

# ESTUDIO ESPECTRAL DE PROCESOS ESTOCÁSTICOS BIDIMENSIONALES

Manuel Domínguez de la Iglesia

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Sevilla

Universidad Tecnológica de Panamá  
4 de septiembre de 2012

# SUMARIO

- 1 PROCESOS DE MARKOV
- 2 PROCESOS DE MARKOV BIDIMENSIONALES
- 3 APLICACIÓN A UN MODELO DE WRIGHT-FISHER

# SUMARIO

- 1 PROCESOS DE MARKOV
- 2 PROCESOS DE MARKOV BIDIMENSIONALES
- 3 APLICACIÓN A UN MODELO DE WRIGHT-FISHER

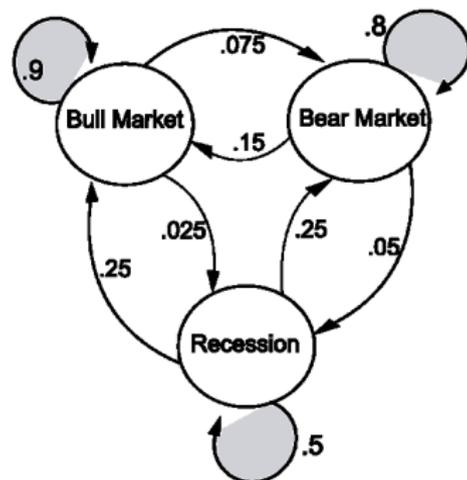
## EJEMPLO PRELIMINAR

Sea  $\Omega$  = mercado financiero y tres posibles **estados**: *Bull market*=1, *Bear market*=2 y *Recesión*=3.

Consideramos variables aleatorias  $X_t : \Omega \rightarrow \{1, 2, 3\}$ ,  $t = 0, 1, 2, \dots$  es el número de semanas (discreto).

Las **probabilidades de transición** se representan mediante una matriz  $3 \times 3$ :

$$P = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.075 & 0.025 \\ 0.15 & 0.8 & 0.05 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{pmatrix}$$



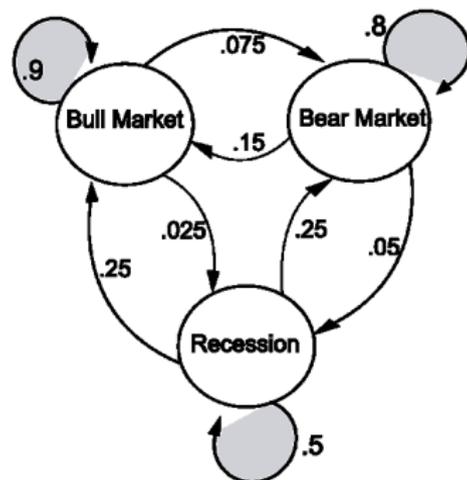
## EJEMPLO PRELIMINAR

Sea  $\Omega$  = mercado financiero y tres posibles **estados**: *Bull market*=1, *Bear market*=2 y *Recesión*=3.

Consideramos variables aleatorias  $X_t : \Omega \rightarrow \{1, 2, 3\}$ ,  $t = 0, 1, 2, \dots$  es el número de semanas (discreto).

Las **probabilidades de transición** se representan mediante una matriz  $3 \times 3$ :

$$P = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.075 & 0.025 \\ 0.15 & 0.8 & 0.05 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{pmatrix}$$





# OTRAS APLICACIONES

- **Física, Química y Biología**  
Termodinámica, estadística matemática, movimiento Browniano, proceso de Orstein-Uhlenbeck, cinética de reacciones químicas, crecimiento de poblaciones, genética, etc.
- **Ingeniería, sistemas de comunicaciones y redes**  
Modelos de almacenamiento, telecomunicaciones, redes sociales, etc.
- **Teoría de Colas**
- **Internet**  
*PageRank* de una búsqueda en Google.
- Ciencias sociales, estadística, economía, finanzas, seguros, juegos, música, etc.

# OTRAS APLICACIONES

- **Física, Química y Biología**  
Termodinámica, estadística matemática, movimiento Browniano, proceso de Orstein-Uhlenbeck, cinética de reacciones químicas, crecimiento de poblaciones, genética, etc.
- **Ingeniería, sistemas de comunicaciones y redes**  
Modelos de almacenamiento, telecomunicaciones, redes sociales, etc.
- **Teoría de Colas**
- **Internet**  
*PageRank* de una búsqueda en Google.
- Ciencias sociales, estadística, economía, finanzas, seguros, juegos, música, etc.

# OTRAS APLICACIONES

- **Física, Química y Biología**  
Termodinámica, estadística matemática, movimiento Browniano, proceso de Orstein-Uhlenbeck, cinética de reacciones químicas, crecimiento de poblaciones, genética, etc.
- **Ingeniería, sistemas de comunicaciones y redes**  
Modelos de almacenamiento, telecomunicaciones, redes sociales, etc.
- **Teoría de Colas**
- **Internet**  
*PageRank* de una búsqueda en Google.
- Ciencias sociales, estadística, economía, finanzas, seguros, juegos, música, etc.

# OTRAS APLICACIONES

- **Física, Química y Biología**  
Termodinámica, estadística matemática, movimiento Browniano, proceso de Orstein-Uhlenbeck, cinética de reacciones químicas, crecimiento de poblaciones, genética, etc.
- **Ingeniería, sistemas de comunicaciones y redes**  
Modelos de almacenamiento, telecomunicaciones, redes sociales, etc.
- **Teoría de Colas**
- **Internet**  
*PageRank* de una búsqueda en Google.
- Ciencias sociales, estadística, economía, finanzas, seguros, juegos, música, etc.

# OTRAS APLICACIONES

- **Física, Química y Biología**  
Termodinámica, estadística matemática, movimiento Browniano, proceso de Orstein-Uhlenbeck, cinética de reacciones químicas, crecimiento de poblaciones, genética, etc.
- **Ingeniería, sistemas de comunicaciones y redes**  
Modelos de almacenamiento, telecomunicaciones, redes sociales, etc.
- **Teoría de Colas**
- **Internet**  
*PageRank* de una búsqueda en Google.
- Ciencias sociales, estadística, economía, finanzas, seguros, juegos, música, etc.

# PROCESOS DE MARKOV

Un *proceso de Markov* con **espacio de estados**  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$  es una colección de variables aleatorias  $\{X_t \in \mathcal{S} : t \in \mathcal{T}\}$  indexadas por el **tiempo**  $\mathcal{T}$  (discreto o continuo) que verifican la **propiedad de Markov**: el proceso futuro sólo dependen del presente, no del pasado (no tiene memoria).

## $\mathcal{S}$ DISCRETO (CADENAS DE MARKOV)

Las probabilidades vienen descritas por una matriz

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots \\ p_{21} & p_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad P_{ij}(t) \equiv \Pr(X_t = j | X_0 = i)$$

## $\mathcal{S}$ CONTINUO (PROCESOS DE MARKOV)

Las probabilidades vienen descritas mediante una densidad

$$p(t; x, y) \equiv \frac{\partial}{\partial y} \Pr(X_t \leq y | X_0 = x), \quad x, y \in \mathcal{S}$$

# PROCESOS DE MARKOV

Un *proceso de Markov* con **espacio de estados**  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$  es una colección de variables aleatorias  $\{X_t \in \mathcal{S} : t \in \mathcal{T}\}$  indexadas por el **tiempo**  $\mathcal{T}$  (discreto o continuo) que verifican la **propiedad de Markov**: el proceso futuro sólo dependen del presente, no del pasado (no tiene memoria).

## $\mathcal{S}$ DISCRETO (CADENAS DE MARKOV)

Las probabilidades vienen descritas por una matriz

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots \\ p_{21} & p_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad P_{ij}(t) \equiv \Pr(X_t = j | X_0 = i)$$

## $\mathcal{S}$ CONTINUO (PROCESOS DE MARKOV)

Las probabilidades vienen descritas mediante una densidad

$$p(t; x, y) \equiv \frac{\partial}{\partial y} \Pr(X_t \leq y | X_0 = x), \quad x, y \in \mathcal{S}$$

# PROCESOS DE MARKOV

Un *proceso de Markov* con **espacio de estados**  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$  es una colección de variables aleatorias  $\{X_t \in \mathcal{S} : t \in \mathcal{T}\}$  indexadas por el **tiempo**  $\mathcal{T}$  (discreto o continuo) que verifican la **propiedad de Markov**: el proceso futuro sólo dependen del presente, no del pasado (no tiene memoria).

## $\mathcal{S}$ DISCRETO (CADENAS DE MARKOV)

Las probabilidades vienen descritas por una matriz

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots \\ p_{21} & p_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad P_{ij}(t) \equiv \Pr(X_t = j | X_0 = i)$$

## $\mathcal{S}$ CONTINUO (PROCESOS DE MARKOV)

Las probabilidades vienen descritas mediante una densidad

$$p(t; x, y) \equiv \frac{\partial}{\partial y} \Pr(X_t \leq y | X_0 = x), \quad x, y \in \mathcal{S}$$

## CASOS PARTICULARES

- 1 **Caminos aleatorios:**  $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, \dots\}$ ,  $\mathcal{T} = \{0, 1, 2, \dots\}$ .

$$P = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & & & \\ c_1 & b_1 & a_1 & & \\ & c_2 & b_2 & a_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad b_i \geq 0, a_i, c_i > 0, \quad a_i + b_i + c_i = 1$$

- 2 **Procesos de nacimiento y muerte:**  $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, \dots\}$ ,  $\mathcal{T} = [0, \infty)$ .  
 $P'(t) = \mathcal{A}P(t)$  y  $P'(t) = P(t)\mathcal{A}$  donde

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & & & \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & & \\ & \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \lambda_i, \mu_i > 0$$

- 3 **Procesos de difusión:**  $\mathcal{S} = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{T} = [0, \infty)$ .  
 $\frac{\partial}{\partial t} p(t; x, y) = \mathcal{A}p(t; x, y)$  y  $\frac{\partial}{\partial t} p(t; x, y) = \mathcal{A}^* p(t; x, y)$  donde

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \sigma^2(x) \frac{d^2}{dx^2} + \tau(x) \frac{d}{dx}$$

## CASOS PARTICULARES

- 1 **Caminos aleatorios:**  $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, \dots\}$ ,  $\mathcal{T} = \{0, 1, 2, \dots\}$ .

$$P = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & & & \\ c_1 & b_1 & a_1 & & \\ & c_2 & b_2 & a_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad b_i \geq 0, a_i, c_i > 0, \quad a_i + b_i + c_i = 1$$

- 2 **Procesos de nacimiento y muerte:**  $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, \dots\}$ ,  $\mathcal{T} = [0, \infty)$ .  
 $P'(t) = \mathcal{A}P(t)$  y  $P'(t) = P(t)\mathcal{A}$  donde

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & & & \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & & \\ & \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \lambda_i, \mu_i > 0$$

- 3 **Procesos de difusión:**  $\mathcal{S} = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{T} = [0, \infty)$ .  
 $\frac{\partial}{\partial t} p(t; x, y) = \mathcal{A}p(t; x, y)$  y  $\frac{\partial}{\partial t} p(t; x, y) = \mathcal{A}^* p(t; x, y)$  donde

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \sigma^2(x) \frac{d^2}{dx^2} + \tau(x) \frac{d}{dx}$$

## CASOS PARTICULARES

- 1 **Caminos aleatorios:**  $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, \dots\}$ ,  $\mathcal{T} = \{0, 1, 2, \dots\}$ .

$$P = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & & & \\ c_1 & b_1 & a_1 & & \\ & c_2 & b_2 & a_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad b_i \geq 0, a_i, c_i > 0, \quad a_i + b_i + c_i = 1$$

- 2 **Procesos de nacimiento y muerte:**  $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, \dots\}$ ,  $\mathcal{T} = [0, \infty)$ .

$P'(t) = \mathcal{A}P(t)$  y  $P'(t) = P(t)\mathcal{A}$  donde

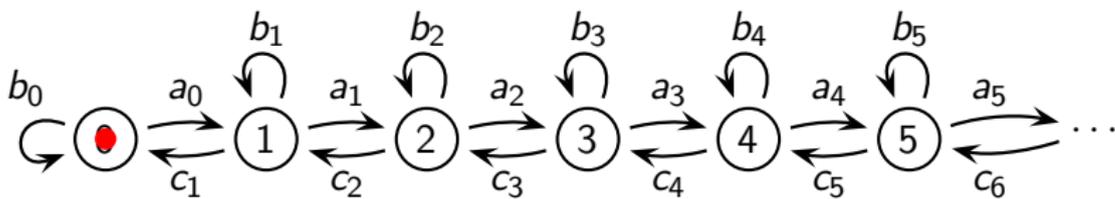
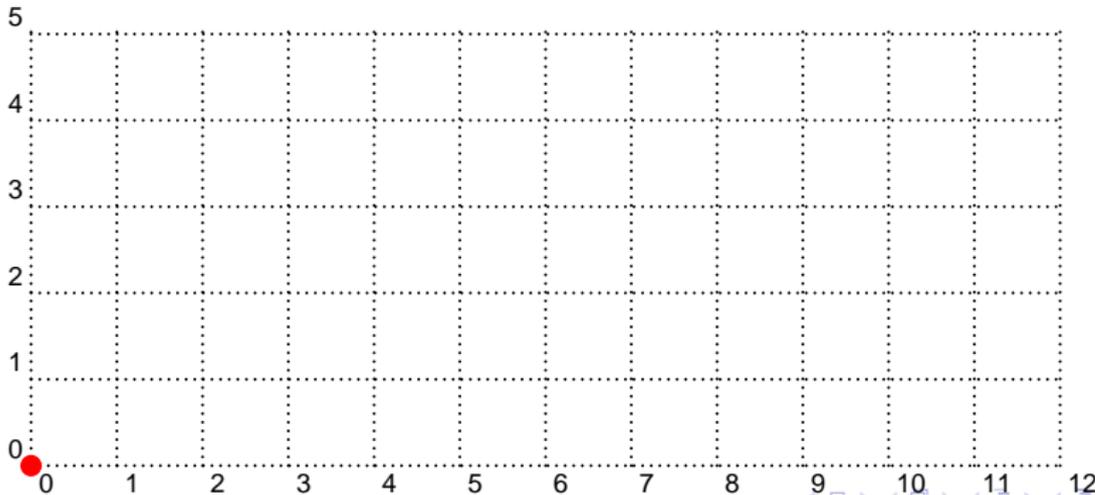
$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & & & \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & & \\ & \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \lambda_i, \mu_i > 0$$

- 3 **Procesos de difusión:**  $\mathcal{S} = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{T} = [0, \infty)$ .

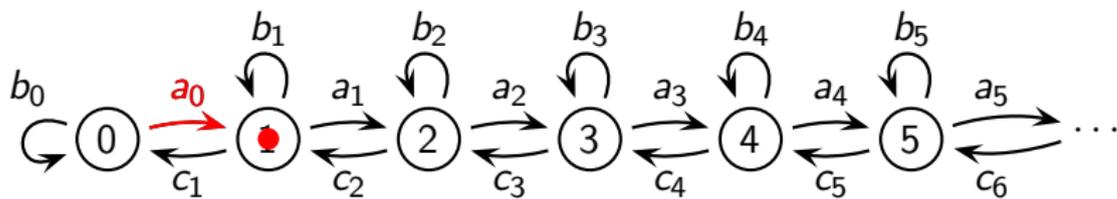
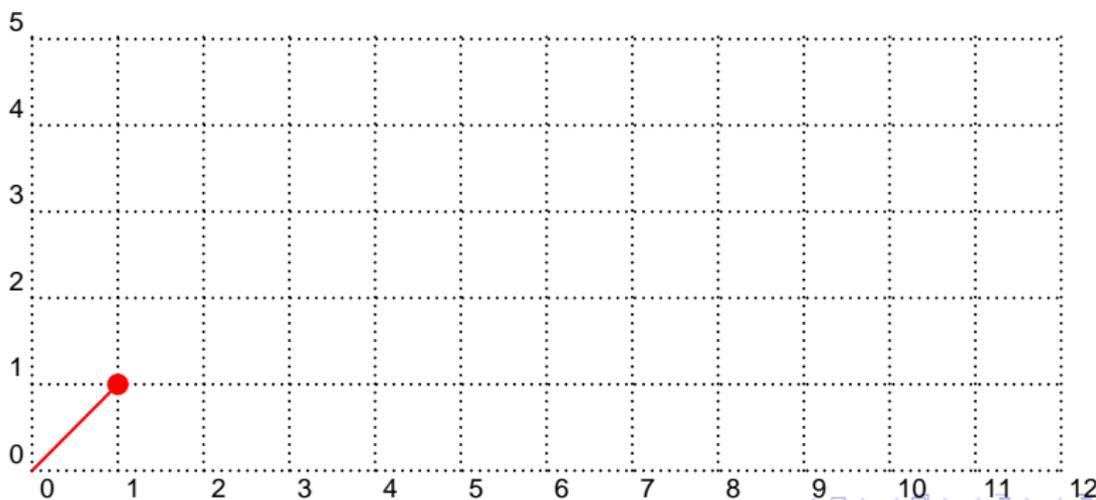
$\frac{\partial}{\partial t} p(t; x, y) = \mathcal{A}p(t; x, y)$  y  $\frac{\partial}{\partial t} p(t; x, y) = \mathcal{A}^* p(t; x, y)$  donde

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \sigma^2(x) \frac{d^2}{dx^2} + \tau(x) \frac{d}{dx}$$

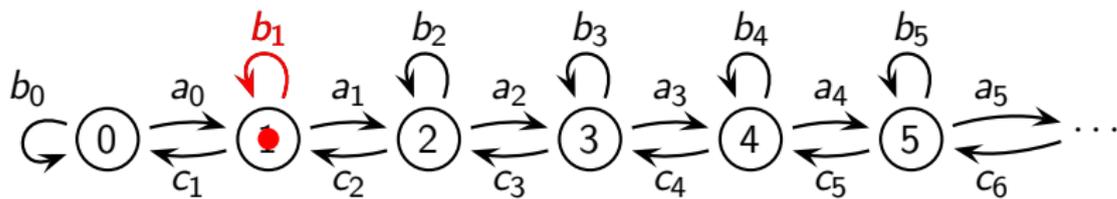
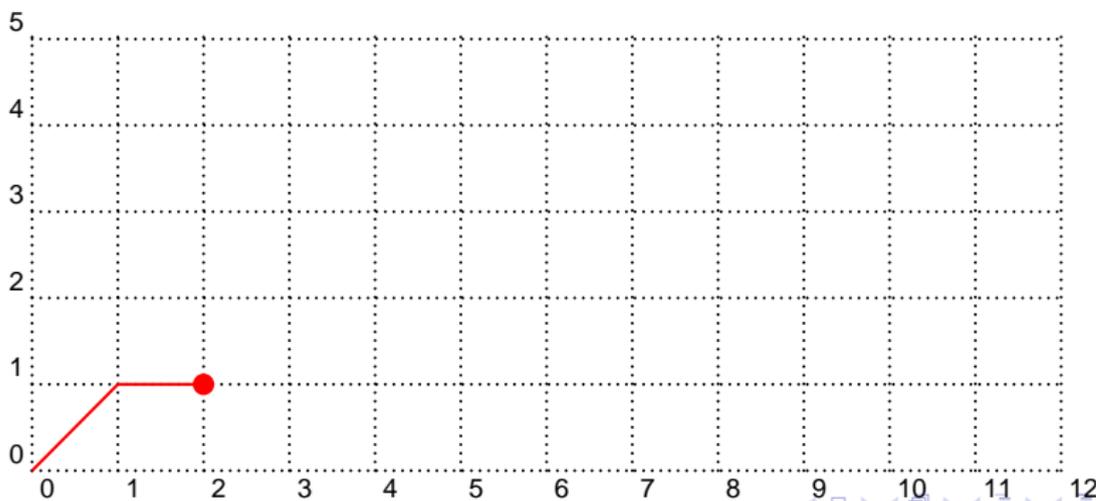
## CAMINOS ALEATORIOS

 $S$ 

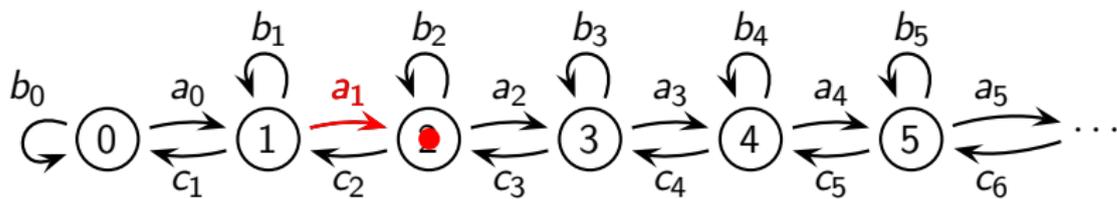
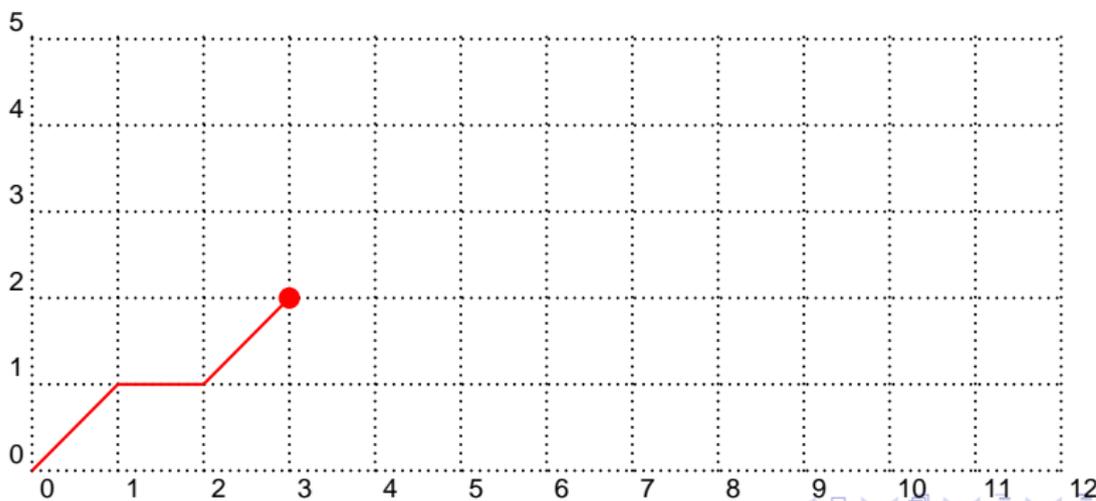
## CAMINOS ALEATORIOS

 $S$ 

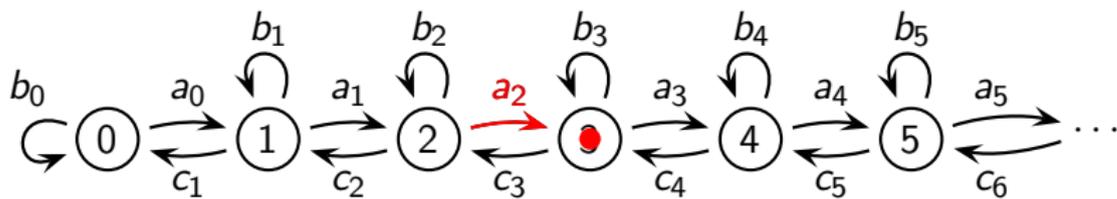
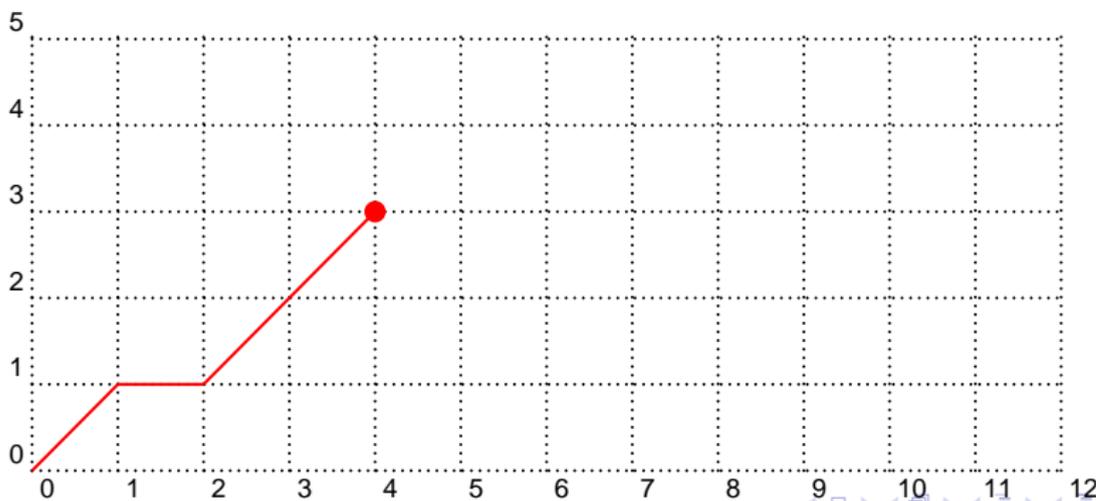
## CAMINOS ALEATORIOS

 $S$  $T$

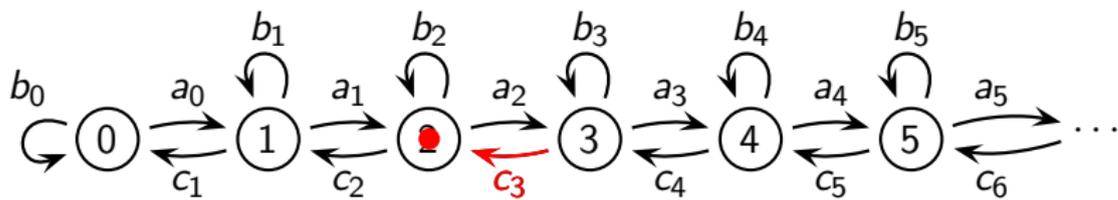
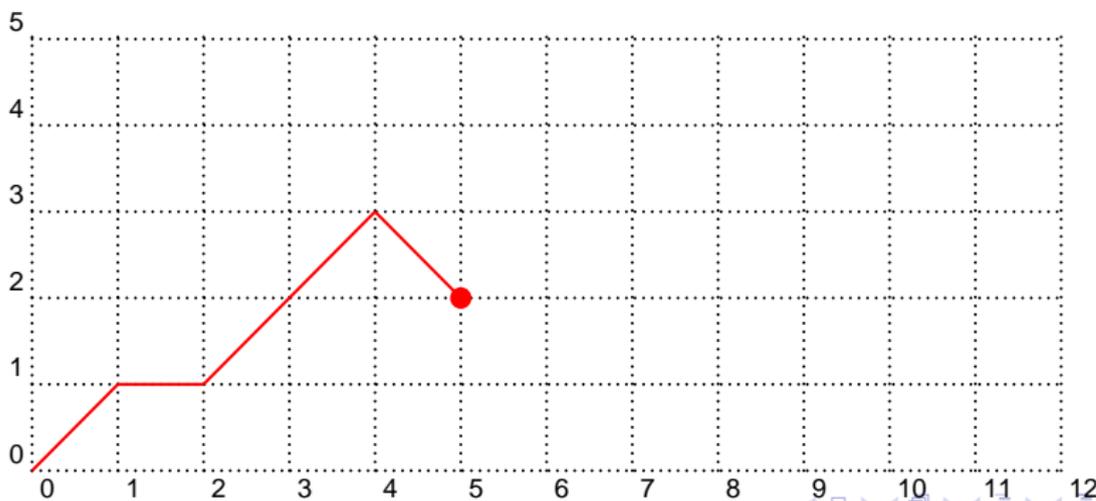
## CAMINOS ALEATORIOS

