de Darboux discreta (Matveev, Salle, Grünbaum, Haine, Horozov, Iliev, etc.).
Los nuevos coeficientes vienen dados por

$$\begin{aligned} \tilde{a}_n &= s_n x_n, \quad n \geq 0, \\ \tilde{b}_n &= r_n x_{n-1} + s_n y_n, \quad n \geq 0, \\ \tilde{c}_n &= r_n y_{n-1}, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Obsérvese que $\widetilde{P}$ es una matriz que también es estocástica, ya que la multiplicación de matrices estocásticas sigue siendo estocástica. Esto da lugar a la generación de una *familia* de nuevas RW con coeficientes $(\tilde{a}_n)_n$, $(\tilde{b}_n)_n$ y $(\tilde{c}_n)_n$ y que dependen de un parámetro libre y_0.

Mismo resultado para transformaciones LU, pero sin parámetro libre.

Relación entre las medidas espectrales

Una propiedad importante de la transformación de Darboux discreta es saber cómo se transforma la medida espectral ψ asociada a P.

Descomposición UL: Las nuevas matrices $\widetilde{P}$ son también matrices tridiagonales, con lo cual se le puede aplicar de vuelta el Teorema Espectral. Si el momento $\mu_{-1} = \int_{-1}^{1} d\psi(x)/x$ está bien definido, entonces un candidato para la familia de medidas espectrales de $\widetilde{P}$ viene dada por

$$\widetilde{\psi}(x) = y_0 \frac{\psi(x)}{x} + M\delta_0(x), \quad M = 1 - y_0\mu_{-1}$$

donde $\delta_0(x)$ es la delta de Dirac en $x = 0$ e y_0 es el parámetro libre de la factorización UL. Esta transformación se conoce como transformación de Geronimus.

Descomposición LU: la correspondiente transformación $\widehat{P}$ da lugar a una matriz tridiagonal estocástica con medida espectral $\widehat{\psi}$. En este caso es posible ver que la nueva medida espectral viene dada por

$$\widehat{\psi}(x) = x\psi(x)$$

o, en otras palabras, una transformación de Christoffel de ψ.

Relación entre las medidas espectrales

Una propiedad importante de la transformación de Darboux discreta es saber cómo se transforma la medida espectral ψ asociada a P.

Descomposición UL: Las nuevas matrices $\widetilde{P}$ son también matrices tridiagonales, con lo cual se le puede aplicar de vuelta el Teorema Espectral.
Si el momento $\mu_{-1} = \int_{-1}^{1} d\psi(x)/x$ está bien definido, entonces un candidato para la familia de medidas espectrales de $\widetilde{P}$ viene dada por

$$\widetilde{\psi}(x) = y_0 \frac{\psi(x)}{x} + M\delta_0(x), \quad M = 1 - y_0\mu_{-1}$$

donde $\delta_0(x)$ es la delta de Dirac en $x = 0$ e y_0 es el parámetro libre de la factorización UL. Esta transformación se conoce como transformación de Geronimus.

Descomposición LU: la correspondiente transformación $\widehat{P}$ da lugar a una matriz tridiagonal estocástica con medida espectral $\widehat{\psi}$. En este caso es posible ver que la nueva medida espectral viene dada por

$$\widehat{\psi}(x) = x\psi(x)$$

o, en otras palabras, una transformación de Christoffel de ψ.

Relación entre las medidas espectrales

Una propiedad importante de la transformación de Darboux discreta es saber cómo se transforma la medida espectral ψ asociada a P.

Descomposición UL: Las nuevas matrices $\widetilde{P}$ son también matrices tridiagonales, con lo cual se le puede aplicar de vuelta el Teorema Espectral.
Si el momento $\mu_{-1} = \int_{-1}^{1} d\psi(x)/x$ está bien definido, entonces un candidato para la familia de medidas espectrales de $\widetilde{P}$ viene dada por

$$\widetilde{\psi}(x) = y_0 \frac{\psi(x)}{x} + M\delta_0(x), \quad M = 1 - y_0\mu_{-1}$$

donde $\delta_0(x)$ es la delta de Dirac en $x=0$ e y_0 es el parámetro libre de la factorización UL. Esta transformación se conoce como transformación de Geronimus.