 $S$ 

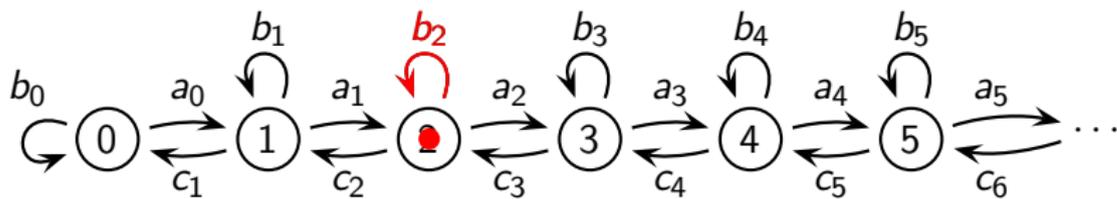
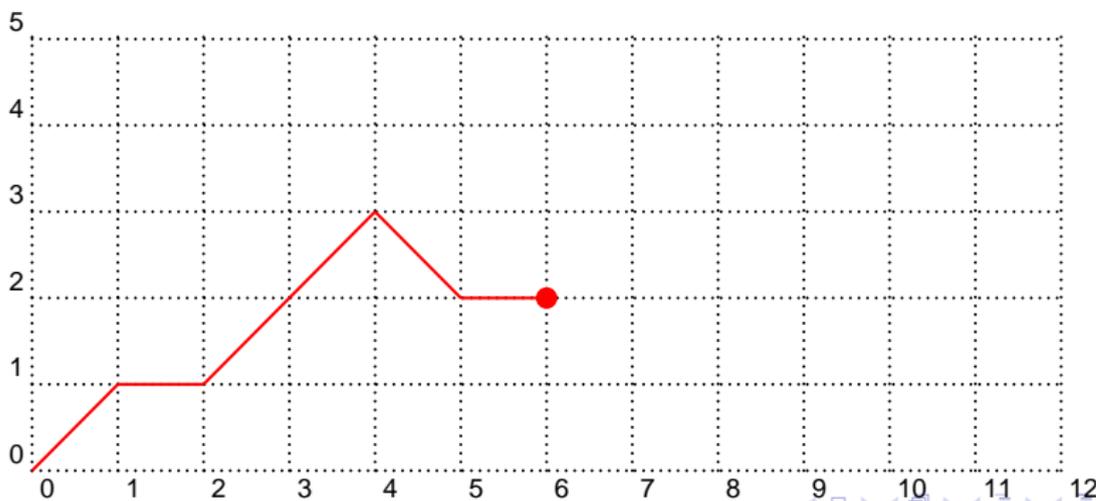
## CAMINOS ALEATORIOS

 $S$  $T$

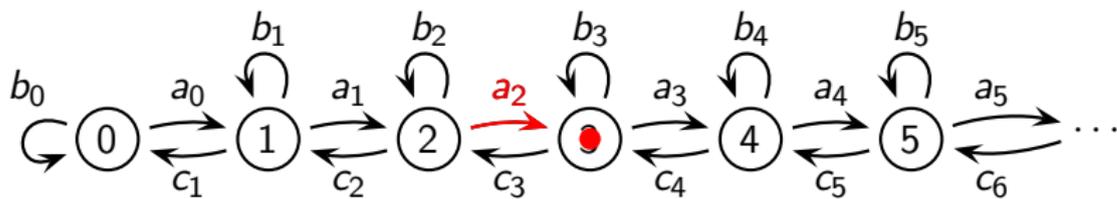
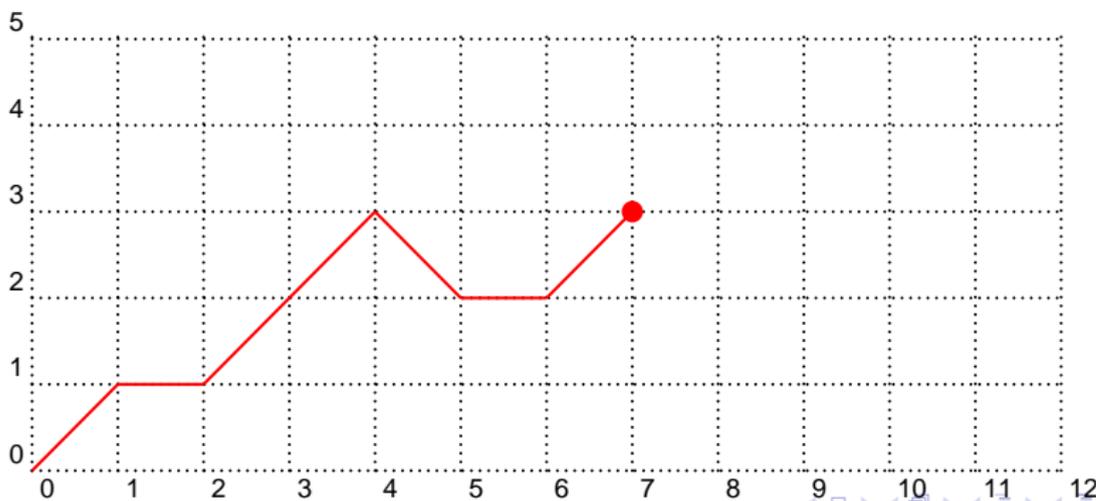
## CAMINOS ALEATORIOS

 $S$ 

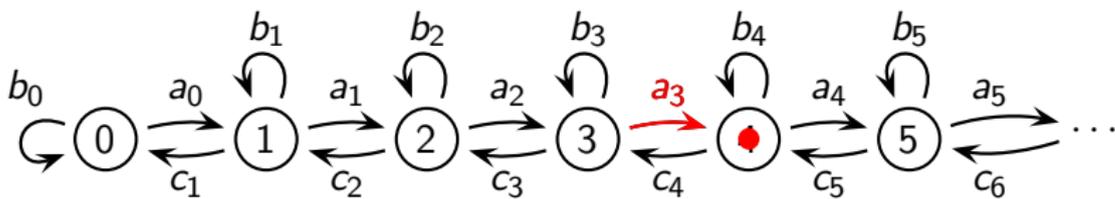
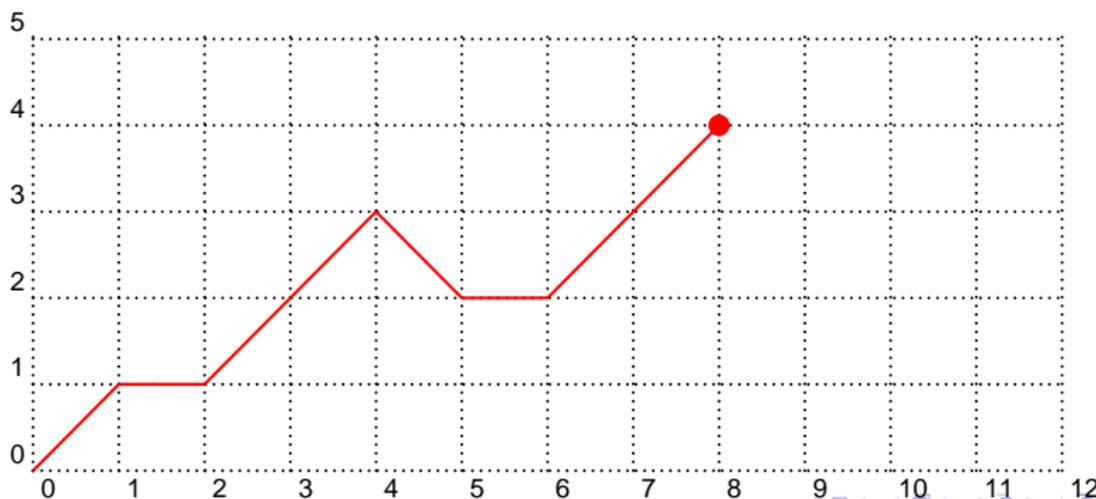
## CAMINOS ALEATORIOS

 $S$  $T$

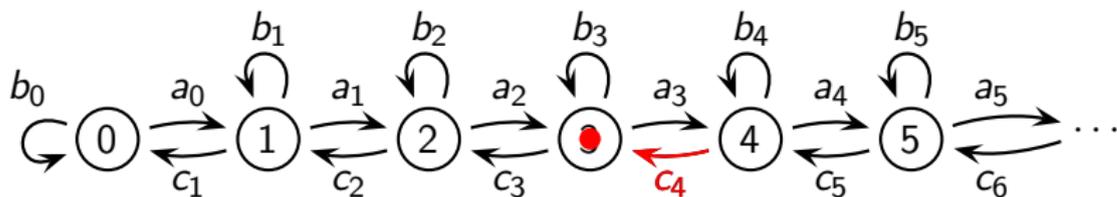
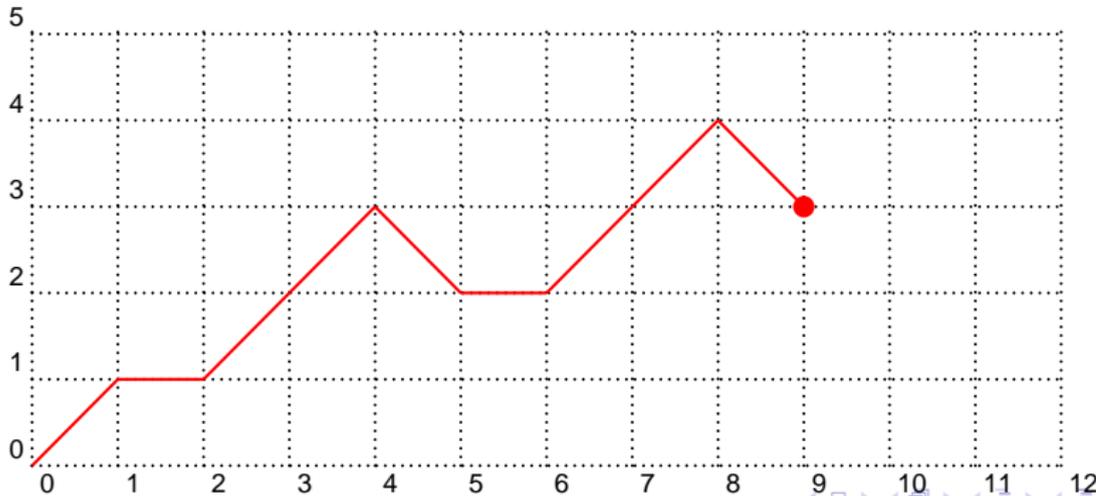
## CAMINOS ALEATORIOS

 $S$  $T$

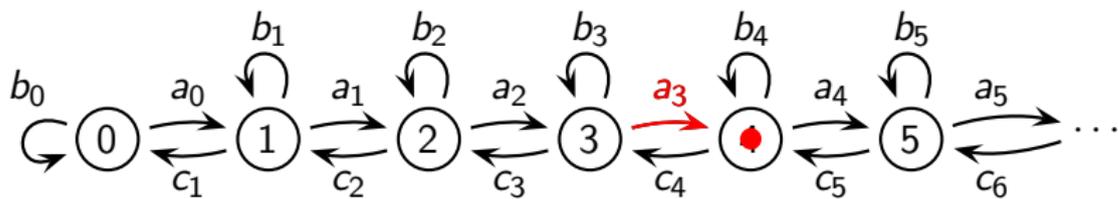
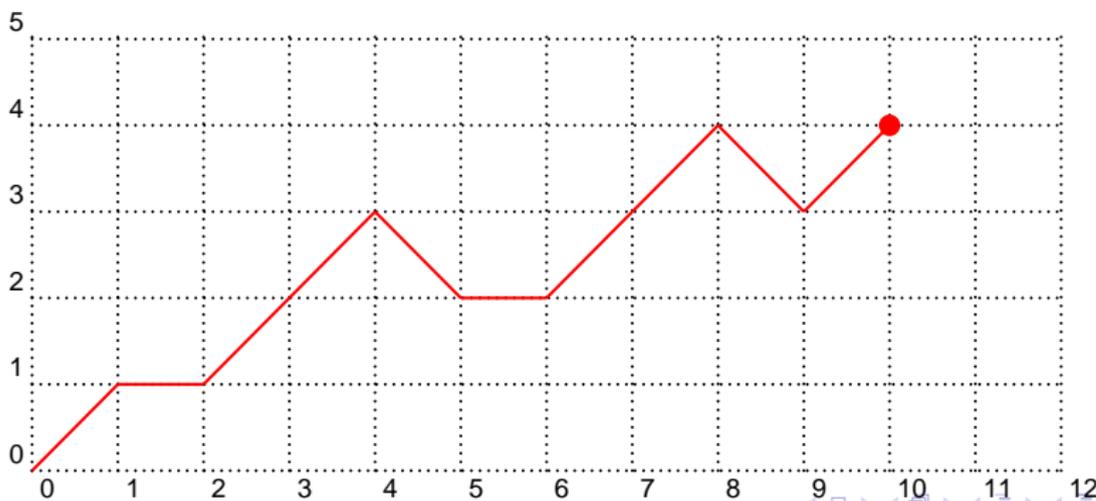
## CAMINOS ALEATORIOS

 $S$  $T$

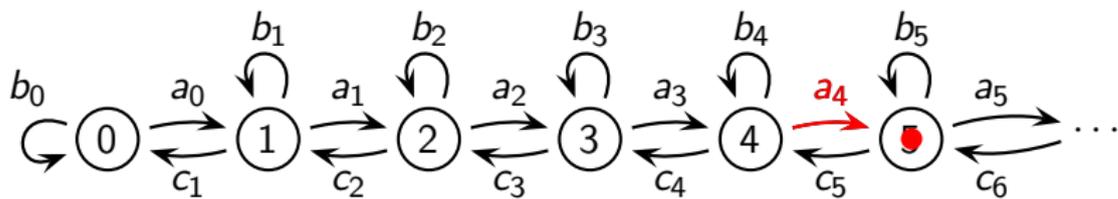
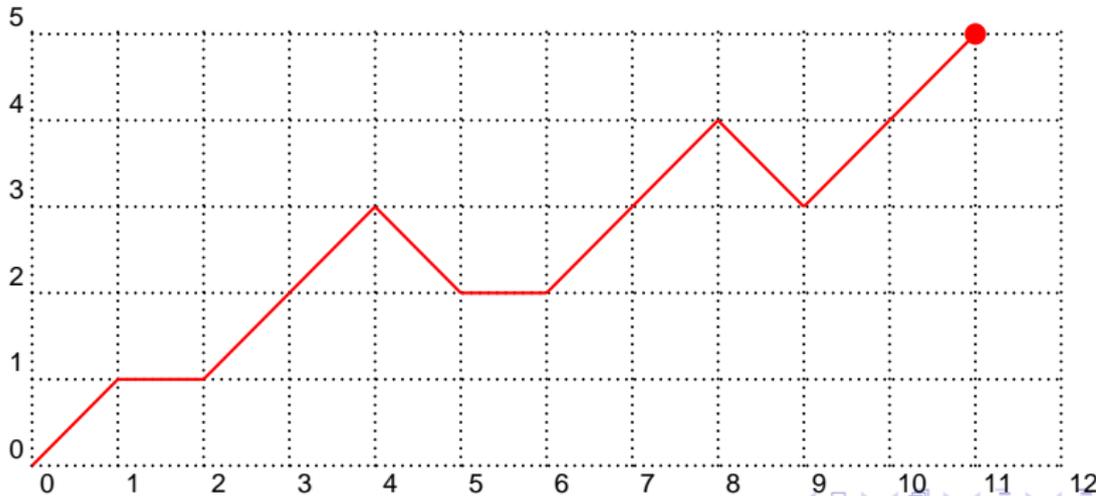
## CAMINOS ALEATORIOS

 $S$  $T$

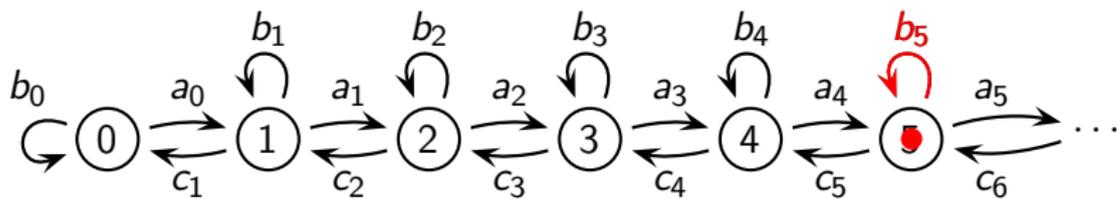
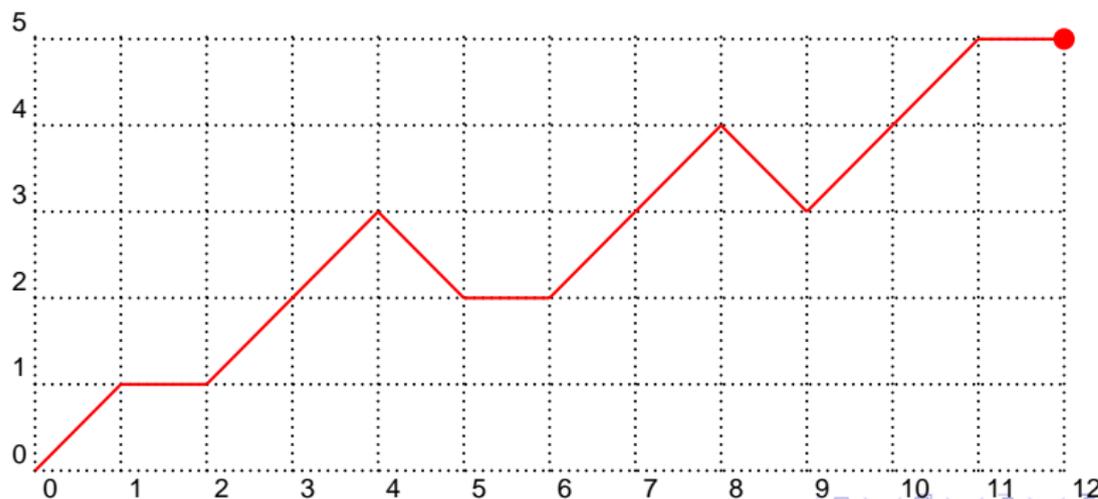
## CAMINOS ALEATORIOS