Descomposición LU: la correspondiente transformación $\widehat{P}$ da lugar a una matriz tridiagonal estocástica con medida espectral $\widehat{\psi}$. En este caso es posible ver que la nueva medida espectral viene dada por

$$\widehat{\psi}(x) = x\psi(x)$$

o, en otras palabras, una transformación de Christoffel de ψ.

Índice

RW con coeficientes constantes

Sea X_n una RW con MTP

$$P = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & 0 & & \\ c & b & a & 0 & \\ 0 & c & b & a & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad b \geq 0, a, c > 0, a_0 + b_0 = 1, \quad a + b + c = 1$$

Observamos que en este caso la fracción continua es $H = 1 - a_0/F$ donde

$$F = 1 - \cfrac{c}{1 - \cfrac{a}{1 - \cfrac{c}{1 - \cdots}}} = 1 - \cfrac{c}{1 - \cfrac{a}{F}}$$

Proposición (Grünbaum y MdI, 2017)

Sea $c \leq (1 - \sqrt{a})^2$. Entonces la fracción continua F converge a

$$F = \frac{1}{2}\left(1 + a - c + \sqrt{(1 + a - c)^2 - 4a}\right)$$

y la factorización estocástica es posible si y sólo si $0 \leq y_0 \leq 1 - a_0/F$.

RW con coeficientes constantes

Sea X_n una RW con MTP

$$P = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & 0 & & \\ c & b & a & 0 & \\ 0 & c & b & a & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad b \geq 0, a, c > 0, a_0 + b_0 = 1, \quad a + b + c = 1$$

Observamos que en este caso la fracción continua es $H = 1 - a_0/F$ donde

$$F = 1 - \cfrac{c}{1 - \cfrac{a}{1 - \cfrac{c}{1 - \cdots}}} = 1 - \cfrac{c}{1 - \cfrac{a}{F}}$$

Proposición (Grünbaum y MdI, 2017)

Sea $c \leq (1 - \sqrt{a})^2$. Entonces la fracción continua F converge a

$$F = \frac{1}{2}\left(1 + a - c + \sqrt{(1 + a - c)^2 - 4a}\right)$$

y la factorización estocástica es posible si y sólo si $0 \leq y_0 \leq 1 - a_0/F$.

RW generado por los polinomios de Jacobi

Los polinomios de Jacobi $Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, son ortogonales con respecto al peso

$$w_{\alpha,\beta}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} x^{\alpha}(1-x)^{\beta}, \quad x \in [0,1], \quad \alpha,\beta > -1$$

normalizados por la condición $Q_n^{(\alpha,\beta)}(1) = 1$.

Los polinomios de Jacobi satisfacen la relación de recurrencia a tres términos

$$xQ_n^{(\alpha,\beta)}(x) = a_n Q_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) + b_n Q_n^{(\alpha,\beta)}(x) + c_n Q_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x), \quad n \geq 0$$

donde los coeficientes a_n, b_n, c_n están definidos por

$$a_n = \frac{(n+\beta+1)(n+1+\alpha+\beta)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+2+\alpha+\beta)}, \quad n \geq 0$$

$$b_n = \frac{(n+\beta+1)(n+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+2+\alpha+\beta)} + \frac{(n+\alpha)(n+\alpha+\beta)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)}, \quad n \geq 0$$

$$c_n = \frac{n(n+\alpha)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)}, \quad n \geq 1$$

Se tiene que todos los coeficientes son no negativos, $a_0 + b_0 = 1$ y $a_n + b_n + c_n = 1, n \geq 1$. Por lo tanto su matriz de Jacobi P es una matriz estocástica que es la matriz de transición de probabilidades de una RW.