 $S$  $T$

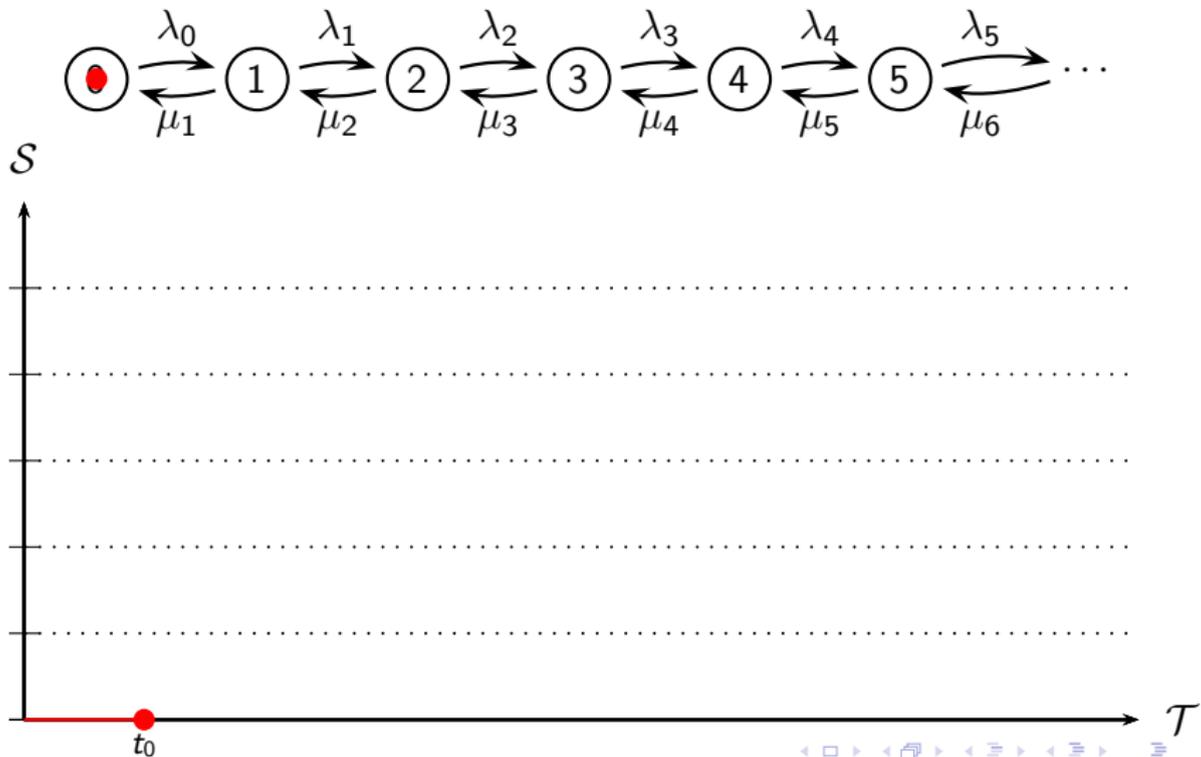
## CAMINOS ALEATORIOS

 $S$  $T$

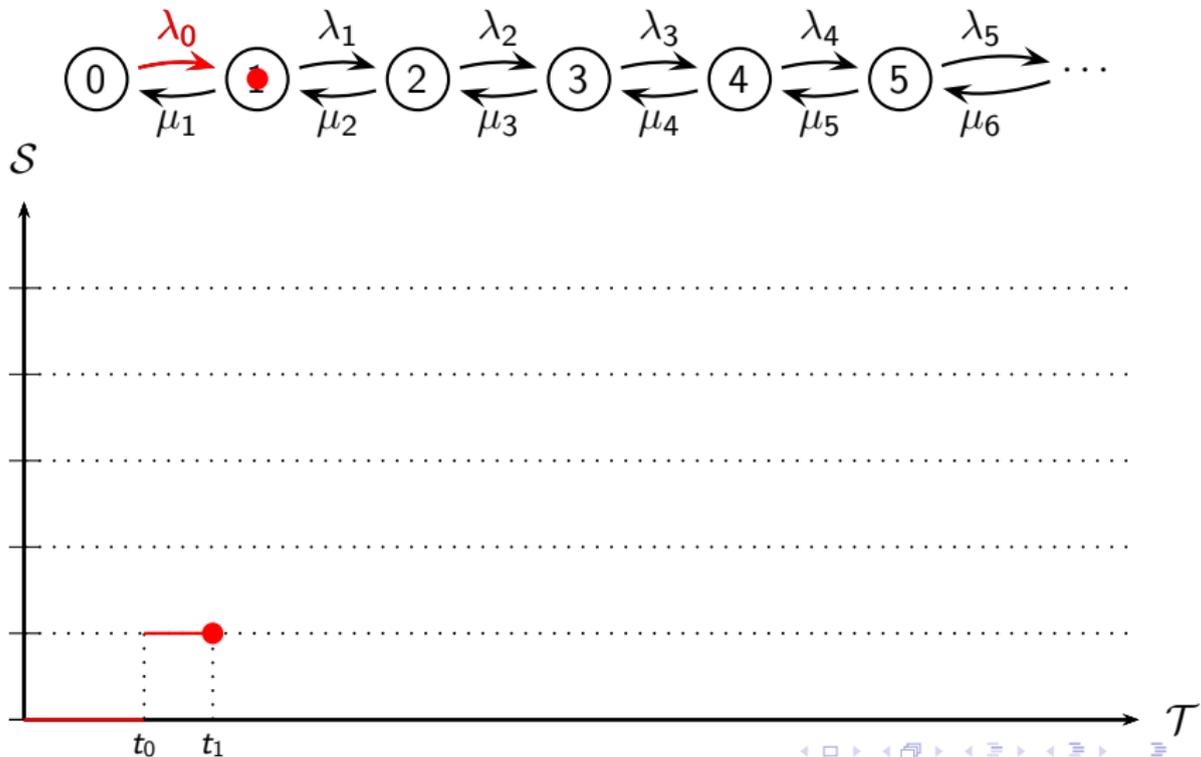
## CAMINOS ALEATORIOS

 $S$  $T$

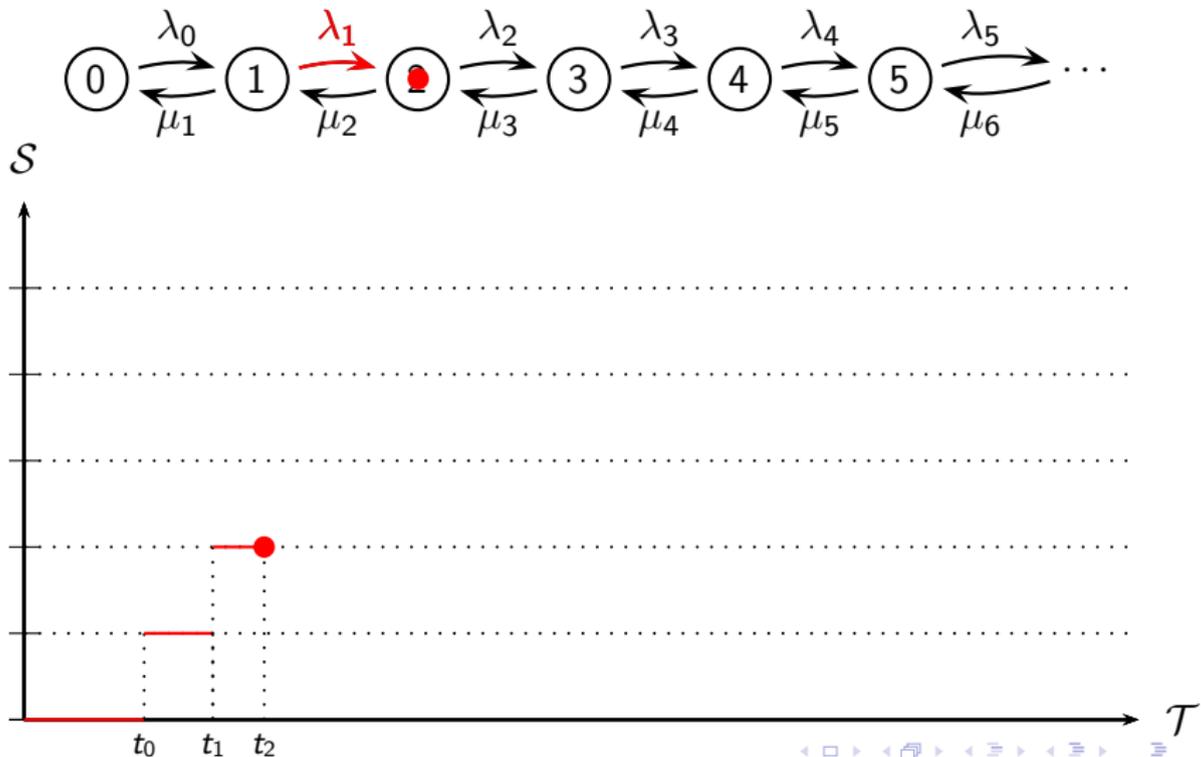
# PROCESOS DE NACIMIENTO Y MUERTE



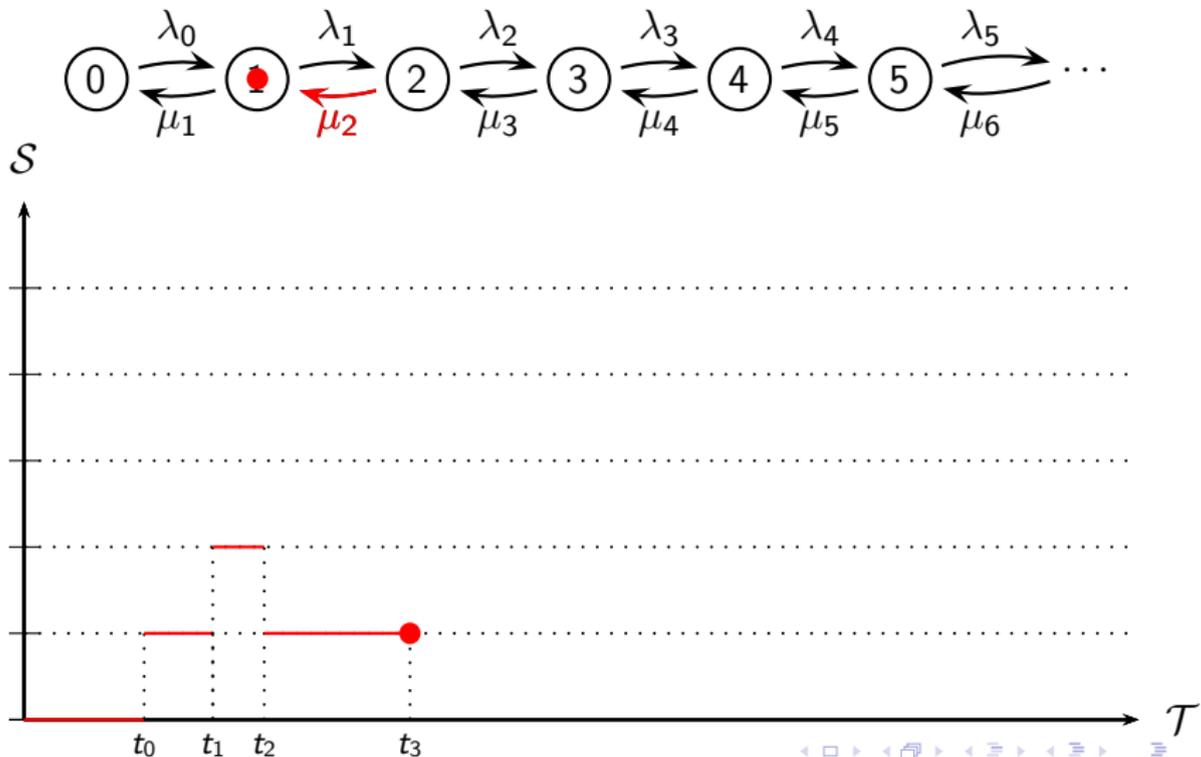
## PROCESOS DE NACIMIENTO Y MUERTE



# PROCESOS DE NACIMIENTO Y MUERTE

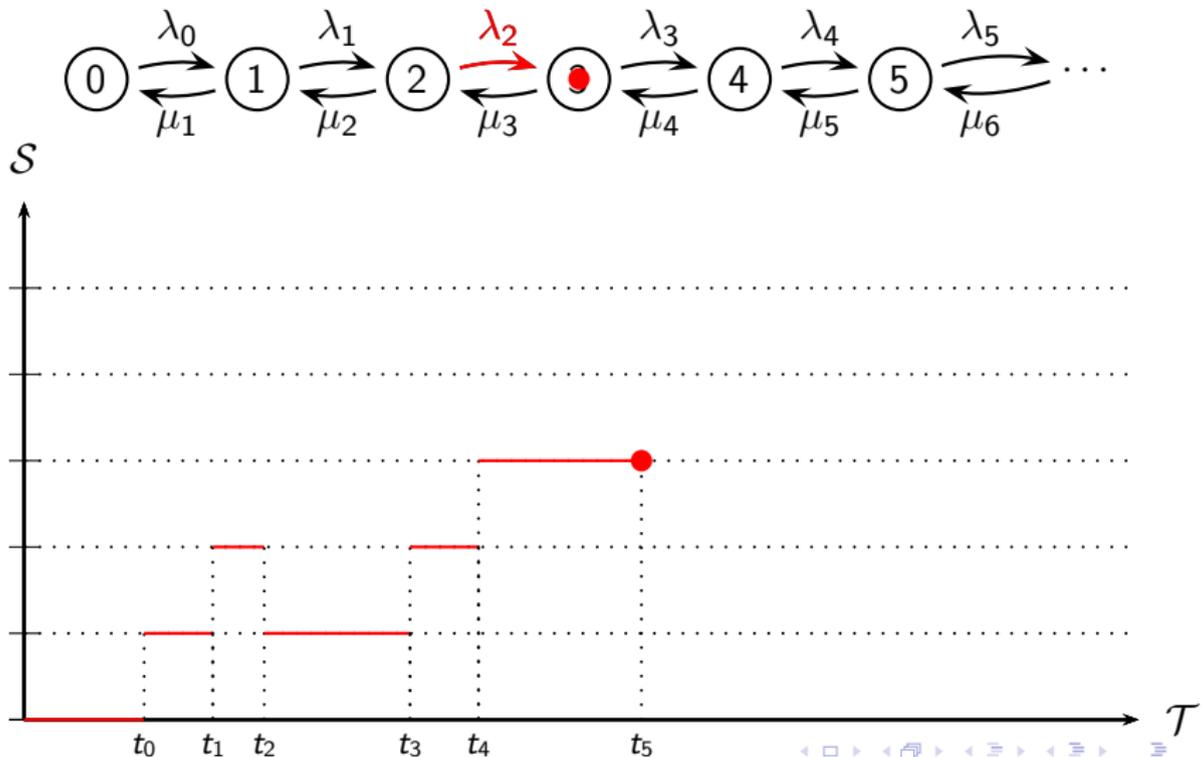


# PROCESOS DE NACIMIENTO Y MUERTE

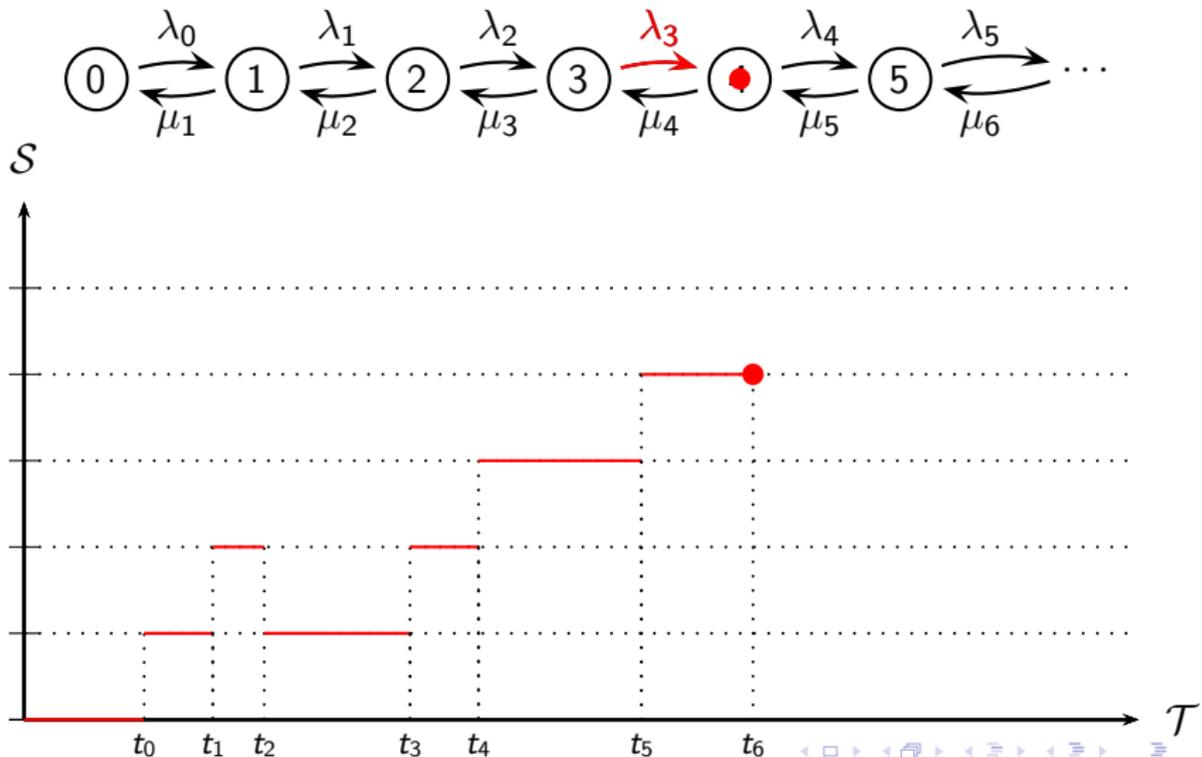




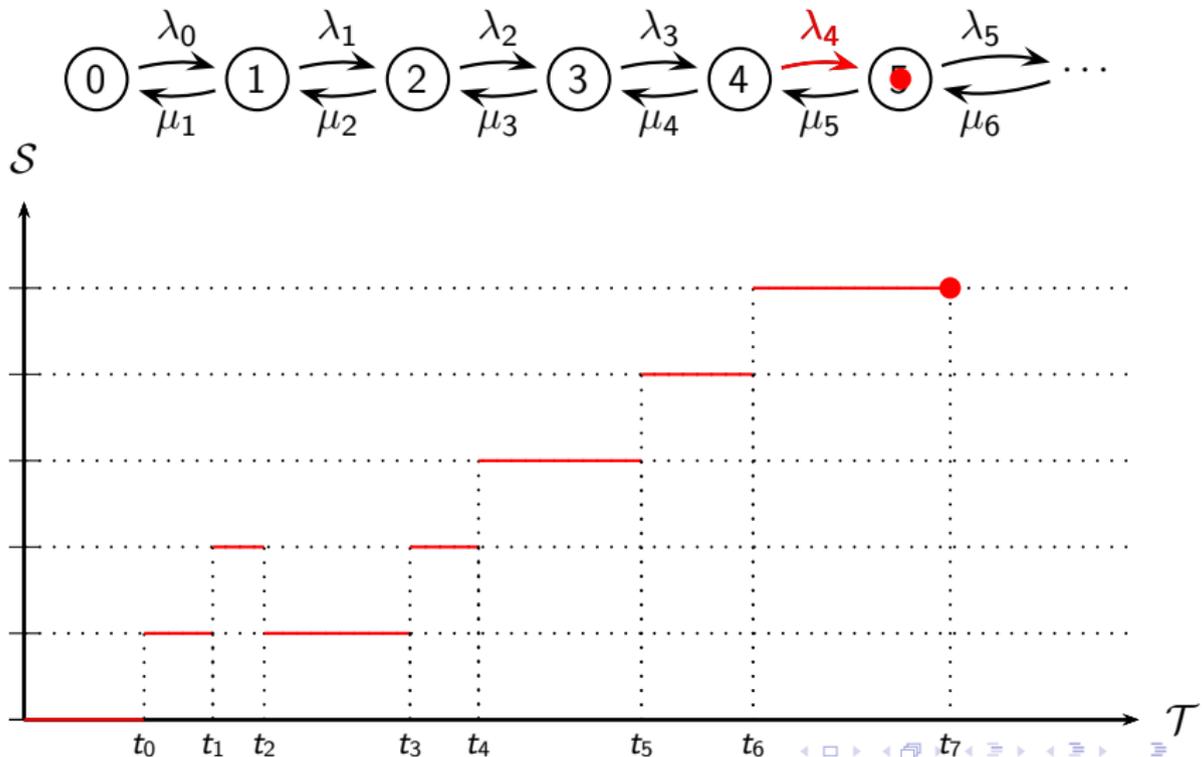
## PROCESOS DE NACIMIENTO Y MUERTE



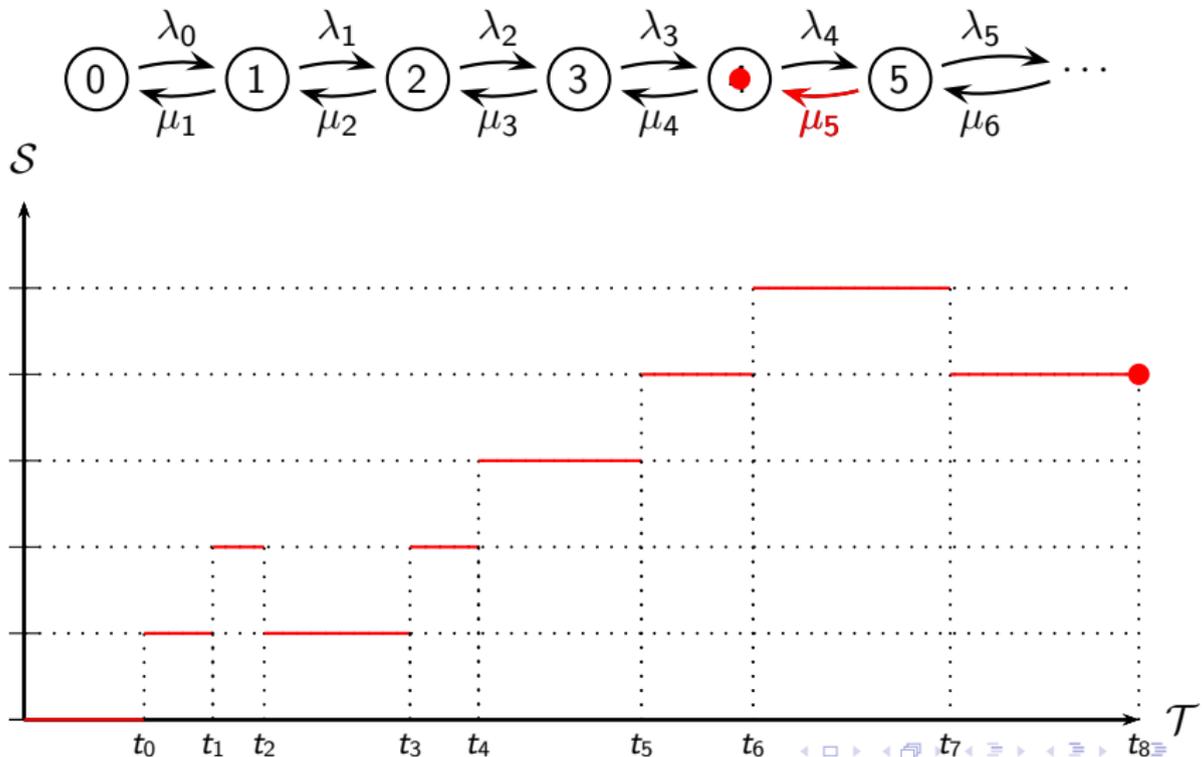
# PROCESOS DE NACIMIENTO Y MUERTE



# PROCESOS DE NACIMIENTO Y MUERTE

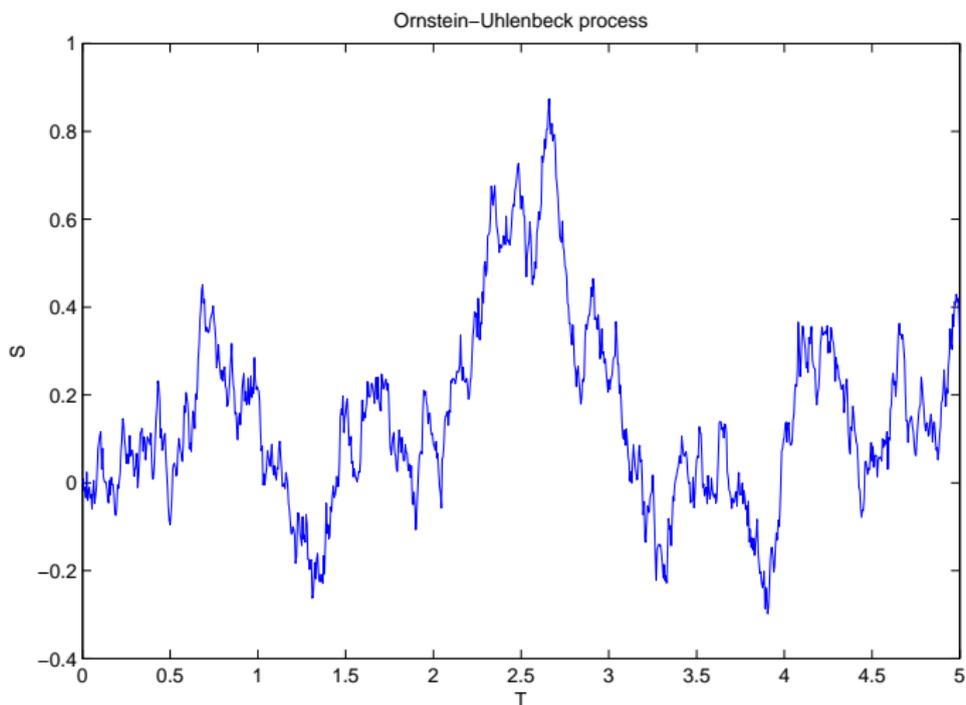


## PROCESOS DE NACIMIENTO Y MUERTE



# PROCESOS DE DIFUSIÓN

Proceso de Ornstein-Uhlenbeck:  $\mathcal{S} = \mathbb{R}$ ,  $\sigma^2(x) = 1$ ,  $\tau(x) = -x$ .



# MÉTODOS ESPECTRALES

Dado el operador infinitesimal  $\mathcal{A}$ , si podemos encontrar una **medida**  $\omega(x)$  asociada a  $\mathcal{A}$ , y un conjunto de **autofunciones ortogonales**  $f(i, x)$  tal que

$$\mathcal{A}f(i, x) = \lambda(i, x)f(i, x),$$

entonces es posible encontrar **representaciones espectrales** de

- **Probabilidades de transición**  $P_{ij}(t)$  (caso discreto)  
o **densidades**  $p(t; x, y)$  (caso continuo).
- **Medida o distribución invariante**  $\pi = (\pi_j)$  (caso discreto) con

$$\pi_j = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}(t)$$

o  $\psi(y)$  (caso continuo) con

$$\psi(y) = \lim_{t \rightarrow \infty} p(t; x, y).$$

# MÉTODOS ESPECTRALES

Dado el operador infinitesimal  $\mathcal{A}$ , si podemos encontrar una **medida**  $\omega(x)$  asociada a  $\mathcal{A}$ , y un conjunto de **autofunciones ortogonales**  $f(i, x)$  tal que

$$\mathcal{A}f(i, x) = \lambda(i, x)f(i, x),$$

entonces es posible encontrar **representaciones espectrales** de

- **Probabilidades de transición**  $P_{ij}(t)$  (caso discreto) o **densidades**  $p(t; x, y)$  (caso continuo).
- **Medida o distribución invariante**  $\pi = (\pi_j)$  (caso discreto) con

$$\pi_j = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}(t)$$

o  $\psi(y)$  (caso continuo) con

$$\psi(y) = \lim_{t \rightarrow \infty} p(t; x, y).$$

# MÉTODOS ESPECTRALES

Dado el operador infinitesimal  $\mathcal{A}$ , si podemos encontrar una **medida**  $\omega(x)$  asociada a  $\mathcal{A}$ , y un conjunto de **autofunciones ortogonales**  $f(i, x)$  tal que

$$\mathcal{A}f(i, x) = \lambda(i, x)f(i, x),$$

entonces es posible encontrar **representaciones espectrales** de

- **Probabilidades de transición**  $P_{ij}(t)$  (caso discreto) o **densidades**  $p(t; x, y)$  (caso continuo).
- **Medida o distribución invariante**  $\pi = (\pi_j)$  (caso discreto) con

$$\pi_j = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}(t)$$

o  $\psi(y)$  (caso continuo) con

$$\psi(y) = \lim_{t \rightarrow \infty} p(t; x, y).$$

# CAMINOS ALEATORIOS

$$\mathcal{S} = \mathcal{T} = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

**Teorema espectral:** existe una medida  $\omega$  asociada a  $P$  y su correspondiente familia de **polinomios ortogonales**  $(q_n)_n$  tal que

$$Pq = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & & & \\ c_1 & b_1 & a_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0(x) \\ q_1(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} q_0(x) \\ q_1(x) \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad x \in [-1, 1]$$

## PROBABILIDADES DE TRANSICIÓN

$$\Pr(X_n = j | X_0 = i) = P_{ij}^n = \frac{1}{\|q_i\|^2} \int_{-1}^1 x^n q_i(x) q_j(x) d\omega(x)$$

## MEDIDA INVARIANTE

Vector no nulo  $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots) \geq 0$  tal que

$$\pi P = \pi \quad \Rightarrow \quad \pi_i = \frac{a_0 a_1 \cdots a_{i-1}}{c_1 c_2 \cdots c_i} = \frac{1}{\|q_i\|^2}$$

Ejemplos: polinomios de Jacobi (Legendre, Gegenbauer)

# CAMINOS ALEATORIOS

$$\mathcal{S} = \mathcal{T} = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

**Teorema espectral:** existe una medida  $\omega$  asociada a  $P$  y su correspondiente familia de **polinomios ortogonales**  $(q_n)_n$  tal que

$$Pq = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & & & \\ c_1 & b_1 & a_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0(x) \\ q_1(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} q_0(x) \\ q_1(x) \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad x \in [-1, 1]$$

## PROBABILIDADES DE TRANSICIÓN

$$\Pr(X_n = j | X_0 = i) = P_{ij}^n = \frac{1}{\|q_i\|^2} \int_{-1}^1 x^n q_i(x) q_j(x) d\omega(x)$$

## MEDIDA INVARIANTE

Vector no nulo  $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots) \geq 0$  tal que

$$\pi P = \pi \quad \Rightarrow \quad \pi_i = \frac{a_0 a_1 \cdots a_{i-1}}{c_1 c_2 \cdots c_i} = \frac{1}{\|q_i\|^2}$$

Ejemplos: polinomios de Jacobi (Legendre, Gegenbauer)

# CAMINOS ALEATORIOS

$$\mathcal{S} = \mathcal{T} = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

**Teorema espectral:** existe una medida  $\omega$  asociada a  $P$  y su correspondiente familia de **polinomios ortogonales**  $(q_n)_n$  tal que

$$Pq = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & & & \\ c_1 & b_1 & a_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0(x) \\ q_1(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} q_0(x) \\ q_1(x) \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad x \in [-1, 1]$$

## PROBABILIDADES DE TRANSICIÓN

$$\Pr(X_n = j | X_0 = i) = P_{ij}^n = \frac{1}{\|q_i\|^2} \int_{-1}^1 x^n q_i(x) q_j(x) d\omega(x)$$

## MEDIDA INVARIANTE

Vector no nulo  $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots) \geq 0$  tal que

$$\pi P = \pi \quad \Rightarrow \quad \pi_i = \frac{a_0 a_1 \cdots a_{i-1}}{c_1 c_2 \cdots c_i} = \frac{1}{\|q_i\|^2}$$

Ejemplos: polinomios de Jacobi (Legendre, Gegenbauer)

# CAMINOS ALEATORIOS

$$\mathcal{S} = \mathcal{T} = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

**Teorema espectral:** existe una medida  $\omega$  asociada a  $P$  y su correspondiente familia de **polinomios ortogonales**  $(q_n)_n$  tal que

$$Pq = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & & & \\ c_1 & b_1 & a_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0(x) \\ q_1(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} q_0(x) \\ q_1(x) \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad x \in [-1, 1]$$

## PROBABILIDADES DE TRANSICIÓN

$$\Pr(X_n = j | X_0 = i) = P_{ij}^n = \frac{1}{\|q_i\|^2} \int_{-1}^1 x^n q_i(x) q_j(x) d\omega(x)$$

## MEDIDA INVARIANTE

Vector no nulo  $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots) \geq 0$  tal que

$$\pi P = \pi \quad \Rightarrow \quad \pi_i = \frac{a_0 a_1 \cdots a_{i-1}}{c_1 c_2 \cdots c_i} = \frac{1}{\|q_i\|^2}$$

Ejemplos: polinomios de Jacobi (Legendre, Gegenbauer)

# PROCESOS DE NACIMIENTO Y MUERTE

$$\mathcal{S} = \{0, 1, 2, \dots\}, \mathcal{T} = [0, \infty).$$

**Teorema espectral:** existe una medida  $\omega$  asociada a  $\mathcal{A}$  y su correspondiente familia de **polinomios ortogonales**  $(q_n)_n$  tal que

$$\mathcal{A}q = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & & & \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0(x) \\ q_1(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = -x \begin{pmatrix} q_0(x) \\ q_1(x) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

## PROBABILIDADES DE TRANSICIÓN

$$\Pr(X_t = j | X_0 = i) = P_{ij}(t) = \frac{1}{\|q_i\|^2} \int_0^\infty e^{-xt} q_i(x) q_j(x) d\omega(x)$$

## MEDIDA INVARIANTE

Vector no nulo  $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots) \geq 0$  tal que

$$\pi \mathcal{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \pi_i = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_i} = \frac{1}{\|q_i\|^2}$$

Ejemplos: polinomios de Laguerre

# PROCESOS DE NACIMIENTO Y MUERTE

$$\mathcal{S} = \{0, 1, 2, \dots\}, \mathcal{T} = [0, \infty).$$

**Teorema espectral:** existe una medida  $\omega$  asociada a  $\mathcal{A}$  y su correspondiente familia de **polinomios ortogonales**  $(q_n)_n$  tal que

$$\mathcal{A}q = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & & & \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0(x) \\ q_1(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = -x \begin{pmatrix} q_0(x) \\ q_1(x) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

## PROBABILIDADES DE TRANSICIÓN

$$\Pr(X_t = j | X_0 = i) = P_{ij}(t) = \frac{1}{\|q_i\|^2} \int_0^\infty e^{-xt} q_i(x) q_j(x) d\omega(x)$$

## MEDIDA INVARIANTE

Vector no nulo  $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots) \geq 0$  tal que

$$\pi \mathcal{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \pi_i = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_i} = \frac{1}{\|q_i\|^2}$$

Ejemplos: polinomios de Laguerre

# PROCESOS DE NACIMIENTO Y MUERTE

$$\mathcal{S} = \{0, 1, 2, \dots\}, \mathcal{T} = [0, \infty).$$

**Teorema espectral:** existe una medida  $\omega$  asociada a  $\mathcal{A}$  y su correspondiente familia de **polinomios ortogonales**  $(q_n)_n$  tal que

$$\mathcal{A}q = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & & & \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0(x) \\ q_1(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = -x \begin{pmatrix} q_0(x) \\ q_1(x) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

## PROBABILIDADES DE TRANSICIÓN

$$\Pr(X_t = j | X_0 = i) = P_{ij}(t) = \frac{1}{\|q_i\|^2} \int_0^\infty e^{-xt} q_i(x) q_j(x) d\omega(x)$$

## MEDIDA INVARIANTE

Vector no nulo  $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots) \geq 0$  tal que

$$\pi \mathcal{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \pi_i = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_i} = \frac{1}{\|q_i\|^2}$$

Ejemplos: polinomios de Laguerre

# PROCESOS DE NACIMIENTO Y MUERTE

$$\mathcal{S} = \{0, 1, 2, \dots\}, \mathcal{T} = [0, \infty).$$

**Teorema espectral:** existe una medida  $\omega$  asociada a  $\mathcal{A}$  y su correspondiente familia de **polinomios ortogonales**  $(q_n)_n$  tal que

$$\mathcal{A}q = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & & & \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0(x) \\ q_1(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = -x \begin{pmatrix} q_0(x) \\ q_1(x) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

## PROBABILIDADES DE TRANSICIÓN

$$\Pr(X_t = j | X_0 = i) = P_{ij}(t) = \frac{1}{\|q_i\|^2} \int_0^\infty e^{-xt} q_i(x) q_j(x) d\omega(x)$$

## MEDIDA INVARIANTE

Vector no nulo  $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots) \geq 0$  tal que

$$\pi \mathcal{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \pi_i = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_i} = \frac{1}{\|q_i\|^2}$$

Ejemplos: polinomios de Laguerre

# PROCESOS DE DIFUSIÓN

$$\mathcal{S} = (a, b) \subseteq \mathbb{R}, \mathcal{T} = [0, \infty)$$

Si existe una medida positiva  $\omega$  simétrica con respecto a  $\mathcal{A}$  y su correspondiente familia de **funciones ortogonales**  $(\phi_n)_n$  tal que

$$\mathcal{A}\phi_n(x) = \frac{1}{2}\sigma^2(x)\phi_n''(x) + \tau(x)\phi_n'(x) = \alpha_n\phi_n(x)$$

## PROBABILIDADES DE TRANSICIÓN

$$p(t; x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\alpha_n t} \phi_n(x) \phi_n(y) \omega(y)$$

## MEDIDA INVARIANTE

$$\psi(y) \quad \text{tal que} \quad \mathcal{A}^*\psi(y) = 0 \Rightarrow \psi(y) = \frac{1}{\int_{\mathcal{S}} \omega(x) dx} \omega(y)$$

Ejemplos: polinomios de Hermite, Laguerre y Jacobi.