Factorización UL

Sea $\gamma_n, n \geq 1$, la sucesión de coeficientes $a_0, c_1, a_1, c_2, \ldots$. Entonces se tiene que γ_n es una sucesión de cadenas, i.e. $\gamma_n = (1 - m_{n-1})m_n$ donde $0 \leq m_0 < 1$ y $0 < m_n < 1$ para $n \geq 1$. En este caso se tiene

$$m_{2n} = \frac{n}{2n + \alpha + \beta + 1}, \quad m_{2n+1} = \frac{n + \beta + 1}{2n + \alpha + \beta + 2}, \quad n \geq 0$$

Proposición (Chihara)

H construida a partir de γ_n es convergente a $(1 + L)^{-1}$ donde

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_1 m_2 \cdots m_n}{(1 - m_1)(1 - m_2) \cdots (1 - m_n)}$$

En este caso es posible sumar la serie y se tiene que $L = \frac{\beta+1}{\alpha}$. La factorización estocástica es posible si y sólo si

$$0 \leq y_0 \leq \frac{\alpha}{\alpha + \beta + 1}$$

Es posible calcular explícitamente los coeficientes x_n, y_n, s_n, r_n en términos de y_0, pero las fórmulas se simplifican considerablemente si y_0 se toma uno de los valores extremos.

Factorización UL

Sea γ_n, $n \geq 1$, la sucesión de coeficientes $a_0, c_1, a_1, c_2, \ldots$. Entonces se tiene que γ_n es una sucesión de cadenas, i.e. $\gamma_n = (1 - m_{n-1})m_n$ donde $0 \leq m_0 < 1$ y $0 < m_n < 1$ para $n \geq 1$. En este caso se tiene

$$m_{2n} = \frac{n}{2n + \alpha + \beta + 1}, \quad m_{2n+1} = \frac{n + \beta + 1}{2n + \alpha + \beta + 2}, \quad n \geq 0$$

Proposición (Chihara)

H construida a partir de γ_n es convergente a $(1 + L)^{-1}$ donde

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_1 m_2 \cdots m_n}{(1 - m_1)(1 - m_2) \cdots (1 - m_n)}$$

En este caso es posible sumar la serie y se tiene que $L = \frac{\beta+1}{\alpha}$. La factorización estocástica es posible si y sólo si

$$0 \leq y_0 \leq \frac{\alpha}{\alpha + \beta + 1}$$

Es posible calcular explícitamente los coeficientes x_n, y_n, s_n, r_n en términos de y_0, pero las fórmulas se simplifican considerablemente si y_0 se toma uno de los valores extremos.

Factorización UL

Sea $\gamma_n, n \geq 1$, la sucesión de coeficientes $a_0, c_1, a_1, c_2, \ldots$. Entonces se tiene que γ_n es una sucesión de cadenas, i.e. $\gamma_n = (1 - m_{n-1})m_n$ donde $0 \leq m_0 < 1$ y $0 < m_n < 1$ para $n \geq 1$. En este caso se tiene

$$m_{2n} = \frac{n}{2n + \alpha + \beta + 1}, \quad m_{2n+1} = \frac{n + \beta + 1}{2n + \alpha + \beta + 2}, \quad n \geq 0$$

Proposición (Chihara)

H construida a partir de γ_n es convergente a $(1 + L)^{-1}$ donde

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_1 m_2 \cdots m_n}{(1 - m_1)(1 - m_2) \cdots (1 - m_n)}$$

En este caso es posible sumar la serie y se tiene que $L = \frac{\beta+1}{\alpha}$. La factorización estocástica es posible si y sólo si

$$0 \leq y_0 \leq \frac{\alpha}{\alpha + \beta + 1}$$

Es posible calcular explícitamente los coeficientes x_n, y_n, s_n, r_n en términos de y_0, pero las fórmulas se simplifican considerablemente si y_0 se toma uno de los valores extremos.