# PROCESOS DE DIFUSIÓN

$$\mathcal{S} = (a, b) \subseteq \mathbb{R}, \mathcal{T} = [0, \infty)$$

Si existe una medida positiva  $\omega$  simétrica con respecto a  $\mathcal{A}$  y su correspondiente familia de **funciones ortogonales**  $(\phi_n)_n$  tal que

$$\mathcal{A}\phi_n(x) = \frac{1}{2}\sigma^2(x)\phi_n''(x) + \tau(x)\phi_n'(x) = \alpha_n\phi_n(x)$$

## PROBABILIDADES DE TRANSICIÓN

$$p(t; x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\alpha_n t} \phi_n(x) \phi_n(y) \omega(y)$$

## MEDIDA INVARIANTE

$$\psi(y) \quad \text{tal que} \quad \mathcal{A}^*\psi(y) = 0 \Rightarrow \psi(y) = \frac{1}{\int_{\mathcal{S}} \omega(x) dx} \omega(y)$$

Ejemplos: polinomios de Hermite, Laguerre y Jacobi.

# PROCESOS DE DIFUSIÓN

$$\mathcal{S} = (a, b) \subseteq \mathbb{R}, \mathcal{T} = [0, \infty)$$

Si existe una medida positiva  $\omega$  simétrica con respecto a  $\mathcal{A}$  y su correspondiente familia de **funciones ortogonales**  $(\phi_n)_n$  tal que

$$\mathcal{A}\phi_n(x) = \frac{1}{2}\sigma^2(x)\phi_n''(x) + \tau(x)\phi_n'(x) = \alpha_n\phi_n(x)$$

## PROBABILIDADES DE TRANSICIÓN

$$p(t; x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\alpha_n t} \phi_n(x) \phi_n(y) \omega(y)$$

## MEDIDA INVARIANTE

$$\psi(y) \quad \text{tal que} \quad \mathcal{A}^*\psi(y) = 0 \Rightarrow \psi(y) = \frac{1}{\int_{\mathcal{S}} \omega(x) dx} \omega(y)$$

Ejemplos: polinomios de Hermite, Laguerre y Jacobi.

# PROCESOS DE DIFUSIÓN

$$\mathcal{S} = (a, b) \subseteq \mathbb{R}, \mathcal{T} = [0, \infty)$$

Si existe una medida positiva  $\omega$  simétrica con respecto a  $\mathcal{A}$  y su correspondiente familia de **funciones ortogonales**  $(\phi_n)_n$  tal que

$$\mathcal{A}\phi_n(x) = \frac{1}{2}\sigma^2(x)\phi_n''(x) + \tau(x)\phi_n'(x) = \alpha_n\phi_n(x)$$

## PROBABILIDADES DE TRANSICIÓN

$$p(t; x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\alpha_n t} \phi_n(x) \phi_n(y) \omega(y)$$

## MEDIDA INVARIANTE

$$\psi(y) \quad \text{tal que} \quad \mathcal{A}^*\psi(y) = 0 \Rightarrow \psi(y) = \frac{1}{\int_{\mathcal{S}} \omega(x) dx} \omega(y)$$

Ejemplos: polinomios de Hermite, Laguerre y Jacobi.

# SUMARIO

- 1 PROCESOS DE MARKOV
- 2 PROCESOS DE MARKOV BIDIMENSIONALES
- 3 APLICACIÓN A UN MODELO DE WRIGHT-FISHER

# PROCESOS DE MARKOV BIDIMENSIONALES

Ahora tenemos un proceso de Markov bidimensional de la forma  $\{(X_t, Y_t) : t \in \mathcal{T}\}$  donde  $\mathcal{T}$  es el tiempo y el espacio de estados es  $\mathcal{C} = \mathcal{S} \times \{1, 2, \dots, N\}$ , donde  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$ . La primera componente se denomina **nivel** mientras la segunda componente es la **fase**.

Las probabilidades de transición vienen ahora en términos de una función matricial  $\mathbf{P}(t; x, A)$ , definida para cada  $t \in \mathcal{T}, x \in \mathcal{S}, A \subset \mathcal{S}$ , cuya entrada  $(i, j)$  da

$$\mathbf{P}_{ij}(t; x, A) = \Pr\{X_t \in A, Y_t = j | X_0 = x, Y_0 = i\}.$$

Cada entrada es no negativa y

$$\mathbf{P}(t; x, A)\mathbf{e}_N \leq \mathbf{e}_N, \quad \mathbf{e}_N = (1, 1, \dots, 1)^T$$

El operador infinitesimal  $\mathcal{A}$  está ahora evaluada sobre **matrices**.

Ideas previas: *random evolutions*

(Griego-Hersh-Papanicolaou-Pinsky-Kurtz...años 60 y 70).

# PROCESOS DE MARKOV BIDIMENSIONALES

Ahora tenemos un proceso de Markov bidimensional de la forma  $\{(X_t, Y_t) : t \in \mathcal{T}\}$  donde  $\mathcal{T}$  es el tiempo y el espacio de estados es  $\mathcal{C} = \mathcal{S} \times \{1, 2, \dots, N\}$ , donde  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$ . La primera componente se denomina **nivel** mientras la segunda componente es la **fase**. Las probabilidades de transición vienen ahora en términos de una función matricial  $\mathbf{P}(t; x, A)$ , definida para cada  $t \in \mathcal{T}, x \in \mathcal{S}, A \subset \mathcal{S}$ , cuya entrada  $(i, j)$  da

$$\mathbf{P}_{ij}(t; x, A) = \Pr\{X_t \in A, Y_t = j | X_0 = x, Y_0 = i\}.$$

Cada entrada es no negativa y

$$\mathbf{P}(t; x, A)\mathbf{e}_N \leq \mathbf{e}_N, \quad \mathbf{e}_N = (1, 1, \dots, 1)^T$$

El operador infinitesimal  $\mathcal{A}$  está ahora evaluada sobre **matrices**.

Ideas previas: *random evolutions*

(Griego-Hersh-Papanicolaou-Pinsky-Kurtz...años 60 y 70).

# PROCESOS DE MARKOV BIDIMENSIONALES

Ahora tenemos un proceso de Markov bidimensional de la forma  $\{(X_t, Y_t) : t \in \mathcal{T}\}$  donde  $\mathcal{T}$  es el tiempo y el espacio de estados es  $\mathcal{C} = \mathcal{S} \times \{1, 2, \dots, N\}$ , donde  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$ . La primera componente se denomina **nivel** mientras la segunda componente es la **fase**. Las probabilidades de transición vienen ahora en términos de una función matricial  $\mathbf{P}(t; x, A)$ , definida para cada  $t \in \mathcal{T}, x \in \mathcal{S}, A \subset \mathcal{S}$ , cuya entrada  $(i, j)$  da

$$\mathbf{P}_{ij}(t; x, A) = \Pr\{X_t \in A, Y_t = j | X_0 = x, Y_0 = i\}.$$

Cada entrada es no negativa y

$$\mathbf{P}(t; x, A)\mathbf{e}_N \leq \mathbf{e}_N, \quad \mathbf{e}_N = (1, 1, \dots, 1)^T$$

El operador infinitesimal  $\mathcal{A}$  está ahora evaluada sobre **matrices**.

Ideas previas: *random evolutions*

(Griego-Hersh-Papanicolaou-Pinsky-Kurtz...años 60 y 70).

# PROCESOS DE MARKOV BIDIMENSIONALES

Ahora tenemos un proceso de Markov bidimensional de la forma  $\{(X_t, Y_t) : t \in \mathcal{T}\}$  donde  $\mathcal{T}$  es el tiempo y el espacio de estados es  $\mathcal{C} = \mathcal{S} \times \{1, 2, \dots, N\}$ , donde  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$ . La primera componente se denomina **nivel** mientras la segunda componente es la **fase**.

Las probabilidades de transición vienen ahora en términos de una función matricial  $\mathbf{P}(t; x, A)$ , definida para cada  $t \in \mathcal{T}, x \in \mathcal{S}, A \subset \mathcal{S}$ , cuya entrada  $(i, j)$  da

$$\mathbf{P}_{ij}(t; x, A) = \Pr\{X_t \in A, Y_t = j | X_0 = x, Y_0 = i\}.$$

Cada entrada es no negativa y

$$\mathbf{P}(t; x, A)\mathbf{e}_N \leq \mathbf{e}_N, \quad \mathbf{e}_N = (1, 1, \dots, 1)^T$$

El operador infinitesimal  $\mathcal{A}$  está ahora evaluada sobre **matrices**.

Ideas previas: *random evolutions*

(Griego-Hersh-Papanicolaou-Pinsky-Kurtz...años 60 y 70).

# PROCESOS DE MARKOV BIDIMENSIONALES

Ahora tenemos un proceso de Markov bidimensional de la forma  $\{(X_t, Y_t) : t \in \mathcal{T}\}$  donde  $\mathcal{T}$  es el tiempo y el espacio de estados es  $\mathcal{C} = \mathcal{S} \times \{1, 2, \dots, N\}$ , donde  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$ . La primera componente se denomina **nivel** mientras la segunda componente es la **fase**.

Las probabilidades de transición vienen ahora en términos de una función matricial  $\mathbf{P}(t; x, A)$ , definida para cada  $t \in \mathcal{T}, x \in \mathcal{S}, A \subset \mathcal{S}$ , cuya entrada  $(i, j)$  da

$$\mathbf{P}_{ij}(t; x, A) = \Pr\{X_t \in A, Y_t = j | X_0 = x, Y_0 = i\}.$$

Cada entrada es no negativa y

$$\mathbf{P}(t; x, A)\mathbf{e}_N \leq \mathbf{e}_N, \quad \mathbf{e}_N = (1, 1, \dots, 1)^T$$

El operador infinitesimal  $\mathcal{A}$  está ahora evaluada sobre **matrices**.

Ideas previas: *random evolutions*

(Griego-Hersh-Papanicolaou-Pinsky-Kurtz...años 60 y 70).

# PROCESOS QUASI-BIRTH-AND-DEATH (DISCRETOS)

Se tiene ahora  $\mathcal{C} = \{0, 1, 2, \dots\} \times \{1, 2, \dots, N\}$ ,  $\mathcal{T} = \{0, 1, 2, \dots\}$  y

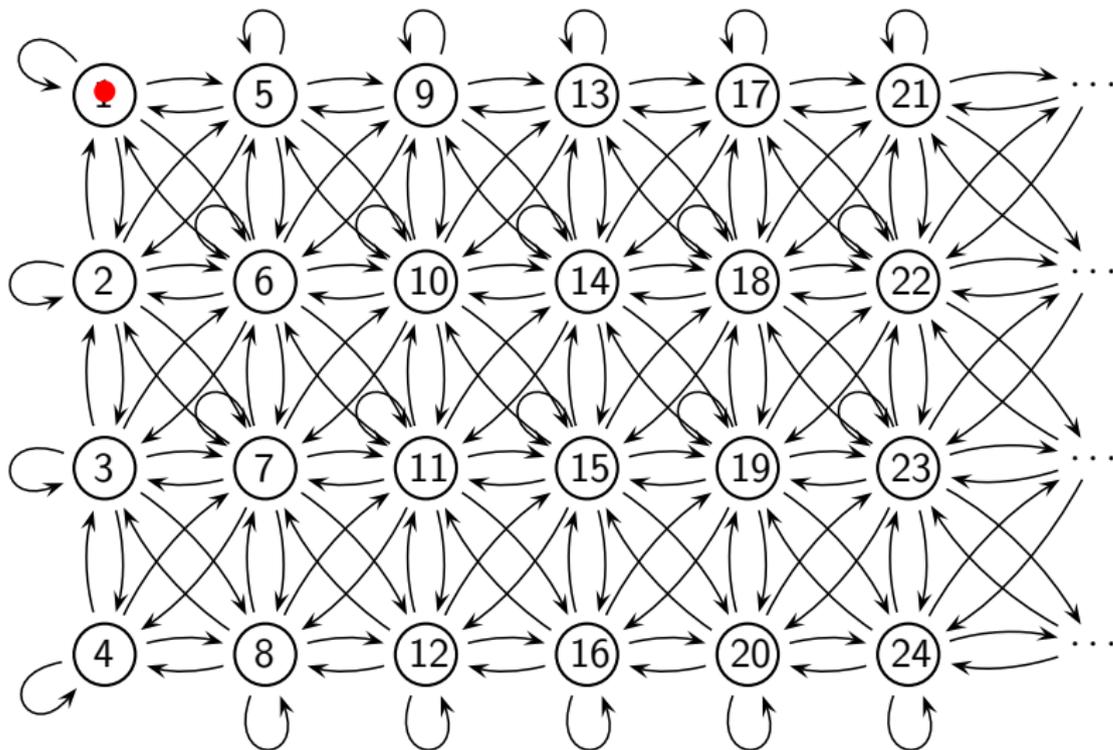
$$(\mathbf{P}_{ii'})_{jj'} = \Pr(X_{n+1} = i, Y_{n+1} = j | X_n = i', Y_n = j') = 0 \quad \text{con} \quad |i - i'| > 1$$

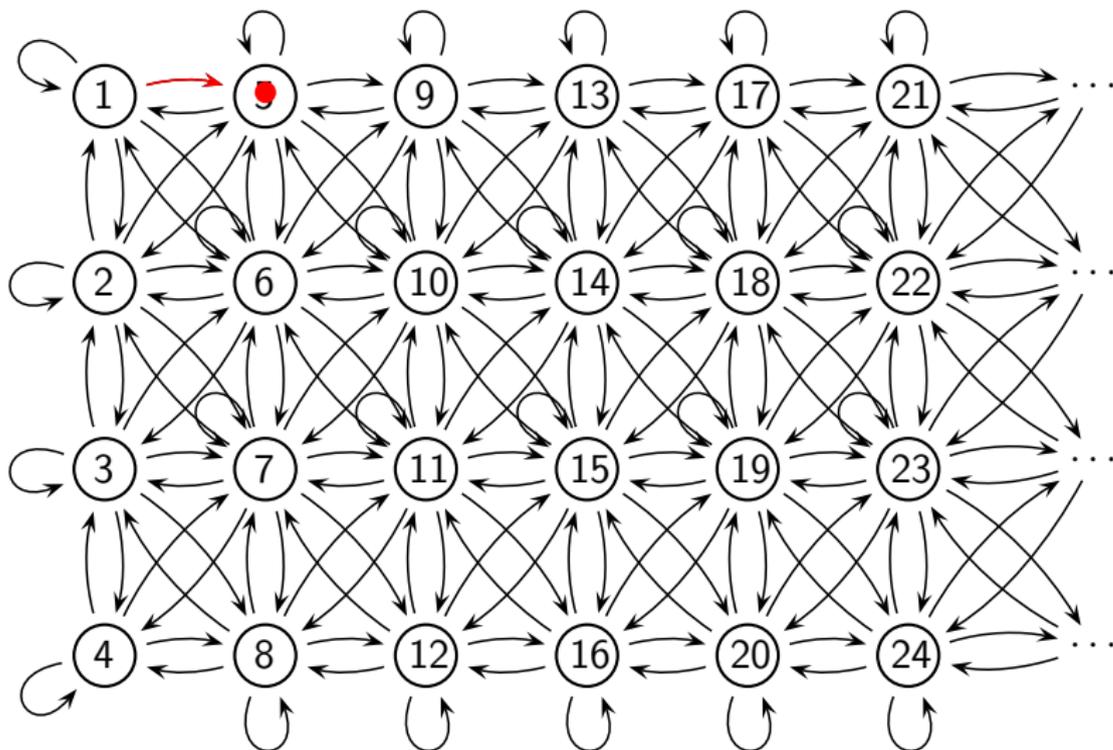
i.e. una matriz de transición de probabilidades tridiagonal por bloques de tamaño  $N \times N$

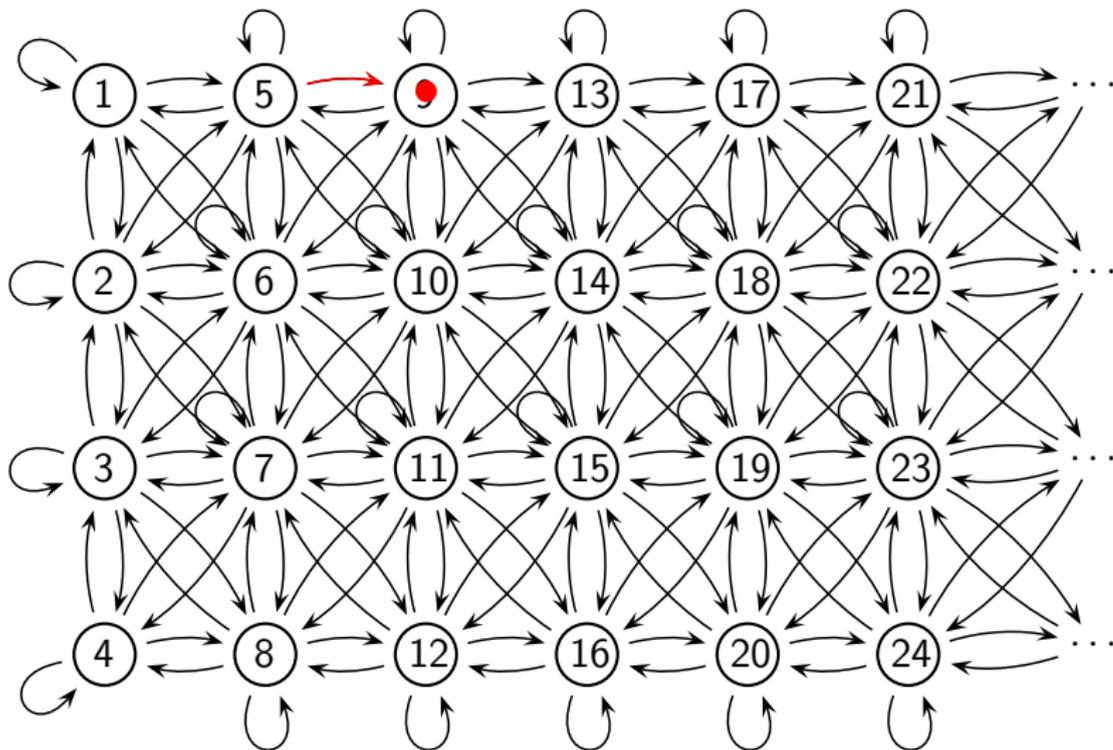
$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} B_0 & A_0 & & & \\ C_1 & B_1 & A_1 & & \\ & C_2 & B_2 & A_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

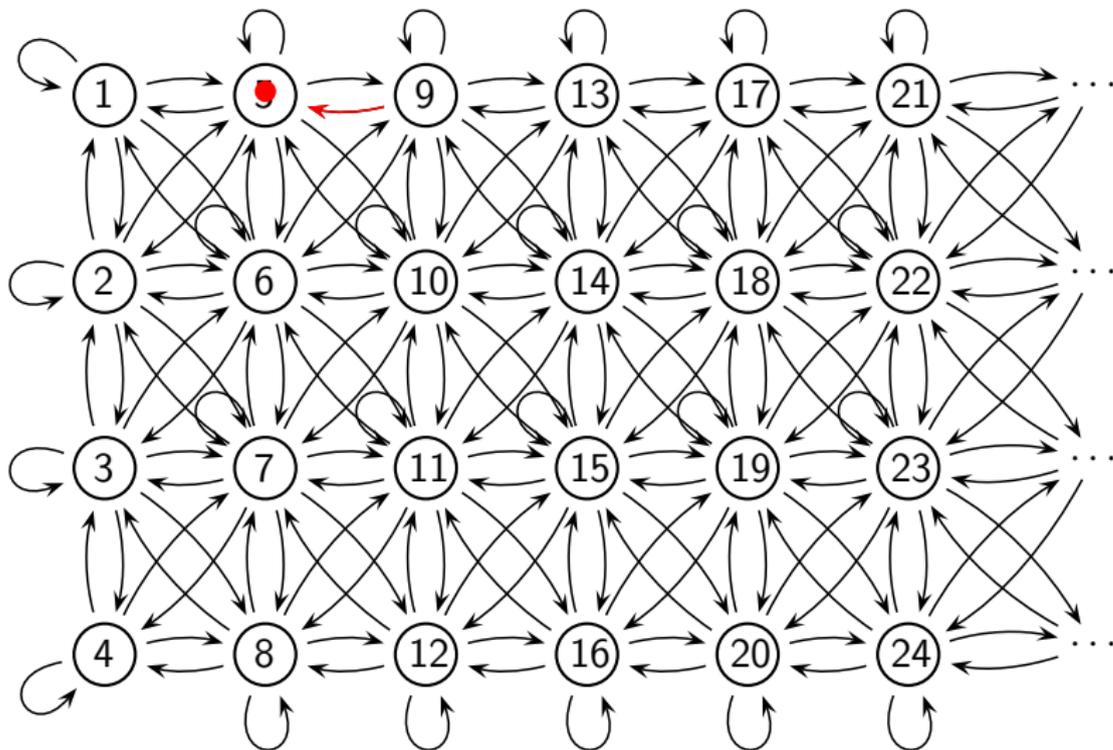
$$(A_n)_{ij}, (B_n)_{ij}, (C_n)_{ij} \geq 0, \det(A_n), \det(C_n) \neq 0$$

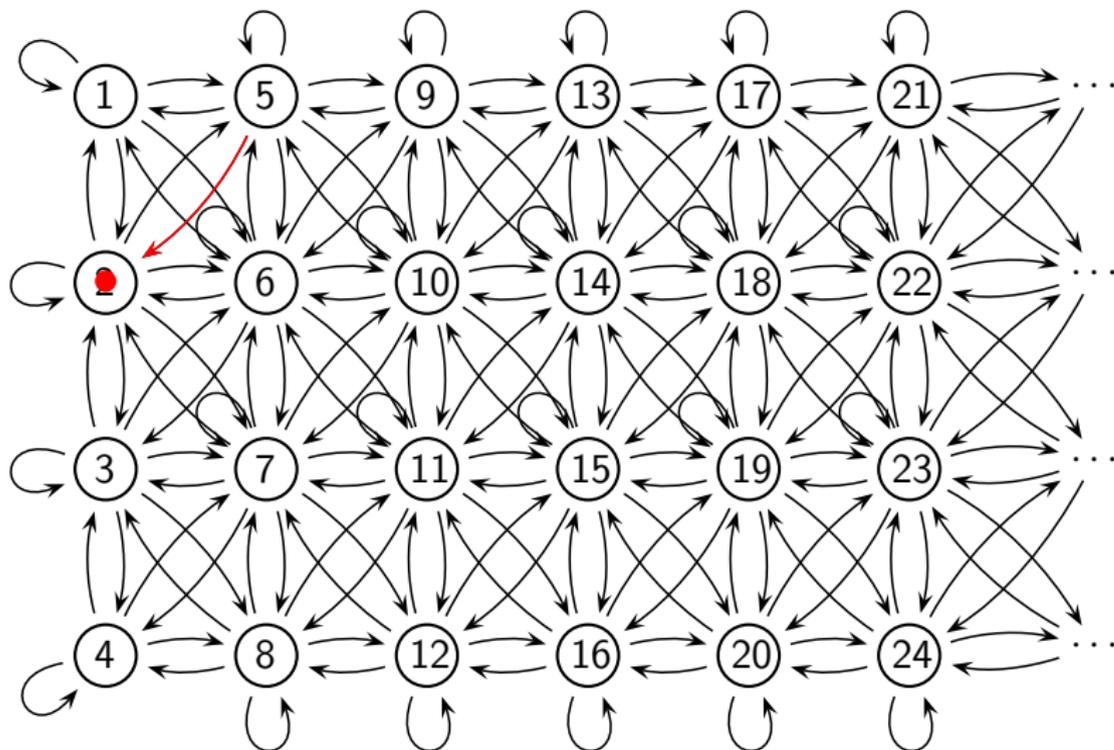
$$\sum_j (A_n)_{ij} + (B_n)_{ij} + (C_n)_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, N$$

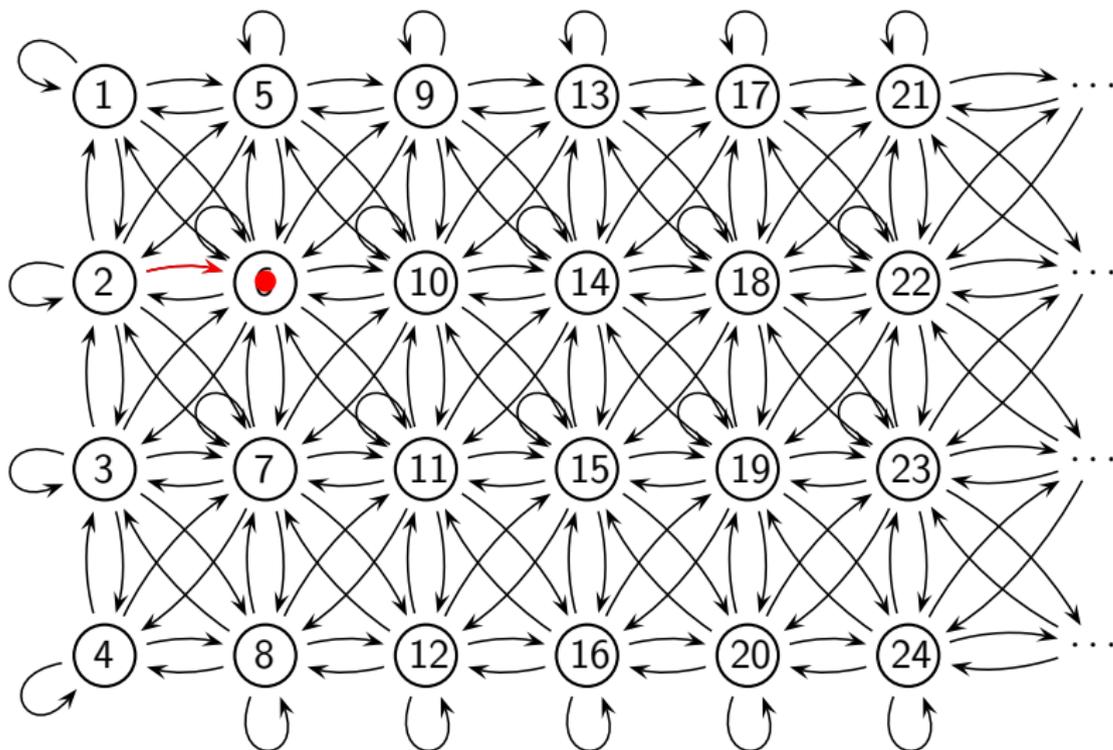
$N = 4$  FASES

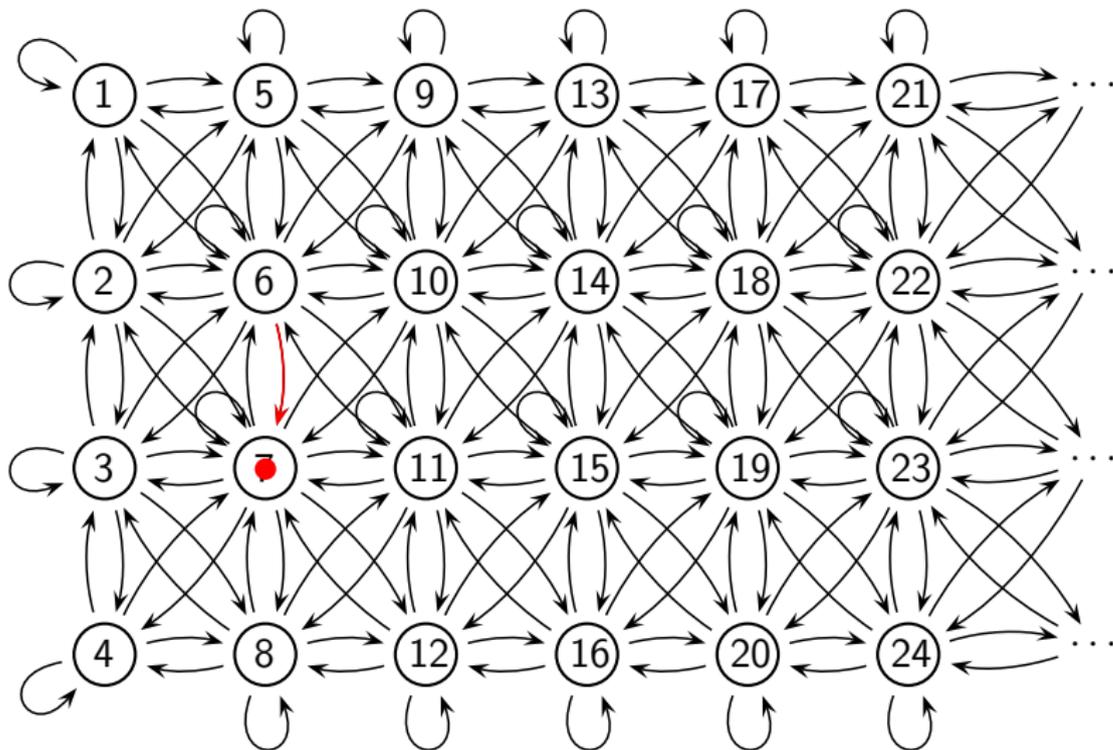
$N = 4$  FASES

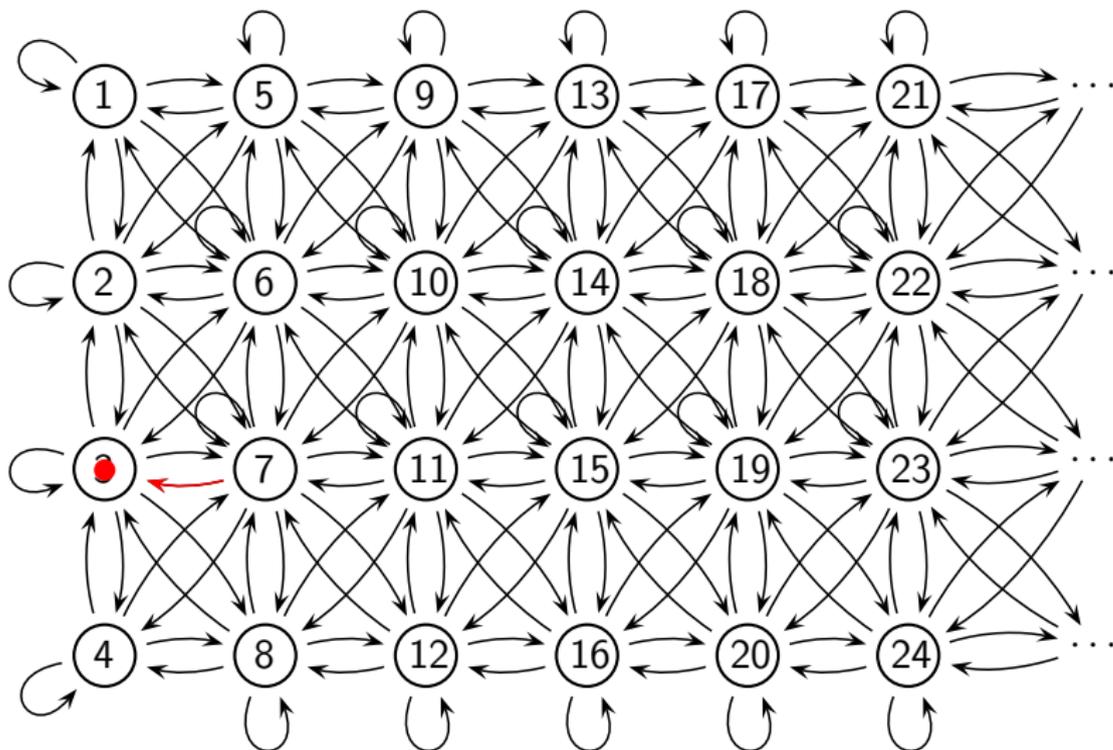
$N = 4$  FASES

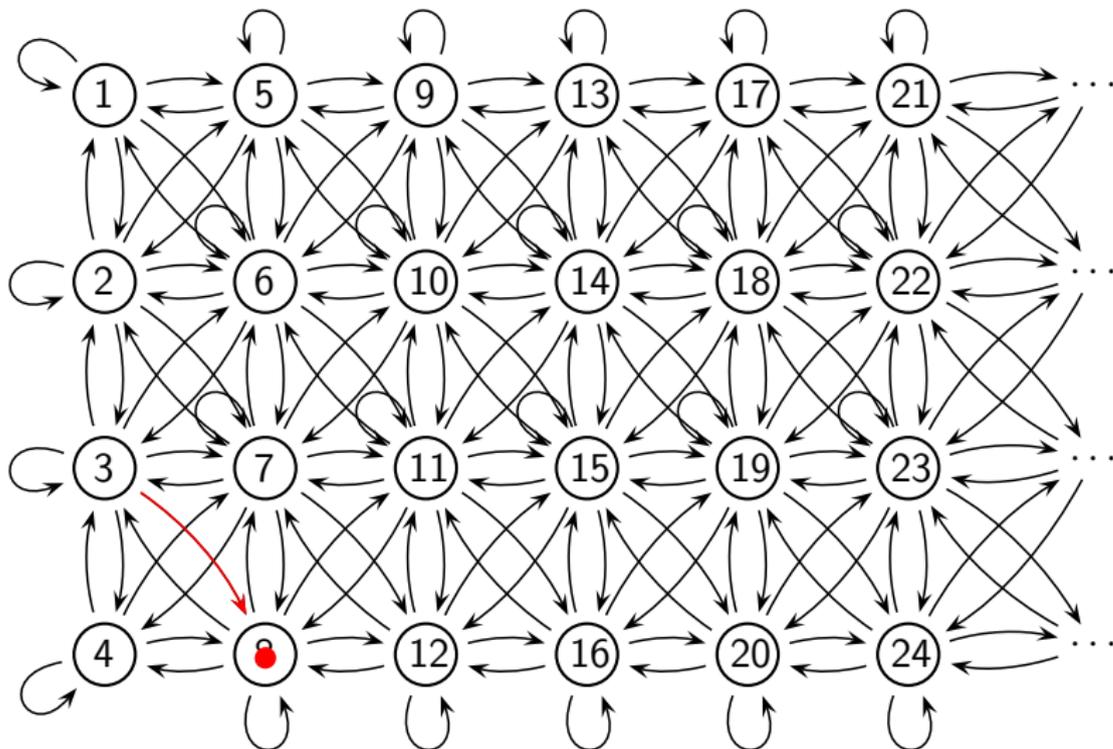
$N = 4$  FASES

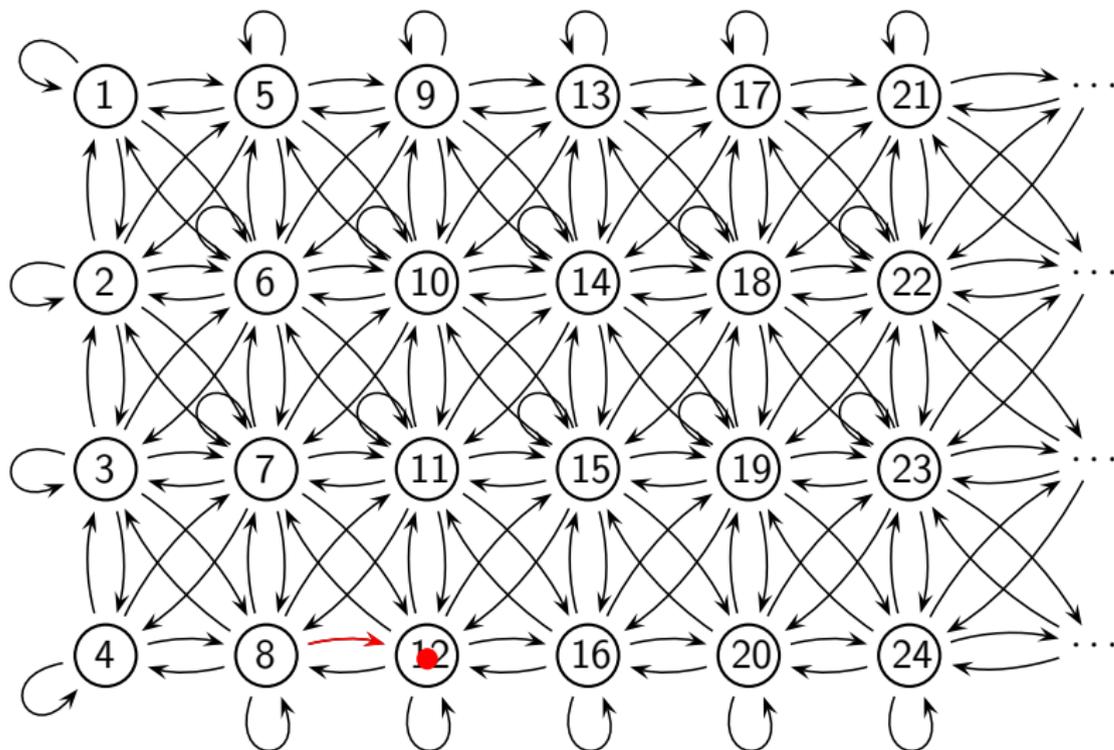
$N = 4$  FASES

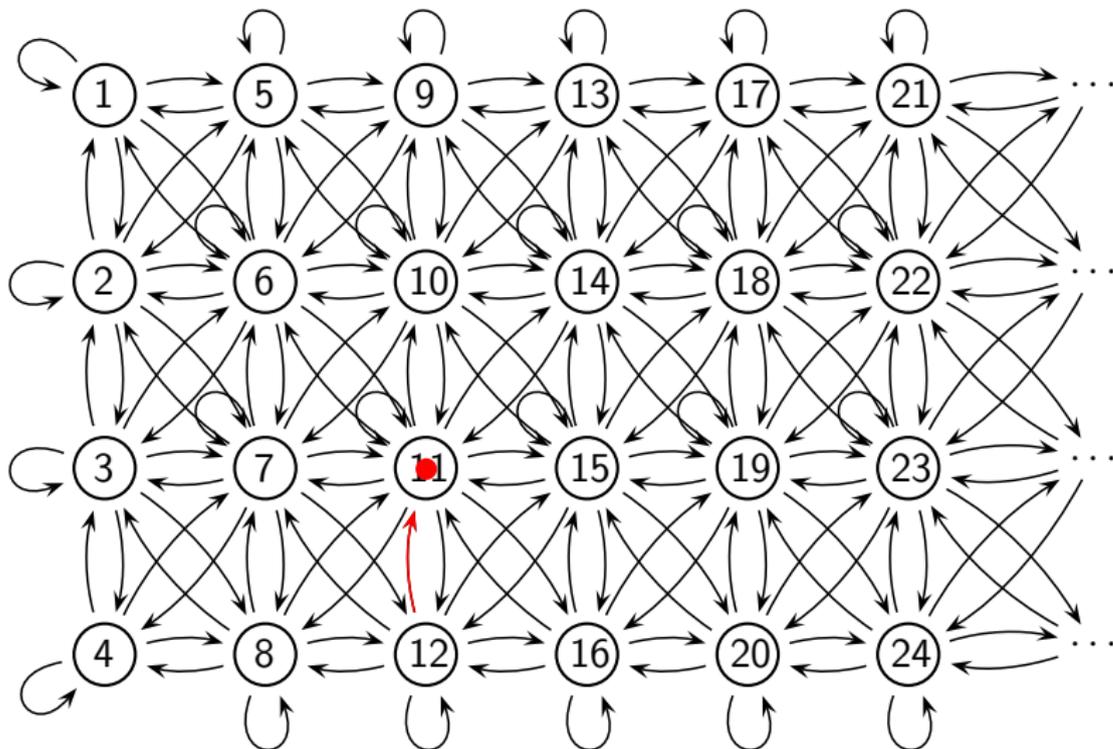
$N = 4$  FASES

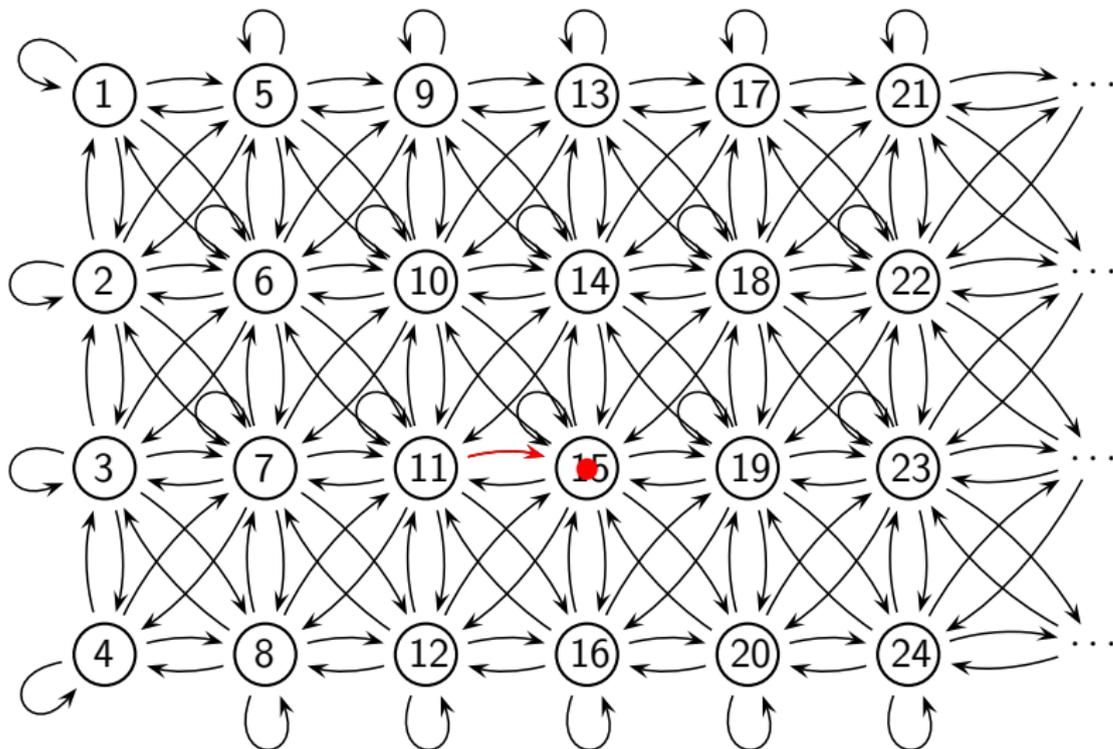
$N = 4$  FASES

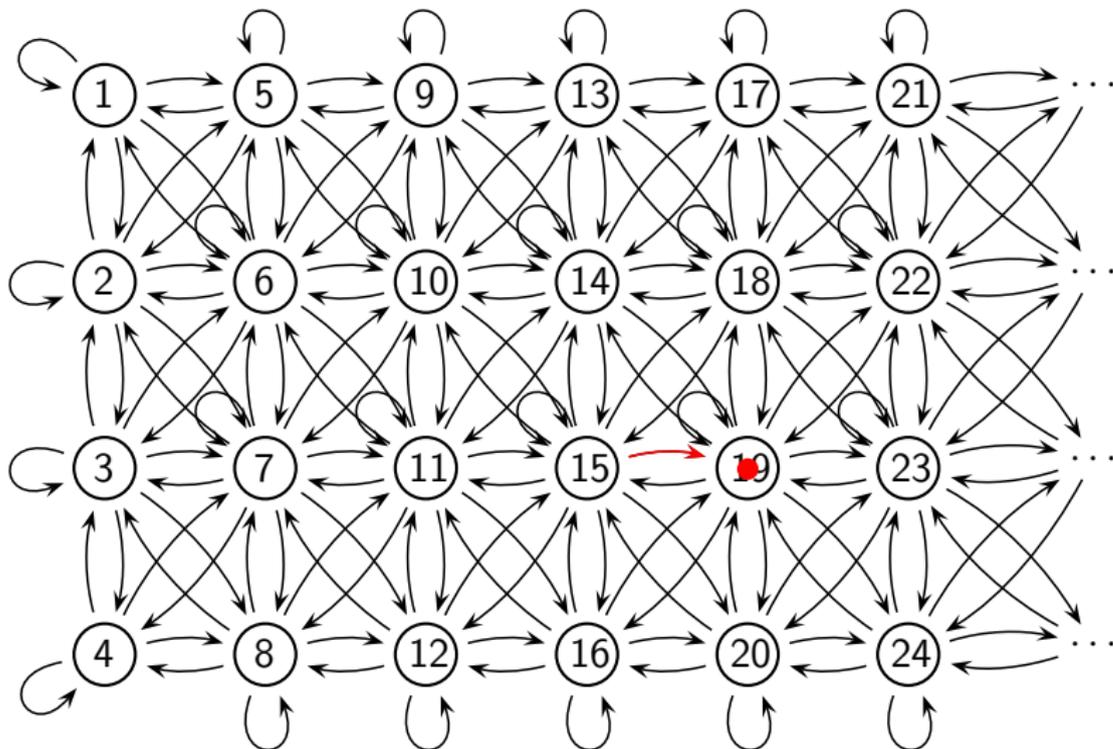
$N = 4$  FASES

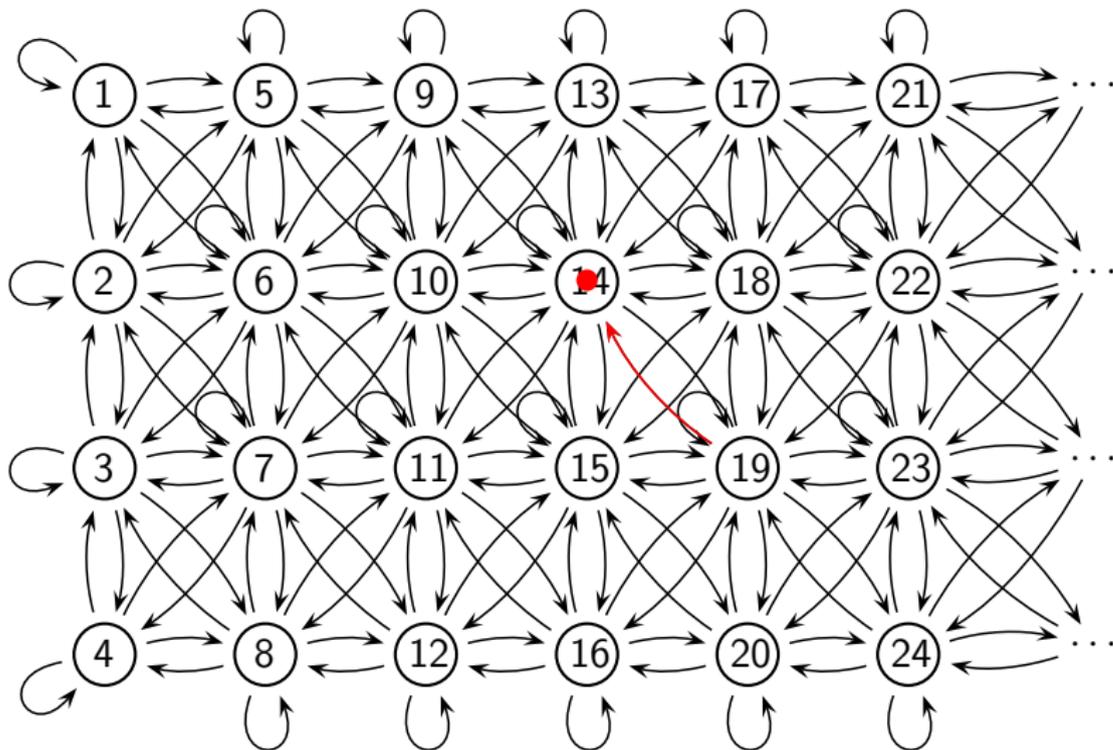
$N = 4$  FASES

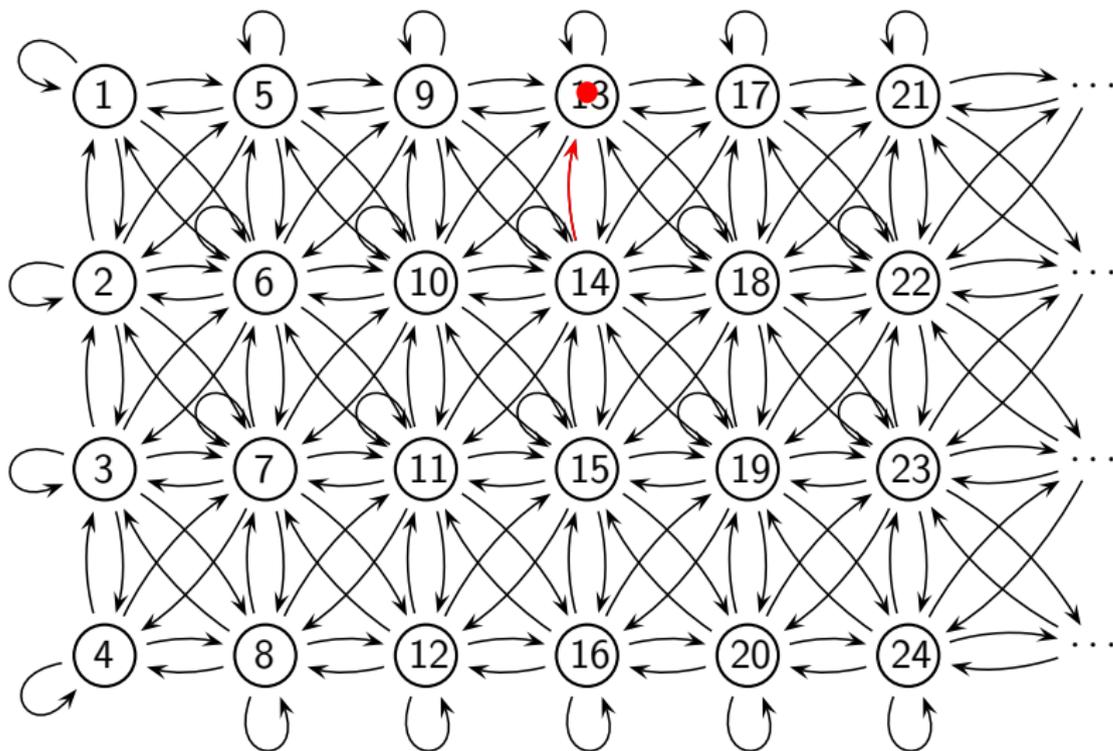
$N = 4$  FASES

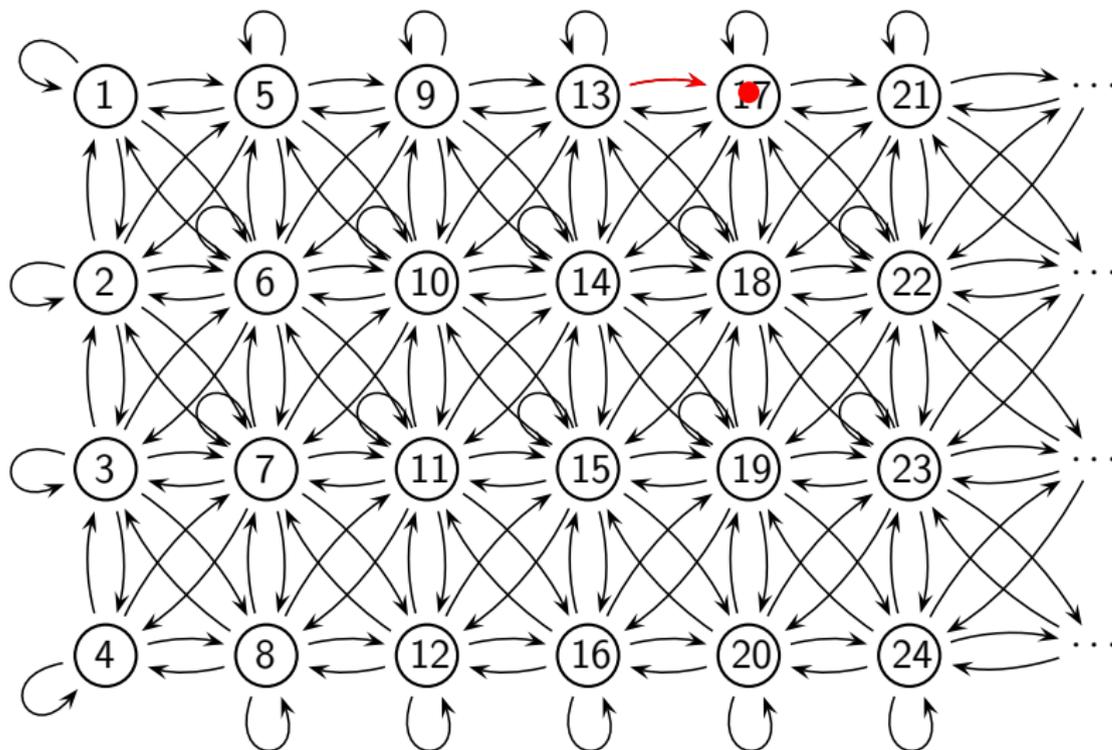
$N = 4$  FASES

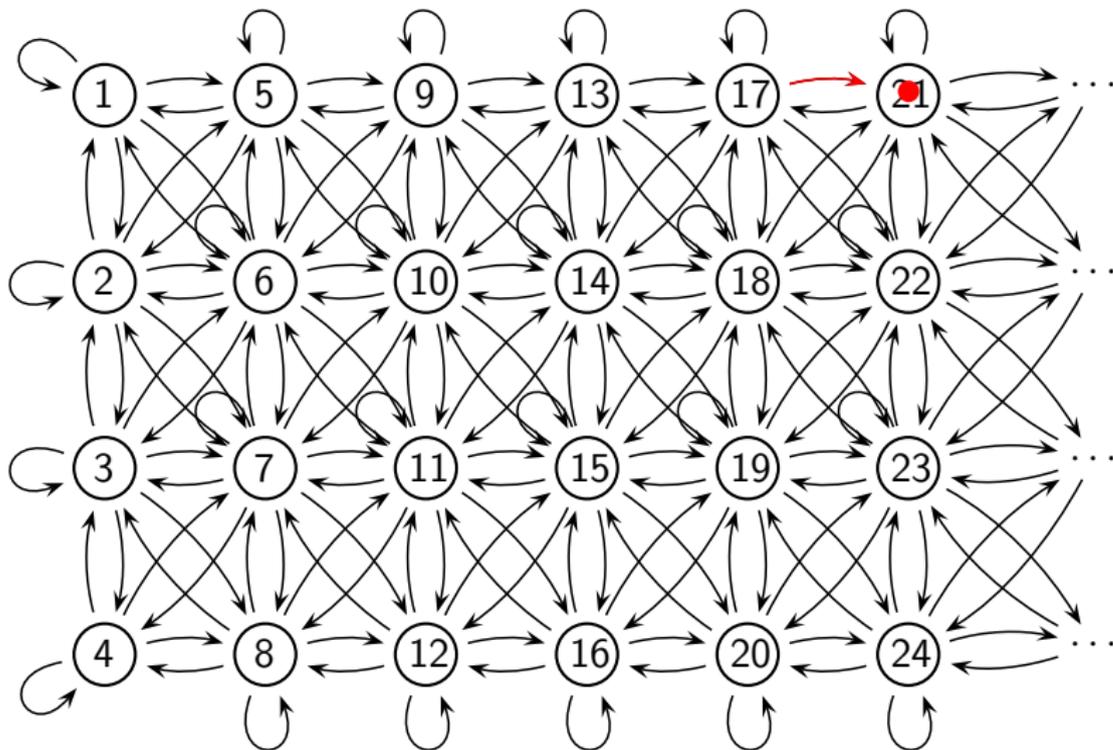
$N = 4$  FASES

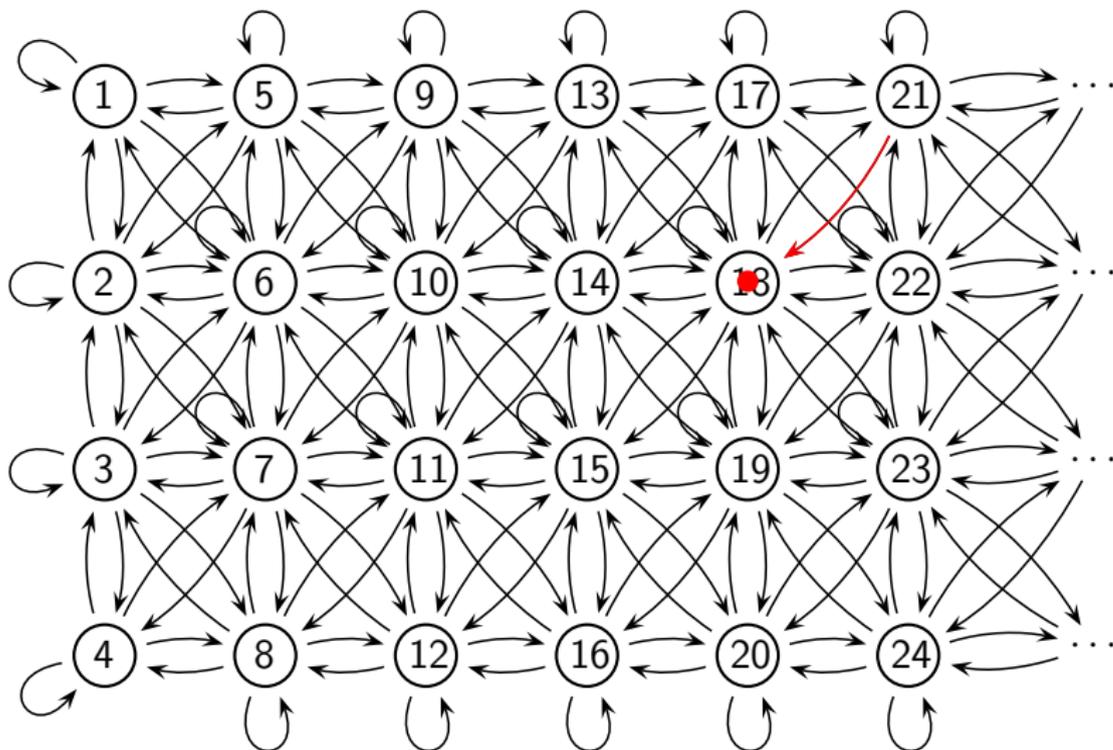
$N = 4$  FASES

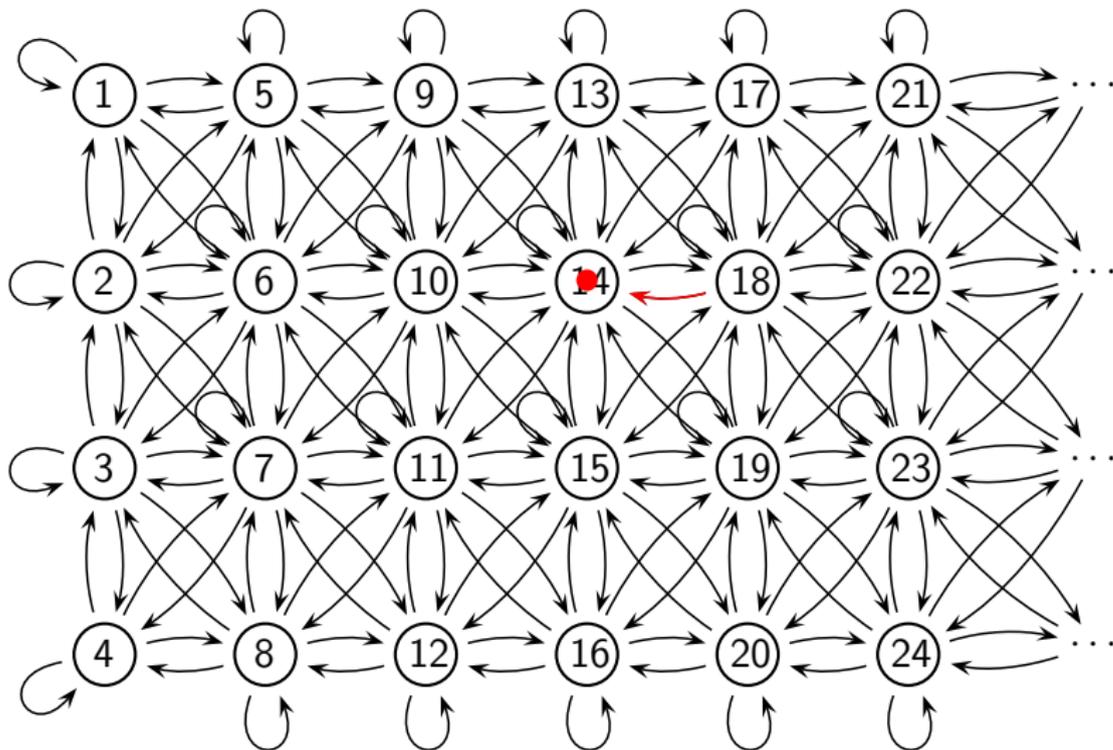
$N = 4$  FASES

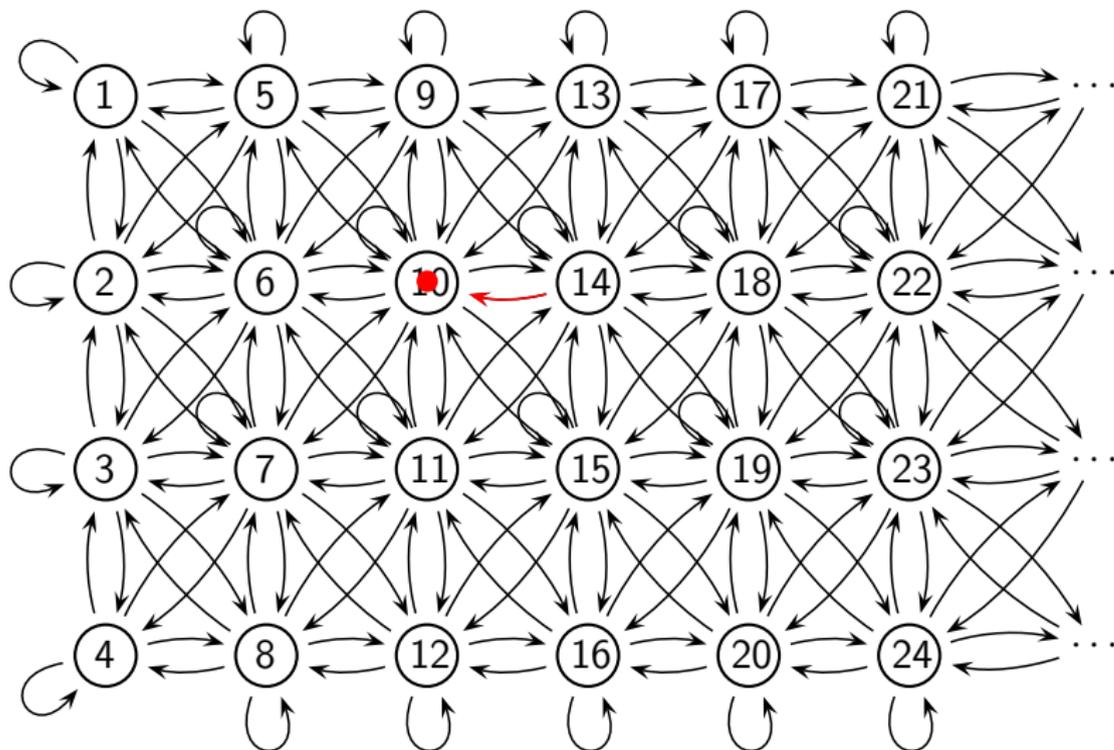
$N = 4$  FASES

$N = 4$  FASES

$N = 4$  FASES

$N = 4$  FASES

$N = 4$  FASES

$N = 4$  FASES

# SWITCHING DIFFUSION PROCESSES

En este caso  $\mathcal{C} = (a, b) \times \{1, 2, \dots, N\}$ ,  $\mathcal{T} = [0, \infty)$ .

La densidad de transición de probabilidades es ahora una **matriz** cuya entrada  $(i, j)$  da

$$\mathbf{P}_{ij}(t; x, A) = \Pr(X_t \in A, Y_t = j | X_0 = x, Y_0 = i)$$

para todo  $t > 0$ ,  $x \in (a, b)$  y  $A \subset (a, b)$ .

El **operador infinitesimal**  $\mathcal{A}$  es ahora un operador diferencial matricial (Berman, 1994)

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \mathbf{A}(x) \frac{d^2}{dx^2} + \mathbf{B}(x) \frac{d}{dx} + \mathbf{Q}(x) \frac{d^0}{dx^0}$$

Los coeficientes  $\mathbf{A}(x)$  y  $\mathbf{B}(x)$  son matrices **diagonales** y  $\mathbf{Q}(x)$  es el operador infinitesimal de una **cadena de Markov (continua)**, i.e.

$$\mathbf{Q}_{ii}(x) \leq 0, \quad \mathbf{Q}_{ij}(x) \geq 0, i \neq j, \quad \mathbf{Q}(x) \mathbf{e}_N = \mathbf{0}$$

# SWITCHING DIFFUSION PROCESSES

En este caso  $\mathcal{C} = (a, b) \times \{1, 2, \dots, N\}$ ,  $\mathcal{T} = [0, \infty)$ .

La densidad de transición de probabilidades es ahora una **matriz** cuya entrada  $(i, j)$  da

$$\mathbf{P}_{ij}(t; x, A) = \Pr(X_t \in A, Y_t = j | X_0 = x, Y_0 = i)$$