Factorización LU

En este caso no hay parámetro libre y debe ocurrir que

$$a_0 = \frac{\beta+1}{\alpha+\beta+2} \leq \widetilde{H}$$

donde $\widetilde{H}$ es la fracción continua con sucesión de numeradores $c_1, a_1, c_2, a_2, \ldots$. De vuelta es una sucesión de cadenas con coeficientes

$$m_{2n} = \frac{n+\beta+1}{2n+\alpha+\beta+2}, \quad m_{2n+1} = \frac{n+1}{2n+\alpha+\beta+3}, \quad n \geq 0$$

En este caso es posible ver que $\widetilde{H}$ converge a

$$\widetilde{H} = \frac{\alpha+\beta+1}{\alpha+\beta+2}$$

Por lo tanto, si $\alpha \geq 0$, siempre es posible una factorización LU estocástica. Los coeficientes en este caso vienen dados por

$$\tilde{x}_n = \frac{n+\beta+1}{2n+\alpha+\beta+2}, \quad \tilde{y}_n = \frac{n+\alpha+1}{2n+\alpha+\beta+2}, \quad n \geq 0$$

$$\tilde{s}_n = \frac{n+\alpha+\beta+1}{2n+\alpha+\beta+1}, \quad \tilde{r}_n = \frac{n}{2n+\alpha+\beta+1}, \quad n \geq 1, \quad \tilde{s}_0 = 1$$

Factorización LU

En este caso no hay parámetro libre y debe ocurrir que

$$a_0 = \frac{\beta+1}{\alpha+\beta+2} \leq \widetilde{H}$$

donde $\widetilde{H}$ es la fracción continua con sucesión de numeradores $c_1, a_1, c_2, a_2, \ldots$. De vuelta es una sucesión de cadenas con coeficientes

$$m_{2n} = \frac{n+\beta+1}{2n+\alpha+\beta+2}, \quad m_{2n+1} = \frac{n+1}{2n+\alpha+\beta+3}, \quad n \geq 0$$

En este caso es posible ver que $\widetilde{H}$ converge a

$$\widetilde{H} = \frac{\alpha+\beta+1}{\alpha+\beta+2}$$

Por lo tanto, si $\alpha \geq 0$, siempre es posible una factorización LU estocástica.

Los coeficientes en este caso vienen dados por

$$\tilde{x}_n = \frac{n+\beta+1}{2n+\alpha+\beta+2}, \quad \tilde{y}_n = \frac{n+\alpha+1}{2n+\alpha+\beta+2}, \quad n \geq 0$$

$$\tilde{s}_n = \frac{n+\alpha+\beta+1}{2n+\alpha+\beta+1}, \quad \tilde{r}_n = \frac{n}{2n+\alpha+\beta+1}, \quad n \geq 1, \quad \tilde{s}_0 = 1$$

Factorización LU

En este caso no hay parámetro libre y debe ocurrir que

$$a_0 = \frac{\beta+1}{\alpha+\beta+2} \leq \widetilde{H}$$

donde $\widetilde{H}$ es la fracción continua con sucesión de numeradores $c_1, a_1, c_2, a_2, \ldots$. De vuelta es una sucesión de cadenas con coeficientes

$$m_{2n} = \frac{n+\beta+1}{2n+\alpha+\beta+2}, \quad m_{2n+1} = \frac{n+1}{2n+\alpha+\beta+3}, \quad n \geq 0$$

En este caso es posible ver que $\widetilde{H}$ converge a

$$\widetilde{H} = \frac{\alpha+\beta+1}{\alpha+\beta+2}$$

Por lo tanto, si $\alpha \geq 0$, siempre es posible una factorización LU estocástica. Los coeficientes en este caso vienen dados por

$$\tilde{x}_n = \frac{n+\beta+1}{2n+\alpha+\beta+2}, \quad \tilde{y}_n = \frac{n+\alpha+1}{2n+\alpha+\beta+2}, \quad n \geq 0$$
$$\tilde{s}_n = \frac{n+\alpha+\beta+1}{2n+\alpha+\beta+1}, \quad \tilde{r}_n = \frac{n}{2n+\alpha+\beta+1}, \quad n \geq 1, \quad \tilde{s}_0 = 1$$

Medidas espectrales de Darboux

La medida espectral asociada a la transformación de Darboux discreta $\widetilde{P} = P_L P_U$ es la transformación de Geronimus del peso de Jacobi $w_{\alpha,\beta}$. Como

$$\mu_{-1} = \int_0^1 \frac{w_{\alpha,\beta}(x)}{x} dx = \frac{\alpha+\beta+1}{\alpha}$$