para todo  $t > 0$ ,  $x \in (a, b)$  y  $A \subset (a, b)$ .

El **operador infinitesimal**  $\mathcal{A}$  es ahora un operador diferencial matricial (Berman, 1994)

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \mathbf{A}(x) \frac{d^2}{dx^2} + \mathbf{B}(x) \frac{d^1}{dx^1} + \mathbf{Q}(x) \frac{d^0}{dx^0}$$

Los coeficientes  $\mathbf{A}(x)$  y  $\mathbf{B}(x)$  son matrices **diagonales** y  $\mathbf{Q}(x)$  es el operador infinitesimal de una **cadena de Markov (continua)**, i.e.

$$\mathbf{Q}_{ii}(x) \leq 0, \quad \mathbf{Q}_{ij}(x) \geq 0, i \neq j, \quad \mathbf{Q}(x) \mathbf{e}_N = \mathbf{0}$$

# SWITCHING DIFFUSION PROCESSES

En este caso  $\mathcal{C} = (a, b) \times \{1, 2, \dots, N\}$ ,  $\mathcal{T} = [0, \infty)$ .

La densidad de transición de probabilidades es ahora una **matriz** cuya entrada  $(i, j)$  da

$$\mathbf{P}_{ij}(t; x, A) = \Pr(X_t \in A, Y_t = j | X_0 = x, Y_0 = i)$$

para todo  $t > 0$ ,  $x \in (a, b)$  y  $A \subset (a, b)$ .

El **operador infinitesimal**  $\mathcal{A}$  es ahora un operador diferencial matricial (Berman, 1994)

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \mathbf{A}(x) \frac{d^2}{dx^2} + \mathbf{B}(x) \frac{d^1}{dx^1} + \mathbf{Q}(x) \frac{d^0}{dx^0}$$

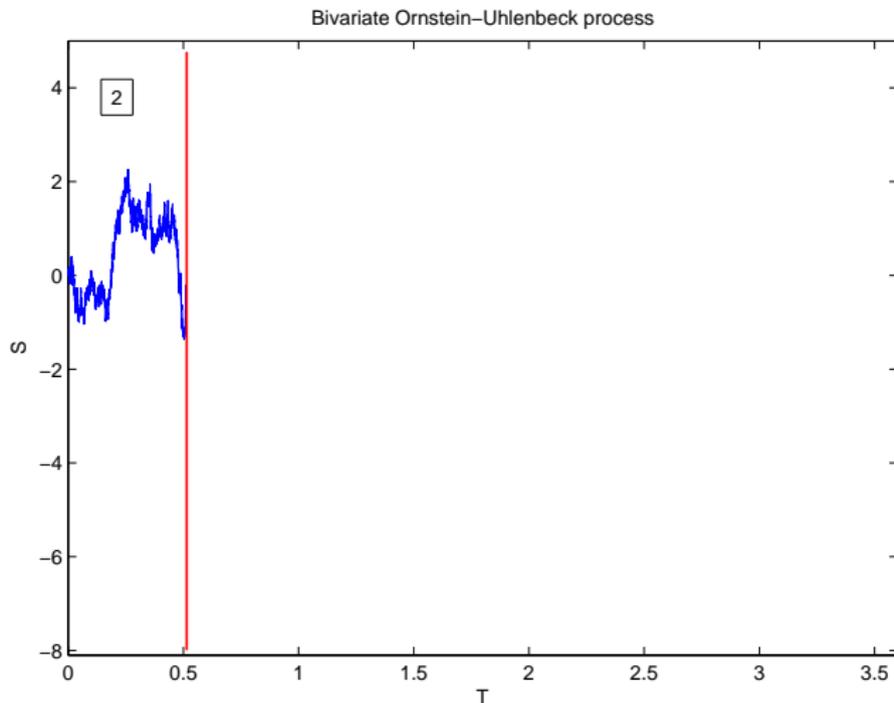
Los coeficientes  $\mathbf{A}(x)$  y  $\mathbf{B}(x)$  son matrices **diagonales** y  $\mathbf{Q}(x)$  es el operador infinitesimal de una **cadena de Markov (continua)**, i.e.

$$\mathbf{Q}_{ii}(x) \leq 0, \quad \mathbf{Q}_{ij}(x) \geq 0, i \neq j, \quad \mathbf{Q}(x) \mathbf{e}_N = \mathbf{0}$$

# UN EJEMPLO ILUSTRATIVO

$N = 3$  fases y  $\mathcal{S} = \mathbb{R}$  con

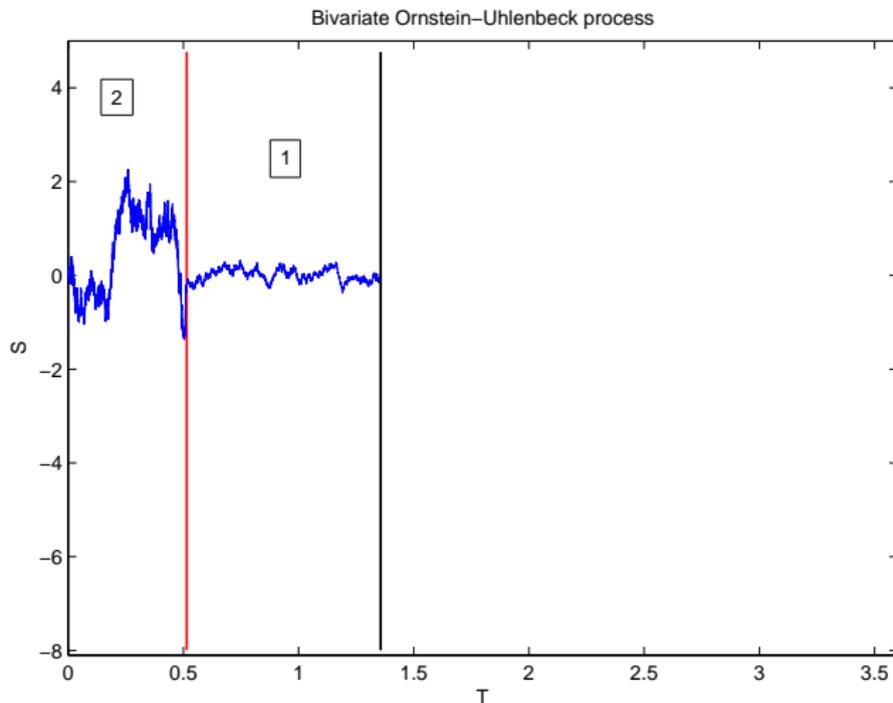
$$\mathbf{A}_{ii}(x) = i^2, \quad \mathbf{B}_{ii}(x) = -ix, \quad i = 1, 2, 3.$$



# UN EJEMPLO ILUSTRATIVO

$N = 3$  fases y  $\mathcal{S} = \mathbb{R}$  con

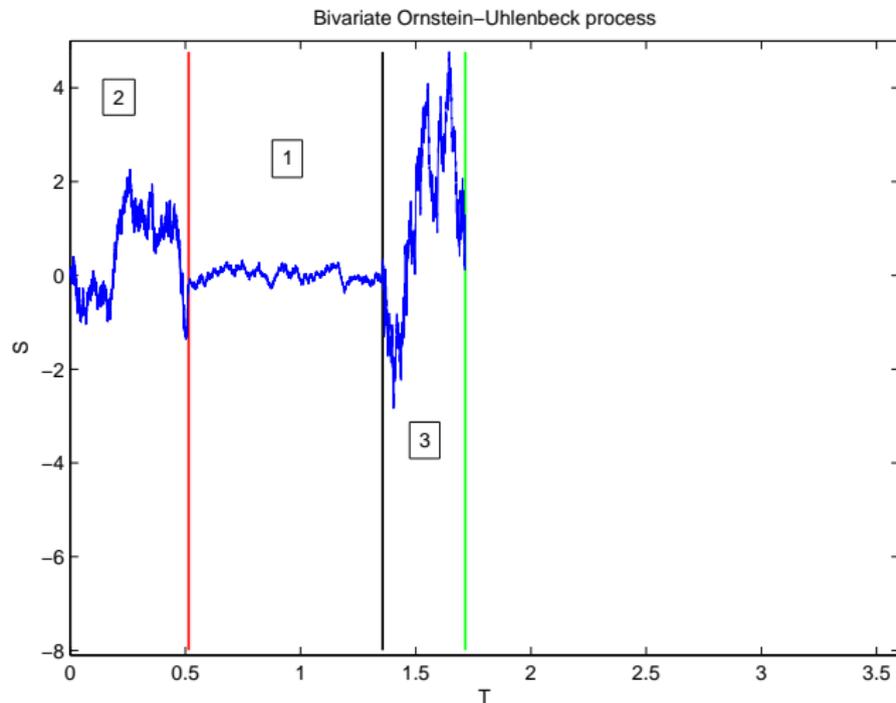
$$\mathbf{A}_{ii}(x) = i^2, \quad \mathbf{B}_{ii}(x) = -ix, \quad i = 1, 2, 3.$$



# UN EJEMPLO ILUSTRATIVO

$N = 3$  fases y  $\mathcal{S} = \mathbb{R}$  con

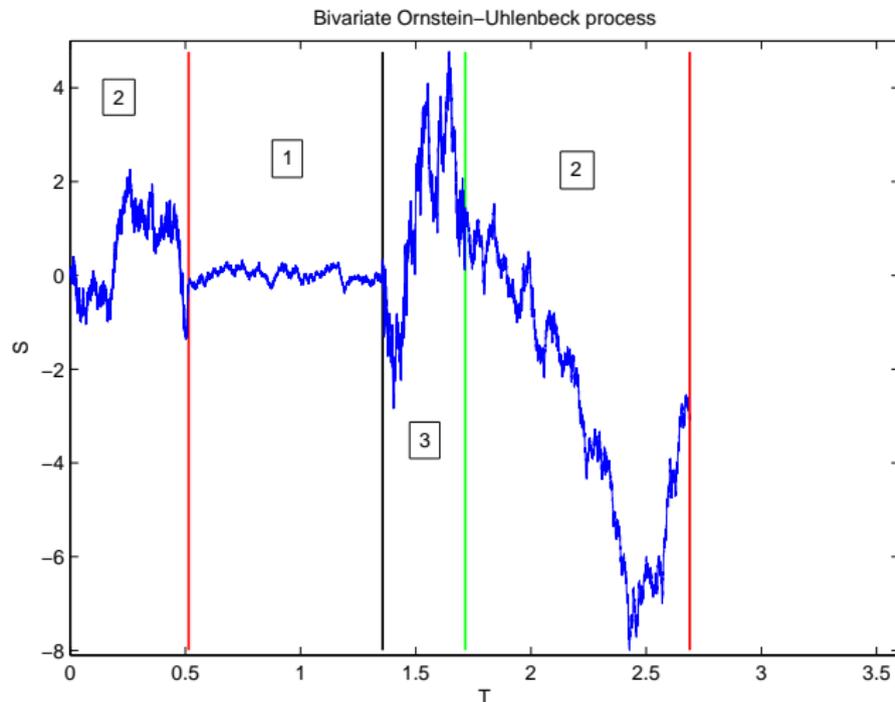
$$\mathbf{A}_{ii}(x) = i^2, \quad \mathbf{B}_{ii}(x) = -ix, \quad i = 1, 2, 3.$$