Se tiene que si $\alpha > 0, \beta > -1$ entonces

$$\widetilde{w}_{\alpha,\beta}(x) = y_0 \frac{\Gamma(\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta} + \left(1 - y_0 \frac{\alpha+\beta+1}{\alpha}\right) \delta_0(x)$$

Se observa que si y_0 está en el rango de factorización UL estocástica, entonces la masa en 0 es siempre no negativa y se anula cuando

$$y_0 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+1}$$

Para la descomposición LU la medida espectral asociada a la transformación de Darboux discreta $\widehat{P} = \widetilde{P}_U \widetilde{P}_L$ es la transformación de Christoffel del peso de Jacobi

$$\widehat{w}_{\alpha,\beta}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta+3)}{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\beta+1)} x^{\alpha+1}(1-x)^{\beta}$$

Medidas espectrales de Darboux

La medida espectral asociada a la transformación de Darboux discreta $\widetilde{P} = P_L P_U$ es la transformación de Geronimus del peso de Jacobi $w_{\alpha,\beta}$. Como

$$\mu_{-1} = \int_0^1 \frac{w_{\alpha,\beta}(x)}{x} dx = \frac{\alpha+\beta+1}{\alpha}$$

Se tiene que si $\alpha > 0, \beta > -1$ entonces

$$\widetilde{w}_{\alpha,\beta}(x) = y_0 \frac{\Gamma(\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta} + \left(1 - y_0 \frac{\alpha+\beta+1}{\alpha}\right) \delta_0(x)$$

Se observa que si y_0 está en el rango de factorización UL estocástica, entonces la masa en 0 es siempre no negativa y se anula cuando

$$y_0 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+1}$$

Para la descomposición LU la medida espectral asociada a la transformación de Darboux discreta $\widehat{P} = \widetilde{P}_U \widetilde{P}_L$ es la transformación de Christoffel del peso de Jacobi

$$\widehat{w}_{\alpha,\beta}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta+3)}{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\beta+1)} x^{\alpha+1}(1-x)^{\beta}$$

Un modelo de urnas

Sean $\alpha > 0, \beta \geq 0$ enteros, que van a representar un número de bolas de cierto color en una urna. Consideremos la RW $\{X_n : n = 0, 1, \ldots\}$ con MTP P con los coeficientes de Jacobi. Sea la factorización UL, i.e. $P = P_U P_L$ con $y_0 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+1}$. En este caso

$$x_n = \frac{n+\beta+1}{2n+\alpha+\beta+1}, \quad y_n = \frac{n+\alpha}{2n+\alpha+\beta+1}, \quad n \geq 0$$
$$s_n = \frac{n+\alpha+\beta}{2n+\alpha+\beta}, \quad r_n = \frac{n}{2n+\alpha+\beta}, \quad n \geq 1, \quad s_0 = 1$$

Llamemos $\{X_n^U : n = 0, 1, \ldots\}$ a la RW (crecimiento puro) generada por los coeficientes x_n, y_n de P_U. Este modelo será el Experimento 1.
De igual manera llamamos $\{X_n^L : n = 0, 1, \ldots\}$ a la RW (muerte pura) generada por los coeficientes s_n, r_n de P_L. Este modelo será el Experimento 2.

El modelo de urnas para la RW original $\{X_n : n = 0, 1, \ldots\}$ será la composición del modelo de urnas para $\{X_n^U : n = 0, 1, \ldots\}$ (Experimento 1) y justo después el modelo de urnas para $\{X_n^L : n = 0, 1, \ldots\}$ (Experimento 2).

Un modelo de urnas

Sean $\alpha > 0, \beta \geq 0$ enteros, que van a representar un número de bolas de cierto color en una urna. Consideremos la RW $\{X_n : n = 0, 1, \ldots\}$ con MTP P con los coeficientes de Jacobi. Sea la factorización UL, i.e. $P = P_U P_L$ con $y_0 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+1}$. En este caso

$$x_n = \frac{n+\beta+1}{2n+\alpha+\beta+1}, \quad y_n = \frac{n+\alpha}{2n+\alpha+\beta+1}, \quad n \geq 0$$

$$s_n = \frac{n+\alpha+\beta}{2n+\alpha+\beta}, \quad r_n = \frac{n}{2n+\alpha+\beta}, \quad n \geq 1, \quad s_0 = 1$$

Llamemos $\{X_n^U : n = 0, 1, \ldots\}$ a la RW (crecimiento puro) generada por los coeficientes x_n, y_n de P_U. Este modelo será el Experimento 1.
De igual manera llamamos $\{X_n^L : n = 0, 1, \ldots\}$ a la RW (muerte pura) generada por los coeficientes s_n, r_n de P_L. Este modelo será el Experimento 2.

El modelo de urnas para la RW original $\{X_n : n = 0, 1, \ldots\}$ será la composición del modelo de urnas para $\{X_n^U : n = 0, 1, \ldots\}$ (Experimento 1) y justo después el modelo de urnas para $\{X_n^L : n = 0, 1, \ldots\}$ (Experimento 2).

Un modelo de urnas

Sean $\alpha > 0, \beta \geq 0$ enteros, que van a representar un número de bolas de cierto color en una urna. Consideremos la RW $\{X_n : n = 0, 1, \ldots\}$ con MTP P con los coeficientes de Jacobi. Sea la factorización UL, i.e. $P = P_U P_L$ con $y_0 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+1}$. En este caso

$$x_n = \frac{n+\beta+1}{2n+\alpha+\beta+1}, \quad y_n = \frac{n+\alpha}{2n+\alpha+\beta+1}, \quad n \geq 0$$
$$s_n = \frac{n+\alpha+\beta}{2n+\alpha+\beta}, \quad r_n = \frac{n}{2n+\alpha+\beta}, \quad n \geq 1, \quad s_0 = 1$$

Llamemos $\{X_n^U : n = 0, 1, \ldots\}$ a la RW (crecimiento puro) generada por los coeficientes x_n, y_n de P_U. Este modelo será el Experimento 1.
De igual manera llamamos $\{X_n^L : n = 0, 1, \ldots\}$ a la RW (muerte pura) generada por los coeficientes s_n, r_n de P_L. Este modelo será el Experimento 2.

El modelo de urnas para la RW original $\{X_n : n = 0, 1, \ldots\}$ será la composición del modelo de urnas para $\{X_n^U : n = 0, 1, \ldots\}$ (Experimento 1) y justo después el modelo de urnas para $\{X_n^L : n = 0, 1, \ldots\}$ (Experimento 2).

EXPERIMENTO 1: Inicialmente hay n bolas azules en una urna. Metemos $\beta+1$ bolas azules y $n+\alpha$ bolas rojas y escogemos una al azar. Las probabilidades de sacar una bola azul o roja vienen dadas por

$$\mathbb{P}(B) = \frac{n+\beta+1}{2n+\alpha+\beta+1} = x_n, \quad \mathbb{P}(R) = \frac{n+\alpha}{2n+\alpha+\beta+1} = y_n$$

Seguimos la siguiente estrategia dependiendo de si sale azul o roja:

- Si la bola que sale es azul: quitamos todas las bolas rojas de la urna y β azules (quedando $n+1$ bolas azules), y volvemos a repetir.
- Si la bola es roja: quitamos todas las bolas rojas de la urna y $\beta+1$ azules (quedando n bolas azules), y volvemos a repetir.

EXPERIMENTO 2: Inicialmente hay n bolas azules en una urna. Metemos $n+\alpha+\beta$ bolas rojas y escogemos una al azar. Las probabilidades de sacar una bola azul o roja vienen dadas por

$$\mathbb{P}(B) = \frac{n}{2n+\alpha+\beta} = r_n, \quad \mathbb{P}(R) = \frac{n+\alpha+\beta}{2n+\alpha+\beta} = s_n$$

Seguimos la siguiente estrategia dependiendo de si sale azul o roja:

- Si la bola que sale es azul: quitamos todas las bolas rojas de la urna y la azul que salió (quedando $n-1$ bolas azules), y volvemos a repetir.
- Si la bola es roja: quitamos todas las bolas rojas de la urna (quedando n bolas azules) y volvemos a repetir.