# UN EJEMPLO ILUSTRATIVO

$N = 3$  fases y  $\mathcal{S} = \mathbb{R}$  con

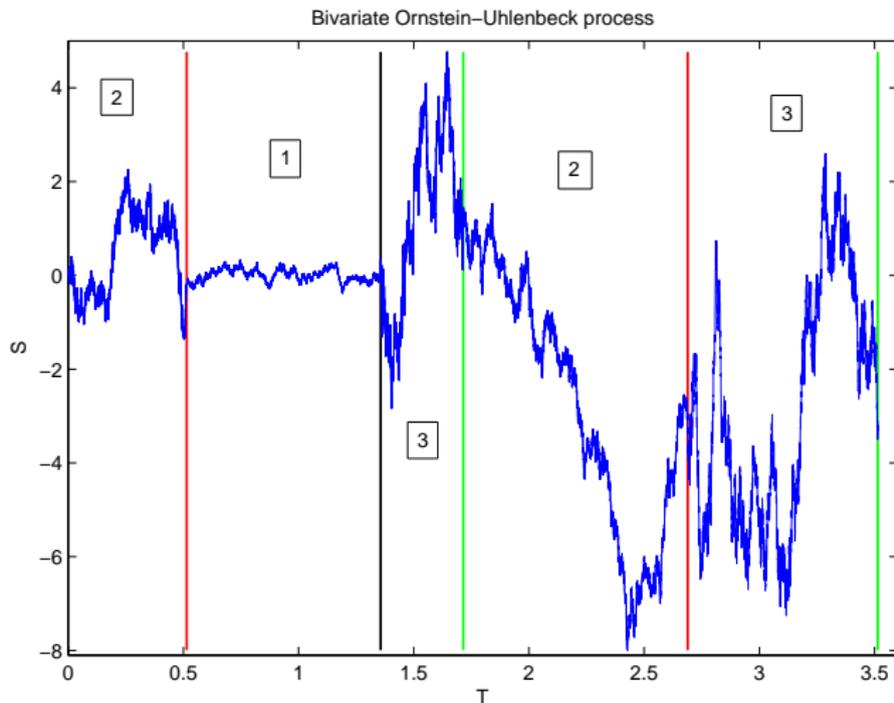
$$\mathbf{A}_{ii}(x) = i^2, \quad \mathbf{B}_{ii}(x) = -ix, \quad i = 1, 2, 3.$$



# UN EJEMPLO ILUSTRATIVO

$N = 3$  fases y  $\mathcal{S} = \mathbb{R}$  con

$$\mathbf{A}_{ii}(x) = i^2, \quad \mathbf{B}_{ii}(x) = -ix, \quad i = 1, 2, 3.$$



# MÉTODOS ESPECTRALES

Ahora, dado un operador infinitesimal matricial  $\mathcal{A}$ , si encontramos una **matriz de densidades**  $\mathbf{W}(x)$  asociada a  $\mathcal{A}$ , y un conjunto de **autofunciones ortogonales matriciales**  $\mathbf{F}(i, x)$  tal que

$$\mathcal{A}\mathbf{F}(i, x) = \mathbf{F}(i, x)\mathbf{\Lambda}(i, x),$$

entonces es posible encontrar **representaciones espectrales** de

- Probabilidades de transición  $\mathbf{P}(t; x, y)$ .
- Medida o distribución invariante  $\pi = (\pi_j)$  (caso discreto) con

$$\pi_j = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}_{.j}(t) \in \mathbb{R}^N$$

o  $\psi(y) = (\psi_1(y), \psi_2(y), \dots, \psi_N(y))$  (caso continuo) con

$$\psi_j(y) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}_{.j}(t; x, y)$$

# MÉTODOS ESPECTRALES

Ahora, dado un operador infinitesimal matricial  $\mathcal{A}$ , si encontramos una **matriz de densidades**  $\mathbf{W}(x)$  asociada a  $\mathcal{A}$ , y un conjunto de **autofunciones ortogonales matriciales**  $\mathbf{F}(i, x)$  tal que

$$\mathcal{A}\mathbf{F}(i, x) = \mathbf{F}(i, x)\mathbf{\Lambda}(i, x),$$

entonces es posible encontrar **representaciones espectrales** de

- **Probabilidades de transición**  $\mathbf{P}(t; x, y)$ .
- **Medida o distribución invariante**  $\pi = (\pi_j)$  (caso discreto) con

$$\pi_j = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}_{.j}(t) \in \mathbb{R}^N$$

o  $\psi(y) = (\psi_1(y), \psi_2(y), \dots, \psi_N(y))$  (caso continuo) con

$$\psi_j(y) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}_{.j}(t; x, y)$$

# MÉTODOS ESPECTRALES

Ahora, dado un operador infinitesimal matricial  $\mathcal{A}$ , si encontramos una **matriz de densidades**  $\mathbf{W}(x)$  asociada a  $\mathcal{A}$ , y un conjunto de **autofunciones ortogonales matriciales**  $\mathbf{F}(i, x)$  tal que

$$\mathcal{A}\mathbf{F}(i, x) = \mathbf{F}(i, x)\mathbf{\Lambda}(i, x),$$

entonces es posible encontrar **representaciones espectrales** de

- **Probabilidades de transición**  $\mathbf{P}(t; x, y)$ .
- **Medida o distribución invariante**  $\pi = (\pi_j)$  (caso discreto) con

$$\pi_j = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}_{.j}(t) \in \mathbb{R}^N$$

o  $\psi(y) = (\psi_1(y), \psi_2(y), \dots, \psi_N(y))$  (caso continuo) con

$$\psi_j(y) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}_{.j}(t; x, y)$$

# PROCESOS QUASI-BIRTH-AND-DEATH (DISCRETOS)

$$\mathcal{C} = \{0, 1, 2, \dots\} \times \{1, 2, \dots, N\}, \quad \mathcal{T} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

(Grünbaum y Dette-Reuther-Studden-Zygmunt, 2007)

**Teorema espectral:** existe una matriz peso  $\mathbf{W}$  asociada a  $\mathbf{P}$  y su correspondiente familia de **polinomios ortogonales**  $(\Phi_n)_n$  tal que

$$\mathbf{P}\Phi = \begin{pmatrix} B_0 & A_0 & & & \\ C_1 & B_1 & A_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_0(x) \\ \Phi_1(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} \Phi_0(x) \\ \Phi_1(x) \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad x \in [-1, 1]$$

## PROBABILIDADES DE TRANSICIÓN

$$P_{ij}^n = \left( \int_{-1}^1 x^n \Phi_i(x) d\mathbf{W}(x) \Phi_j^*(x) \right) \left( \int_{-1}^1 \Phi_j(x) d\mathbf{W}(x) \Phi_j^*(x) \right)^{-1}$$

## MEDIDA INVARIANTE (MdI, 2011)

$\pi = (\pi_0; \pi_1; \dots) \equiv (\Pi_0 \mathbf{e}_N; \Pi_1 \mathbf{e}_N; \dots)$  tal que  $\pi \mathbf{P} = \pi$  donde  $\mathbf{e}_N = (1, \dots, 1)^T$  y

$$\Pi_n = (C_1^T \cdots C_n^T)^{-1} \Pi_0 (A_0 \cdots A_{n-1}) = \left( \int_{-1}^1 \Phi_n(x) d\mathbf{W}(x) \Phi_n^*(x) \right)^{-1}$$

# PROCESOS QUASI-BIRTH-AND-DEATH (DISCRETOS)

$$\mathcal{C} = \{0, 1, 2, \dots\} \times \{1, 2, \dots, N\}, \quad \mathcal{T} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

(Grünbaum y Dette-Reuther-Studden-Zygmunt, 2007)

**Teorema espectral:** existe una matriz peso  $\mathbf{W}$  asociada a  $\mathbf{P}$  y su correspondiente familia de **polinomios ortogonales**  $(\Phi_n)_n$  tal que

$$\mathbf{P}\Phi = \begin{pmatrix} B_0 & A_0 & & & \\ C_1 & B_1 & A_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_0(x) \\ \Phi_1(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} \Phi_0(x) \\ \Phi_1(x) \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad x \in [-1, 1]$$

## PROBABILIDADES DE TRANSICIÓN

$$\mathbf{P}_{ij}^n = \left( \int_{-1}^1 x^n \Phi_i(x) d\mathbf{W}(x) \Phi_j^*(x) \right) \left( \int_{-1}^1 \Phi_j(x) d\mathbf{W}(x) \Phi_j^*(x) \right)^{-1}$$

## MEDIDA INVARIANTE (MdI, 2011)

$\pi = (\pi_0; \pi_1; \dots) \equiv (\Pi_0 \mathbf{e}_N; \Pi_1 \mathbf{e}_N; \dots)$  tal que  $\pi \mathbf{P} = \pi$  donde

$$\mathbf{e}_N = (1, \dots, 1)^T \text{ y}$$

$$\Pi_n = (C_1^T \cdots C_n^T)^{-1} \Pi_0 (A_0 \cdots A_{n-1}) = \left( \int_{-1}^1 \Phi_n(x) d\mathbf{W}(x) \Phi_n^*(x) \right)^{-1}$$

# PROCESOS QUASI-BIRTH-AND-DEATH (DISCRETOS)

$$\mathcal{C} = \{0, 1, 2, \dots\} \times \{1, 2, \dots, N\}, \quad \mathcal{T} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

(Grünbaum y Dette-Reuther-Studden-Zygmunt, 2007)

**Teorema espectral:** existe una matriz peso  $\mathbf{W}$  asociada a  $\mathbf{P}$  y su correspondiente familia de **polinomios ortogonales**  $(\Phi_n)_n$  tal que

$$\mathbf{P}\Phi = \begin{pmatrix} B_0 & A_0 & & & \\ C_1 & B_1 & A_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_0(x) \\ \Phi_1(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} \Phi_0(x) \\ \Phi_1(x) \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad x \in [-1, 1]$$

## PROBABILIDADES DE TRANSICIÓN

$$\mathbf{P}_{ij}^n = \left( \int_{-1}^1 x^n \Phi_i(x) d\mathbf{W}(x) \Phi_j^*(x) \right) \left( \int_{-1}^1 \Phi_j(x) d\mathbf{W}(x) \Phi_j^*(x) \right)^{-1}$$

## MEDIDA INVARIANTE (MDI, 2011)

$\pi = (\pi_0; \pi_1; \dots) \equiv (\Pi_0 \mathbf{e}_N; \Pi_1 \mathbf{e}_N; \dots)$  tal que  $\pi \mathbf{P} = \pi$  donde  $\mathbf{e}_N = (1, \dots, 1)^T$  y

$$\Pi_n = (C_1^T \cdots C_n^T)^{-1} \Pi_0 (A_0 \cdots A_{n-1}) = \left( \int_{-1}^1 \Phi_n(x) d\mathbf{W}(x) \Phi_n^*(x) \right)^{-1}$$

# SWITCHING DIFFUSION MODELS

$$\mathcal{C} = (a, b) \times \{1, 2, \dots, N\}, \quad \mathcal{T} = [0, \infty)$$

Si existe una matriz peso  $\mathbf{W}$  asociada a  $\mathcal{A}$  y su correspondiente familia de **funciones ortogonales matriciales**  $(\Phi_n)_n$  tal que

$$\mathcal{A}\Phi_n(x) = \frac{1}{2}\mathbf{A}(x)\Phi_n''(x) + \mathbf{B}(x)\Phi_n'(x) + \mathbf{Q}(x)\Phi_n(x) = \Phi_n(x)\Gamma_n$$

PROBABILIDADES DE TRANSICIÓN (MdI, 2012)

$$\mathbf{P}(t; x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(x) e^{\Gamma_n t} \Phi_n^*(y) \mathbf{W}(y)$$

MEDIDA INVARIANTE (MdI, 2012)

$\psi(y) = (\psi_1(y), \psi_2(y), \dots, \psi_N(y))$  tal que  $\mathcal{A}^* \psi(y) = \mathbf{0}$

$$\Rightarrow \psi(y) = \left( \int_a^b \mathbf{e}_N^T \mathbf{W}(x) \mathbf{e}_N dx \right)^{-1} \mathbf{e}_N^T \mathbf{W}(y)$$

# SWITCHING DIFFUSION MODELS

$$\mathcal{C} = (a, b) \times \{1, 2, \dots, N\}, \quad \mathcal{T} = [0, \infty)$$

Si existe una matriz peso  $\mathbf{W}$  asociada a  $\mathcal{A}$  y su correspondiente familia de **funciones ortogonales matriciales**  $(\Phi_n)_n$  tal que

$$\mathcal{A}\Phi_n(x) = \frac{1}{2}\mathbf{A}(x)\Phi_n''(x) + \mathbf{B}(x)\Phi_n'(x) + \mathbf{Q}(x)\Phi_n(x) = \Phi_n(x)\Gamma_n$$

## PROBABILIDADES DE TRANSICIÓN (MdI, 2012)

$$\mathbf{P}(t; x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(x) e^{\Gamma_n t} \Phi_n^*(y) \mathbf{W}(y)$$

## MEDIDA INVARIANTE (MdI, 2012)

$\psi(y) = (\psi_1(y), \psi_2(y), \dots, \psi_N(y))$  tal que  $\mathcal{A}^* \psi(y) = \mathbf{0}$

$$\Rightarrow \psi(y) = \left( \int_a^b \mathbf{e}_N^T \mathbf{W}(x) \mathbf{e}_N dx \right)^{-1} \mathbf{e}_N^T \mathbf{W}(y)$$

# SWITCHING DIFFUSION MODELS

$$\mathcal{C} = (a, b) \times \{1, 2, \dots, N\}, \quad \mathcal{T} = [0, \infty)$$

Si existe una matriz peso  $\mathbf{W}$  asociada a  $\mathcal{A}$  y su correspondiente familia de **funciones ortogonales matriciales**  $(\Phi_n)_n$  tal que

$$\mathcal{A}\Phi_n(x) = \frac{1}{2}\mathbf{A}(x)\Phi_n''(x) + \mathbf{B}(x)\Phi_n'(x) + \mathbf{Q}(x)\Phi_n(x) = \Phi_n(x)\Gamma_n$$

## PROBABILIDADES DE TRANSICIÓN (MDI, 2012)

$$\mathbf{P}(t; x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(x) e^{\Gamma_n t} \Phi_n^*(y) \mathbf{W}(y)$$

## MEDIDA INVARIANTE (MDI, 2012)

$\psi(y) = (\psi_1(y), \psi_2(y), \dots, \psi_N(y))$  tal que  $\mathcal{A}^* \psi(y) = \mathbf{0}$

$$\Rightarrow \psi(y) = \left( \int_a^b \mathbf{e}_N^T \mathbf{W}(x) \mathbf{e}_N dx \right)^{-1} \mathbf{e}_N^T \mathbf{W}(y)$$

# SUMARIO

- 1 PROCESOS DE MARKOV
- 2 PROCESOS DE MARKOV BIDIMENSIONALES
- 3 APLICACIÓN A UN MODELO DE WRIGHT-FISHER

# EL MODELO CLÁSICO DE WRIGHT-FISHER

El **modelo de Wright-Fisher** considera una población de genes de tamaño constante  $M$  compuesto de dos tipos  $A$  y  $B$ . Llamemos  $\#A = i$ .

La siguiente generación está **binomialmente** distribuida: cada elemento se convertirá en  $A$  o  $B$  con probabilidades

$$p_i = \frac{i}{M}, \quad q_i = 1 - p_i = 1 - \frac{i}{M}$$

De esta manera generamos una **cadena de Markov (discreta)**  $\{X(n)\}$

$$X(n) = \{\#A \text{ en la } n\text{-ésima generación}\}$$

con espacio de estados  $\mathcal{S} = \{0, 1, \dots, M\}$  y **matriz de transición de probabilidades**

$$\Pr\{X(n+1) = j | X(n) = i\} = \binom{M}{j} p_i^j q_i^{M-j}$$

Un modelo más realístico tiene en cuenta **mutaciones**

$$A \xrightarrow{a} B, \quad B \xrightarrow{b} A, \quad a, b > 0$$

La matriz de transición de probabilidades es la misma, pero ahora

$$p_i = \frac{i}{M}(1-a) + \left(1 - \frac{i}{M}\right)b, \quad q_i = 1 - p_i$$

# EL MODELO CLÁSICO DE WRIGHT-FISHER

El **modelo de Wright-Fisher** considera una población de genes de tamaño constante  $M$  compuesto de dos tipos  $A$  y  $B$ . Llamemos  $\#A = i$ . La siguiente generación está **binomialmente** distribuida: cada elemento se convertirá en  $A$  o  $B$  con probabilidades

$$p_i = \frac{i}{M}, \quad q_i = 1 - p_i = 1 - \frac{i}{M}$$

De esta manera generamos una **cadena de Markov (discreta)**  $\{X(n)\}$

$$X(n) = \{\#A \text{ en la } n\text{-ésima generación}\}$$

con espacio de estados  $\mathcal{S} = \{0, 1, \dots, M\}$  y **matriz de transición de probabilidades**

$$\Pr\{X(n+1) = j | X(n) = i\} = \binom{M}{j} p_i^j q_i^{M-j}$$

Un modelo más realístico tiene en cuenta **mutaciones**

$$A \xrightarrow{a} B, \quad B \xrightarrow{b} A, \quad a, b > 0$$

La matriz de transición de probabilidades es la misma, pero ahora

$$p_i = \frac{i}{M}(1-a) + \left(1 - \frac{i}{M}\right)b, \quad q_i = 1 - p_i$$

# EL MODELO CLÁSICO DE WRIGHT-FISHER

El **modelo de Wright-Fisher** considera una población de genes de tamaño constante  $M$  compuesto de dos tipos  $A$  y  $B$ . Llamemos  $\#A = i$ . La siguiente generación está **binomialmente** distribuida: cada elemento se convertirá en  $A$  o  $B$  con probabilidades

$$p_i = \frac{i}{M}, \quad q_i = 1 - p_i = 1 - \frac{i}{M}$$

De esta manera generamos una **cadena de Markov (discreta)**  $\{X(n)\}$

$$X(n) = \{\#A \text{ en la } n\text{-ésima generación}\}$$

con espacio de estados  $\mathcal{S} = \{0, 1, \dots, M\}$  y **matriz de transición de probabilidades**

$$\Pr\{X(n+1) = j | X(n) = i\} = \binom{M}{j} p_i^j q_i^{M-j}$$

Un modelo más realístico tiene en cuenta **mutaciones**

$$A \xrightarrow{a} B, \quad B \xrightarrow{b} A, \quad a, b > 0$$

La matriz de transición de probabilidades es la misma, pero ahora

$$p_i = \frac{i}{M}(1-a) + \left(1 - \frac{i}{M}\right)b, \quad q_i = 1 - p_i$$

# EL MODELO CLÁSICO DE WRIGHT-FISHER

El **modelo de Wright-Fisher** considera una población de genes de tamaño constante  $M$  compuesto de dos tipos  $A$  y  $B$ . Llamemos  $\#A = i$ . La siguiente generación está **binomialmente** distribuida: cada elemento se convertirá en  $A$  o  $B$  con probabilidades

$$p_i = \frac{i}{M}, \quad q_i = 1 - p_i = 1 - \frac{i}{M}$$

De esta manera generamos una **cadena de Markov (discreta)**  $\{X(n)\}$

$$X(n) = \{\#A \text{ en la } n\text{-ésima generación}\}$$

con espacio de estados  $\mathcal{S} = \{0, 1, \dots, M\}$  y **matriz de transición de probabilidades**

$$\Pr\{X(n+1) = j | X(n) = i\} = \binom{M}{j} p_i^j q_i^{M-j}$$

Un modelo más realístico tiene en cuenta **mutaciones**

$$A \xrightarrow{a} B, \quad B \xrightarrow{b} A, \quad a, b > 0$$

La matriz de transición de probabilidades es la misma, pero ahora

$$p_i = \frac{i}{M}(1-a) + \left(1 - \frac{i}{M}\right)b, \quad q_i = 1 - p_i$$

# EL MODELO CLÁSICO DE WRIGHT-FISHER

El **modelo de Wright-Fisher** considera una población de genes de tamaño constante  $M$  compuesto de dos tipos  $A$  y  $B$ . Llamemos  $\#A = i$ . La siguiente generación está **binomialmente** distribuida: cada elemento se convertirá en  $A$  o  $B$  con probabilidades

$$p_i = \frac{i}{M}, \quad q_i = 1 - p_i = 1 - \frac{i}{M}$$

De esta manera generamos una **cadena de Markov (discreta)**  $\{X(n)\}$

$$X(n) = \{\#A \text{ en la } n\text{-ésima generación}\}$$

con espacio de estados  $\mathcal{S} = \{0, 1, \dots, M\}$  y **matriz de transición de probabilidades**

$$\Pr\{X(n+1) = j | X(n) = i\} = \binom{M}{j} p_i^j q_i^{M-j}$$

Un modelo más realístico tiene en cuenta **mutaciones**

$$A \xrightarrow{a} B, \quad B \xrightarrow{b} A, \quad a, b > 0$$

La matriz de transición de probabilidades es la misma, pero ahora

$$p_i = \frac{i}{M}(1-a) + \left(1 - \frac{i}{M}\right)b, \quad q_i = 1 - p_i$$

# APROXIMACIÓN A UN PROCESO DE DIFUSIÓN

Considerando el proceso límite

$$Y(t) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{X([Mt])}{M}$$

y llamando  $x = i/M$  se tiene que

$$\tau(x) = -\gamma_1 x + (1-x)\gamma_2, \quad \sigma^2(x) = x(1-x)$$

donde  $\gamma_1 = aM$  y  $\gamma_2 = bM$  son las **intensidades de mutación**.

$Y(t)$  es un **proceso de difusión** (en tiempo continuo) con *espacio de estados*  $S = [0, 1]$ , *drift*  $\tau(x)$  y *coeficiente de difusión*  $\sigma^2(x)$ .

$Y(t) = Y_t$  evoluciona acorde a la **ecuación diferencial estocástica**

$$dY_t = \tau(Y_t) + \sigma(Y_t)dB_t$$

# APROXIMACIÓN A UN PROCESO DE DIFUSIÓN

Considerando el proceso límite

$$Y(t) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{X([Mt])}{M}$$

y llamando  $x = i/M$  se tiene que

$$\tau(x) = -\gamma_1 x + (1-x)\gamma_2, \quad \sigma^2(x) = x(1-x)$$

donde  $\gamma_1 = aM$  y  $\gamma_2 = bM$  son las **intensidades de mutación**.

$Y(t)$  es un **proceso de difusión** (en tiempo continuo) con *espacio de estados*  $S = [0, 1]$ , *drift*  $\tau(x)$  y *coeficiente de difusión*  $\sigma^2(x)$ .

$Y(t) = Y_t$  evoluciona acorde a la **ecuación diferencial estocástica**

$$dY_t = \tau(Y_t) + \sigma(Y_t)dB_t$$

# APROXIMACIÓN A UN PROCESO DE DIFUSIÓN

Considerando el proceso límite

$$Y(t) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{X([Mt])}{M}$$

y llamando  $x = i/M$  se tiene que

$$\tau(x) = -\gamma_1 x + (1-x)\gamma_2, \quad \sigma^2(x) = x(1-x)$$

donde  $\gamma_1 = aM$  y  $\gamma_2 = bM$  son las **intensidades de mutación**.

$Y(t)$  es un **proceso de difusión** (en tiempo continuo) con *espacio de estados*  $\mathcal{S} = [0, 1]$ , *drift*  $\tau(x)$  y *coeficiente de difusión*  $\sigma^2(x)$ .

$Y(t) = Y_t$  evoluciona acorde a la **ecuación diferencial estocástica**

$$dY_t = \tau(Y_t) + \sigma(Y_t)dB_t$$

# APROXIMACIÓN A UN PROCESO DE DIFUSIÓN

Considerando el proceso límite

$$Y(t) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{X([Mt])}{M}$$

y llamando  $x = i/M$  se tiene que

$$\tau(x) = -\gamma_1 x + (1-x)\gamma_2, \quad \sigma^2(x) = x(1-x)$$

donde  $\gamma_1 = aM$  y  $\gamma_2 = bM$  son las **intensidades de mutación**.

$Y(t)$  es un **proceso de difusión** (en tiempo continuo) con *espacio de estados*  $S = [0, 1]$ , *drift*  $\tau(x)$  y *coeficiente de difusión*  $\sigma^2(x)$ .

$Y(t) = Y_t$  evoluciona acorde a la **ecuación diferencial estocástica**

$$dY_t = \tau(Y_t) + \sigma(Y_t)dB_t$$

# MÉTODOS ESPECTRALES

Sea  $\gamma_1 = \frac{1+\beta}{2}$  and  $\gamma_2 = \frac{1+\alpha}{2}$ .

El **operador infinitesimal**  $\mathcal{A}$  del proceso  $Y_t$  es

$$\mathcal{A} = x(1-x)\frac{d^2}{dx^2} + (1+\alpha - x(\alpha+\beta+2))\frac{d}{dx}, \quad \alpha, \beta > -1$$

La familia de **polinomios de Jacobi**  $P_n^{\alpha,\beta}(x)$  (ortonormales con respecto a  $\omega(x) = x^\alpha(1-x)^\beta$ ) son **autofunciones** de  $\mathcal{A}$ , i.e.

$$\mathcal{A}P_n^{\alpha,\beta}(x) = \lambda_n P_n^{\alpha,\beta}(x), \quad \lambda_n = -n(n+\alpha+\beta+1)$$

Tenemos dos importantes consecuencias:

## REPRESENTACIÓN ESPECTRAL DE LA DENSIDAD DE PROBABILIDADES

$$p(t; x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\lambda_n t} P_n^{\alpha,\beta}(x) P_n^{\alpha,\beta}(y) y^\alpha (1-y)^\beta$$

## DISTRIBUCIÓN INVARIANTE ( $\alpha, \beta \geq 0$ )

$$\psi(y) = \lim_{t \rightarrow \infty} p(t; x, y) = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} y^\alpha (1-y)^\beta$$

# MÉTODOS ESPECTRALES

Sea  $\gamma_1 = \frac{1+\beta}{2}$  and  $\gamma_2 = \frac{1+\alpha}{2}$ .

El **operador infinitesimal**  $\mathcal{A}$  del proceso  $Y_t$  es

$$\mathcal{A} = x(1-x) \frac{d^2}{dx^2} + (1+\alpha - x(\alpha+\beta+2)) \frac{d}{dx}, \quad \alpha, \beta > -1$$

La familia de **polinomios de Jacobi**  $P_n^{\alpha, \beta}(x)$  (ortonormales con respecto a  $\omega(x) = x^\alpha(1-x)^\beta$ ) son **autofunciones** de  $\mathcal{A}$ , i.e.

$$\mathcal{A}P_n^{\alpha, \beta}(x) = \lambda_n P_n^{\alpha, \beta}(x), \quad \lambda_n = -n(n+\alpha+\beta+1)$$

Tenemos dos importantes consecuencias:

## REPRESENTACIÓN ESPECTRAL DE LA DENSIDAD DE PROBABILIDADES

$$p(t; x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\lambda_n t} P_n^{\alpha, \beta}(x) P_n^{\alpha, \beta}(y) y^\alpha (1-y)^\beta$$

## DISTRIBUCIÓN INVARIANTE ( $\alpha, \beta \geq 0$ )

$$\psi(y) = \lim_{t \rightarrow \infty} p(t; x, y) = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} y^\alpha (1-y)^\beta$$

# MÉTODOS ESPECTRALES

Sea  $\gamma_1 = \frac{1+\beta}{2}$  and  $\gamma_2 = \frac{1+\alpha}{2}$ .