EXPERIMENTO 1: Inicialmente hay n bolas azules en una urna. Metemos $\beta+1$ bolas azules y $n+\alpha$ bolas rojas y escogemos una al azar. Las probabilidades de sacar una bola azul o roja vienen dadas por

$$\mathbb{P}(B) = \frac{n+\beta+1}{2n+\alpha+\beta+1} = x_n, \quad \mathbb{P}(R) = \frac{n+\alpha}{2n+\alpha+\beta+1} = y_n$$

Seguimos la siguiente estrategia dependiendo de si sale azul o roja:

- Si la bola que sale es azul: quitamos todas las bolas rojas de la urna y β azules (quedando $n+1$ bolas azules), y volvemos a repetir.
- Si la bola es roja: quitamos todas las bolas rojas de la urna y $\beta+1$ azules (quedando n bolas azules), y volvemos a repetir.

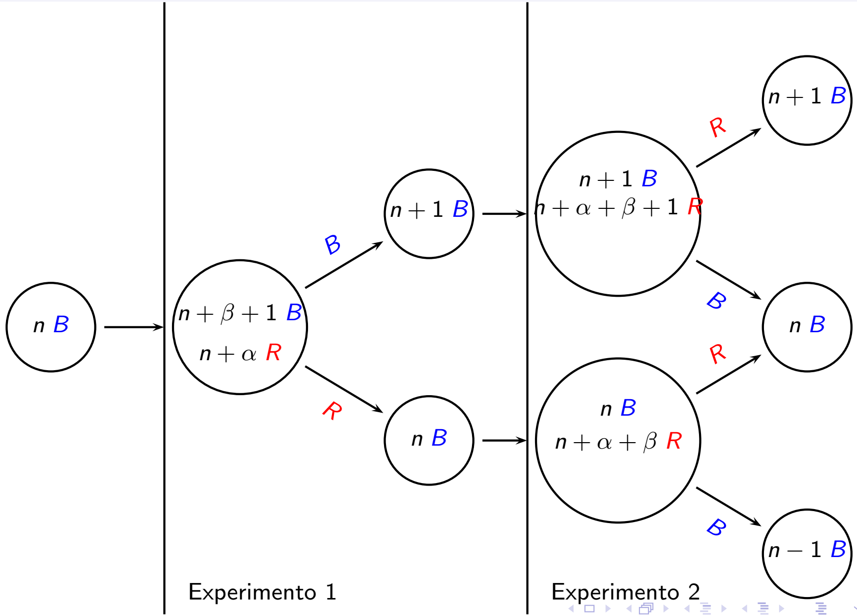
EXPERIMENTO 2: Inicialmente hay n bolas azules en una urna. Metemos $n+\alpha+\beta$ bolas rojas y escogemos una al azar. Las probabilidades de sacar una bola azul o roja vienen dadas por

$$\mathbb{P}(B) = \frac{n}{2n+\alpha+\beta} = r_n, \quad \mathbb{P}(R) = \frac{n+\alpha+\beta}{2n+\alpha+\beta} = s_n$$

Seguimos la siguiente estrategia dependiendo de si sale azul o roja:

- Si la bola que sale es azul: quitamos todas las bolas rojas de la urna y la azul que salió (quedando $n-1$ bolas azules), y volvemos a repetir.
- Si la bola es roja: quitamos todas las bolas rojas de la urna (quedando n bolas azules) y volvemos a repetir.

Diagrama



n B
$n+\beta+1$ B
$n+\alpha$ R
B
R
$n+1$ B
n B
$n+1$ B
$n+\alpha+\beta+1$ R
n B
$n+\alpha+\beta$ R
R
B
R
B
$n+1$ B
n B
$n-1$ B
Experimento 1
Experimento 2