El **operador infinitesimal**  $\mathcal{A}$  del proceso  $Y_t$  es

$$\mathcal{A} = x(1-x) \frac{d^2}{dx^2} + (1+\alpha - x(\alpha+\beta+2)) \frac{d}{dx}, \quad \alpha, \beta > -1$$

La familia de **polinomios de Jacobi**  $P_n^{\alpha, \beta}(x)$  (ortonormales con respecto a  $\omega(x) = x^\alpha(1-x)^\beta$ ) son **autofunciones** de  $\mathcal{A}$ , i.e.

$$\mathcal{A}P_n^{\alpha, \beta}(x) = \lambda_n P_n^{\alpha, \beta}(x), \quad \lambda_n = -n(n+\alpha+\beta+1)$$

Tenemos dos importantes consecuencias:

## REPRESENTACIÓN ESPECTRAL DE LA DENSIDAD DE PROBABILIDADES

$$p(t; x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\lambda_n t} P_n^{\alpha, \beta}(x) P_n^{\alpha, \beta}(y) y^\alpha (1-y)^\beta$$

## DISTRIBUCIÓN INVARIANTE ( $\alpha, \beta \geq 0$ )

$$\psi(y) = \lim_{t \rightarrow \infty} p(t; x, y) = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} y^\alpha (1-y)^\beta$$

# MÉTODOS ESPECTRALES

Sea  $\gamma_1 = \frac{1+\beta}{2}$  and  $\gamma_2 = \frac{1+\alpha}{2}$ .

El **operador infinitesimal**  $\mathcal{A}$  del proceso  $Y_t$  es

$$\mathcal{A} = x(1-x) \frac{d^2}{dx^2} + (1+\alpha - x(\alpha+\beta+2)) \frac{d}{dx}, \quad \alpha, \beta > -1$$

La familia de **polinomios de Jacobi**  $P_n^{\alpha, \beta}(x)$  (ortonormales con respecto a  $\omega(x) = x^\alpha(1-x)^\beta$ ) son **autofunciones** de  $\mathcal{A}$ , i.e.

$$\mathcal{A}P_n^{\alpha, \beta}(x) = \lambda_n P_n^{\alpha, \beta}(x), \quad \lambda_n = -n(n+\alpha+\beta+1)$$

Tenemos dos importantes consecuencias:

## REPRESENTACIÓN ESPECTRAL DE LA DENSIDAD DE PROBABILIDADES

$$p(t; x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\lambda_n t} P_n^{\alpha, \beta}(x) P_n^{\alpha, \beta}(y) y^\alpha (1-y)^\beta$$

## DISTRIBUCIÓN INVARIANTE ( $\alpha, \beta \geq 0$ )

$$\psi(y) = \lim_{t \rightarrow \infty} p(t; x, y) = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} y^\alpha (1-y)^\beta$$

# UNA VARIANTE DEL MODELO DE WRIGHT-FISHER

Consideremos ahora el *proceso híbrido* de la forma

$$\{(Y_t, R_t) : t \in [0, +\infty)\}$$

donde  $Y_t \in [0, 1]$  es un modelo de difusión de Wright-Fisher y  $R_t \in \{1, 2, \dots, N\}$  es una cadena de Markov (tiempo continuo) que representa  $N$  diferentes **fases** para las cuales el proceso  $Y_t$  puede cambiar.

Nuestro proceso evoluciona acorde a la ecuación diferencial estocástica

$$dY_t = \tau_{R_t}(Y_t) + \sigma_{R_t}(Y_t)dB_t$$

$$\tau_i(x) = \alpha + 1 + N - i - x(\alpha + \beta + 2 + N - i), \quad \sigma_i^2(x) = 2x(1 - x)$$

Obsérvese que las intensidades de mutación dependen de la fase:

$$A \xrightarrow{\frac{\beta+1}{2}} B \quad \text{and} \quad B \xrightarrow{\frac{\alpha+N-i+1}{2}} A, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

- En la fase  $N$  se recupera el modelo de Wright-Fisher original.
- $B \rightarrow A$  **crece** a medida que el proceso se sitúa en las primeras fases.

# UNA VARIANTE DEL MODELO DE WRIGHT-FISHER

Consideremos ahora el *proceso híbrido* de la forma

$$\{(Y_t, R_t) : t \in [0, +\infty)\}$$

donde  $Y_t \in [0, 1]$  es un modelo de difusión de Wright-Fisher y  $R_t \in \{1, 2, \dots, N\}$  es una cadena de Markov (tiempo continuo) que representa  $N$  diferentes **fases** para las cuales el proceso  $Y_t$  puede cambiar.

Nuestro proceso evoluciona acorde a la ecuación diferencial estocástica

$$dY_t = \tau_{R_t}(Y_t) + \sigma_{R_t}(Y_t)dB_t$$

$$\tau_i(x) = \alpha + 1 + N - i - x(\alpha + \beta + 2 + N - i), \quad \sigma_i^2(x) = 2x(1 - x)$$

Obsérvese que las intensidades de mutación dependen de la fase:

$$A \xrightarrow{\frac{\beta+1}{2}} B \quad \text{and} \quad B \xrightarrow{\frac{\alpha+N-i+1}{2}} A, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

- En la fase  $N$  se recupera el modelo de Wright-Fisher original.
- $B \rightarrow A$  **crece** a medida que el proceso se sitúa en las primeras fases.

# UNA VARIANTE DEL MODELO DE WRIGHT-FISHER

Consideremos ahora el *proceso híbrido* de la forma

$$\{(Y_t, R_t) : t \in [0, +\infty)\}$$

donde  $Y_t \in [0, 1]$  es un modelo de difusión de Wright-Fisher y  $R_t \in \{1, 2, \dots, N\}$  es una cadena de Markov (tiempo continuo) que representa  $N$  diferentes **fases** para las cuales el proceso  $Y_t$  puede cambiar.

Nuestro proceso evoluciona acorde a la ecuación diferencial estocástica

$$dY_t = \tau_{R_t}(Y_t) + \sigma_{R_t}(Y_t)dB_t$$

$$\tau_i(x) = \alpha + 1 + N - i - x(\alpha + \beta + 2 + N - i), \quad \sigma_i^2(x) = 2x(1 - x)$$

Obsérvese que las intensidades de mutación dependen de la fase:

$$A \xrightarrow{\frac{\beta+1}{2}} B \quad \text{and} \quad B \xrightarrow{\frac{\alpha+N-i+1}{2}} A, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

- En la fase  $N$  se recupera el modelo de Wright-Fisher original.
- $B \rightarrow A$  **crece** a medida que el proceso se sitúa en las primeras fases.

# UNA VARIANTE DEL MODELO DE WRIGHT-FISHER

Consideremos ahora el *proceso híbrido* de la forma

$$\{(Y_t, R_t) : t \in [0, +\infty)\}$$

donde  $Y_t \in [0, 1]$  es un modelo de difusión de Wright-Fisher y  $R_t \in \{1, 2, \dots, N\}$  es una cadena de Markov (tiempo continuo) que representa  $N$  diferentes **fases** para las cuales el proceso  $Y_t$  puede cambiar.

Nuestro proceso evoluciona acorde a la ecuación diferencial estocástica

$$dY_t = \tau_{R_t}(Y_t) + \sigma_{R_t}(Y_t)dB_t$$

$$\tau_i(x) = \alpha + 1 + N - i - x(\alpha + \beta + 2 + N - i), \quad \sigma_i^2(x) = 2x(1 - x)$$

Obsérvese que las intensidades de mutación dependen de la fase:

$$A \xrightarrow{\frac{\beta+1}{2}} B \quad \text{and} \quad B \xrightarrow{\frac{\alpha+N-i+1}{2}} A, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

- En la fase  $N$  se recupera el modelo de Wright-Fisher original.
- $B \rightarrow A$  **crece** a medida que el proceso se sitúa en las primeras fases.

# UNA VARIANTE DEL MODELO DE WRIGHT-FISHER

Consideremos ahora el *proceso híbrido* de la forma

$$\{(Y_t, R_t) : t \in [0, +\infty)\}$$

donde  $Y_t \in [0, 1]$  es un modelo de difusión de Wright-Fisher y  $R_t \in \{1, 2, \dots, N\}$  es una cadena de Markov (tiempo continuo) que representa  $N$  diferentes **fases** para las cuales el proceso  $Y_t$  puede cambiar.

Nuestro proceso evoluciona acorde a la ecuación diferencial estocástica

$$dY_t = \tau_{R_t}(Y_t) + \sigma_{R_t}(Y_t)dB_t$$

$$\tau_i(x) = \alpha + 1 + N - i - x(\alpha + \beta + 2 + N - i), \quad \sigma_i^2(x) = 2x(1 - x)$$

Obsérvese que las intensidades de mutación dependen de la fase:

$$A \xrightarrow{\frac{\beta+1}{2}} B \quad \text{and} \quad B \xrightarrow{\frac{\alpha+N-i+1}{2}} A, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

- En la fase  $N$  se recupera el modelo de Wright-Fisher original.
- $B \rightarrow A$  **crece** a medida que el proceso se sitúa en las primeras fases.

# LA TRANSICIÓN DE FASES

El proceso discreto  $R_t$  (que depende de la posición  $Y_t$ ) evoluciona acorde a un **proceso de nacimiento y muerte** cuyo operador infinitesimal es una matriz  $N \times N$  tridiagonal  $\mathbf{Q}(x)$  donde

$$\mathbf{Q}_{i,i-1}(x) = \frac{1}{1-x}(N-i)(i+\beta-k), \quad \mathbf{Q}_{i,i+1}(x) = \frac{x}{1-x}(i-1)(N-i+k)$$

$$\mathbf{Q}_{i,i}(x) = -(\mathbf{Q}_{i,i-1}(x) + \mathbf{Q}_{i,i+1}(x)), \quad 0 < k < \beta + 1$$

$\mathbf{Q}(x)$  sólo depende de  $\beta$  y de un **nuevo** parámetro  $k$ .

Por ejemplo:  $N = 3$  fases,  $\beta = 1$ ,  $k = 3/2$ :

$$\mathbf{Q}(x) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\frac{1-x}{5x}} & \frac{1}{\frac{1-x}{-3-5x}} & 0 \\ \frac{1}{2(1-x)} & \frac{1}{2(1-x)} & \frac{3}{2(1-x)} \\ 0 & \frac{3x}{1-x} & -\frac{3x}{1-x} \end{pmatrix}, \quad x \in (0, 1)$$

# LA TRANSICIÓN DE FASES

El proceso discreto  $R_t$  (que depende de la posición  $Y_t$ ) evoluciona acorde a un **proceso de nacimiento y muerte** cuyo operador infinitesimal es una matriz  $N \times N$  tridiagonal  $\mathbf{Q}(x)$  donde

$$\mathbf{Q}_{i,i-1}(x) = \frac{1}{1-x}(N-i)(i+\beta-k), \quad \mathbf{Q}_{i,i+1}(x) = \frac{x}{1-x}(i-1)(N-i+k)$$

$$\mathbf{Q}_{i,i}(x) = -(\mathbf{Q}_{i,i-1}(x) + \mathbf{Q}_{i,i+1}(x)), \quad 0 < k < \beta + 1$$

$\mathbf{Q}(x)$  sólo depende de  $\beta$  y de un **nuevo** parámetro  $k$ .

Por ejemplo:  $N = 3$  fases,  $\beta = 1$ ,  $k = 3/2$ :

$$\mathbf{Q}(x) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\frac{1-x}{5x}} & \frac{1}{\frac{1-x}{-3-5x}} & 0 \\ \frac{1}{2(1-x)} & \frac{1}{2(1-x)} & \frac{3}{2(1-x)} \\ 0 & \frac{3x}{1-x} & -\frac{3x}{1-x} \end{pmatrix}, \quad x \in (0, 1)$$

# MÉTODOS ESPECTRALES

El **operador infinitesimal**  $\mathcal{A}$  toma valores **matriciales**

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \mathbf{A}(x) \frac{d^2}{dx^2} + \mathbf{B}(x) \frac{d}{dx} + \mathbf{Q}(x) \frac{d^0}{dx^0}$$

$$\mathbf{A}(x) = 2x(1-x)\mathbf{I}, \quad \mathbf{B}_{ii}(x) = \tau_i(x)$$

Conocemos ya (Grünbaum-Pacharoni-Tirao, 2002) una familia de autofunciones ortonormales matriciales  $\Phi_n(x)$  of  $\mathcal{A}$ :

$$\mathcal{A}\Phi_n(x) = \Phi_n(x)\Gamma_n, \quad \Gamma_n \text{ diagonal}$$

Se denominan **funciones esféricas matriciales** asociadas al espacio proyectivo complejo.

La correspondiente **matriz peso**  $\mathbf{W}(x)$  es diagonal con entradas

$$\mathbf{W}_{ii}(x) = x^\alpha(1-x)^\beta \binom{\beta - k + i - 1}{i - 1} \binom{N + k - i - 1}{N - i} x^{N-i}$$

## REPRESENTACIÓN ESPECTRAL DE LA DENSIDAD DE PROBABILIDADES

$$\mathbf{P}(t; x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(x) e^{\Gamma_n t} \Phi_n^*(y) \mathbf{W}(y)$$

# MÉTODOS ESPECTRALES

El **operador infinitesimal**  $\mathcal{A}$  toma valores **matriciales**

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\mathbf{A}(x)\frac{d^2}{dx^2} + \mathbf{B}(x)\frac{d}{dx} + \mathbf{Q}(x)\frac{d^0}{dx^0}$$

$$\mathbf{A}(x) = 2x(1-x)\mathbf{I}, \quad \mathbf{B}_{ii}(x) = \tau_i(x)$$

Conocemos ya (Grünbaum-Pacharoni-Tirao, 2002) una familia de autofunciones ortonormales matriciales  $\Phi_n(x)$  of  $\mathcal{A}$ :

$$\mathcal{A}\Phi_n(x) = \Phi_n(x)\Gamma_n, \quad \Gamma_n \text{ diagonal}$$

Se denominan **funciones esféricas matriciales** asociadas al espacio proyectivo complejo.

La correspondiente **matriz peso**  $\mathbf{W}(x)$  es diagonal con entradas

$$\mathbf{W}_{ii}(x) = x^\alpha(1-x)^\beta \binom{\beta - k + i - 1}{i - 1} \binom{N + k - i - 1}{N - i} x^{N-i}$$

## REPRESENTACIÓN ESPECTRAL DE LA DENSIDAD DE PROBABILIDADES

$$\mathbf{P}(t; x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(x) e^{\Gamma_n t} \Phi_n^*(y) \mathbf{W}(y)$$

# MÉTODOS ESPECTRALES

El **operador infinitesimal**  $\mathcal{A}$  toma valores **matriciales**

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\mathbf{A}(x)\frac{d^2}{dx^2} + \mathbf{B}(x)\frac{d}{dx} + \mathbf{Q}(x)\frac{d^0}{dx^0}$$

$$\mathbf{A}(x) = 2x(1-x)\mathbf{I}, \quad \mathbf{B}_{ii}(x) = \tau_i(x)$$

Conocemos ya (Grünbaum-Pacharoni-Tirao, 2002) una familia de autofunciones ortonormales matriciales  $\Phi_n(x)$  of  $\mathcal{A}$ :

$$\mathcal{A}\Phi_n(x) = \Phi_n(x)\Gamma_n, \quad \Gamma_n \text{ diagonal}$$

Se denominan **funciones esféricas matriciales** asociadas al espacio proyectivo complejo.

La correspondiente **matriz peso**  $\mathbf{W}(x)$  es diagonal con entradas

$$\mathbf{W}_{ii}(x) = x^\alpha(1-x)^\beta \binom{\beta - k + i - 1}{i - 1} \binom{N + k - i - 1}{N - i} x^{N-i}$$

## REPRESENTACIÓN ESPECTRAL DE LA DENSIDAD DE PROBABILIDADES

$$\mathbf{P}(t; x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(x) e^{\Gamma_n t} \Phi_n^*(y) \mathbf{W}(y)$$

# DISTRIBUCIÓN INVARIANTE

La **distribución invariante**  $\psi(y)$  ( $\alpha, \beta \geq 0$ ) viene del estudio de

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}(t; x, y)$$

Ésta deberá ser independiente del estado y de la fase inicial.

Deberíamos de esperar una distribución invariante en forma de **vector fila**

$$\psi(y) = (\psi_1(y), \psi_2(y), \dots, \psi_N(y))$$

con  $0 \leq \psi_j(y) \leq 1$  y

$$\sum_{j=1}^N \int_0^1 \psi_j(y) dy = 1$$

FÓRMULA EXPLÍCITA (MDI, 2012)

$$\Rightarrow \psi(y) = \left( \int_0^1 \mathbf{e}_N^T \mathbf{W}(x) \mathbf{e}_N dx \right)^{-1} \mathbf{e}_N^T \mathbf{W}(y)$$

donde  $\mathbf{e}^T = (1, 1, \dots, 1)$ . En particular

$$\psi_j(y) = y^{\alpha+N-j} (1-y)^\beta \binom{N-1}{j-1} \binom{\alpha+\beta+N}{\alpha} \frac{(\beta+N)(k)_{N-j} (\beta-k+1)_{j-1}}{(\alpha+\beta-k+2)_{N-1}}$$

# DISTRIBUCIÓN INVARIANTE

La **distribución invariante**  $\psi(y)$  ( $\alpha, \beta \geq 0$ ) viene del estudio de

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}(t; x, y)$$

Ésta deberá ser independiente del estado y de la fase inicial.

Deberíamos de esperar una distribución invariante en forma de **vector fila**

$$\psi(y) = (\psi_1(y), \psi_2(y), \dots, \psi_N(y))$$

con  $0 \leq \psi_j(y) \leq 1$  y

$$\sum_{j=1}^N \int_0^1 \psi_j(y) dy = 1$$

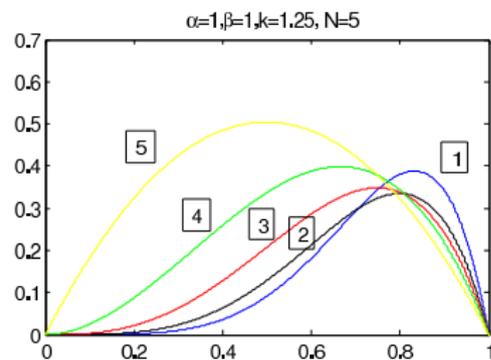
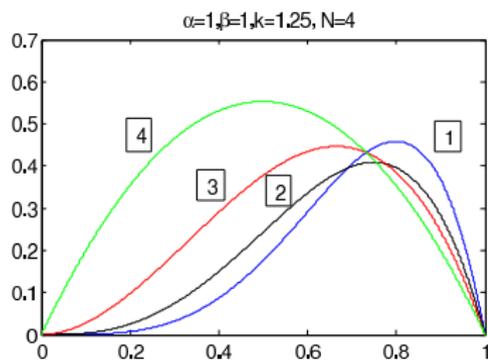
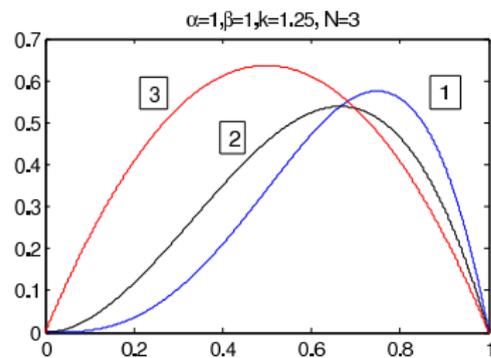
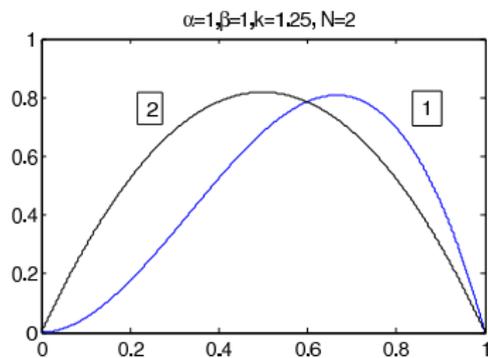
**FÓRMULA EXPLÍCITA (MDI, 2012)**

$$\Rightarrow \psi(y) = \left( \int_0^1 \mathbf{e}_N^T \mathbf{W}(x) \mathbf{e}_N dx \right)^{-1} \mathbf{e}_N^T \mathbf{W}(y)$$

donde  $\mathbf{e}^T = (1, 1, \dots, 1)$ . En particular

$$\psi_j(y) = y^{\alpha+N-j} (1-y)^\beta \binom{N-1}{j-1} \binom{\alpha+\beta+N}{\alpha} \frac{(\beta+N)(k)_{N-j} (\beta-k+1)_{j-1}}{(\alpha+\beta-k+2)_{N-1}}$$

# ESTUDIO DE LA DISTRIBUCIÓN INVARIANTE



# CONCLUSIONES

- Los procesos de Markov bidimensionales se ajustan mejor a la realidad de algunos modelos que aparecen en genética, finanzas o sistemas de comunicaciones.
- El problema reside en hallar la matriz peso y las correspondientes autofunciones matriciales, algo que no es sencillo de calcular. La teoría de funciones matriciales ortogonales ayuda a encontrar procesos de este tipo.
- La segunda componente o fase a su vez puede ser infinita (discreta o continua). En ese caso, el análisis espectral se podría hacer en términos de funciones ortogonales matriciales de dimensión infinita o de funciones ortogonales de dos variables.
- Más información: M. D. de la Iglesia, *Spectral methods for bivariate Markov processes with diffusion and discrete components and a variant of the Wright-Fisher model*, J. Math. Anal. Appl. **393** (2012) 239–255.

# CONCLUSIONES

- Los procesos de Markov bidimensionales se ajustan mejor a la realidad de algunos modelos que aparecen en genética, finanzas o sistemas de comunicaciones.
- El problema reside en hallar la matriz peso y las correspondientes autofunciones matriciales, algo que no es sencillo de calcular. La teoría de funciones matriciales ortogonales ayuda a encontrar procesos de este tipo.
- La segunda componente o fase a su vez puede ser infinita (discreta o continua). En ese caso, el análisis espectral se podría hacer en términos de funciones ortogonales matriciales de dimensión infinita o de funciones ortogonales de dos variables.
- Más información: M. D. de la Iglesia, *Spectral methods for bivariate Markov processes with diffusion and discrete components and a variant of the Wright-Fisher model*, J. Math. Anal. Appl. **393** (2012) 239–255.

# CONCLUSIONES

- Los procesos de Markov bidimensionales se ajustan mejor a la realidad de algunos modelos que aparecen en genética, finanzas o sistemas de comunicaciones.
- El problema reside en hallar la matriz peso y las correspondientes autofunciones matriciales, algo que no es sencillo de calcular. La teoría de funciones matriciales ortogonales ayuda a encontrar procesos de este tipo.
- La segunda componente o fase a su vez puede ser infinita (discreta o continua). En ese caso, el análisis espectral se podría hacer en términos de funciones ortogonales matriciales de dimensión infinita o de funciones ortogonales de dos variables.
- Más información: M. D. de la Iglesia, *Spectral methods for bivariate Markov processes with diffusion and discrete components and a variant of the Wright-Fisher model*, J. Math. Anal. Appl. **393** (2012) 239–255.

# CONCLUSIONES

- Los procesos de Markov bidimensionales se ajustan mejor a la realidad de algunos modelos que aparecen en genética, finanzas o sistemas de comunicaciones.
- El problema reside en hallar la matriz peso y las correspondientes autofunciones matriciales, algo que no es sencillo de calcular. La teoría de funciones matriciales ortogonales ayuda a encontrar procesos de este tipo.
- La segunda componente o fase a su vez puede ser infinita (discreta o continua). En ese caso, el análisis espectral se podría hacer en términos de funciones ortogonales matriciales de dimensión infinita o de funciones ortogonales de dos variables.
- Más información: M. D. de la Iglesia, *Spectral methods for bivariate Markov processes with diffusion and discrete components and a variant of the Wright-Fisher model*, J. Math. Anal. Appl. **393** (2012) 239–255.

# COMPONENTES PRINCIPALES DINÁMICAS<sup>1</sup>

Manuel Domínguez de la Iglesia

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Sevilla

Universidad Tecnológica de Panamá

4 de septiembre de 2012

---

<sup>1</sup>trabajo en conjunto con Esteban G. Tabak

# SUMARIO

- 1 ANÁLISIS DE COMPONENTES PRINCIPALES Y MODELOS AUTORREGRESIVOS
- 2 COMPONENTES PRINCIPALES DINÁMICAS
- 3 APLICACIÓN A TEMPERATURAS SUPERFICIALES GLOBALES DEL OCÉANO

# SUMARIO

- 1 ANÁLISIS DE COMPONENTES PRINCIPALES Y MODELOS AUTORREGRESIVOS
- 2 COMPONENTES PRINCIPALES DINÁMICAS
- 3 APLICACIÓN A TEMPERATURAS SUPERFICIALES GLOBALES DEL OCÉANO

# ANÁLISIS DE COMPONENTES PRINCIPALES (PCA)

Supongamos que se han observado un conjunto de datos  $z_1, z_2, \dots, z_N \in \mathbb{R}^n$ , sobre una muestra de  $n$  individuos ( $n \ll N$ ).

**Objetivo:** Realizar una transformación ortogonal para convertir un conjunto de observaciones posiblemente correlacionadas en un conjunto de  $m$  ( $m < n$ ) variables que no están correlacionadas llamadas **componentes principales**.

# ANÁLISIS DE COMPONENTES PRINCIPALES (PCA)

Supongamos que se han observado un conjunto de datos  $z_1, z_2, \dots, z_N \in \mathbb{R}^n$ , sobre una muestra de  $n$  individuos ( $n \ll N$ ).

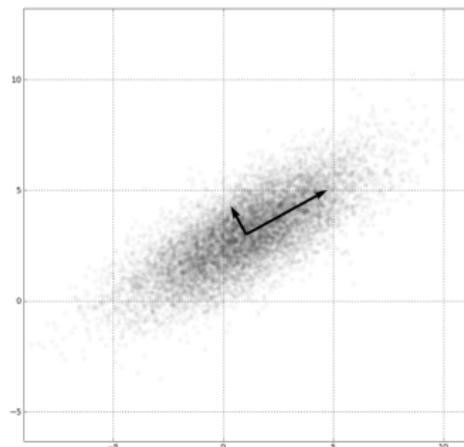
**Objetivo:** Realizar una transformación ortogonal para convertir un conjunto de observaciones posiblemente correlacionadas en un conjunto de  $m$  ( $m < n$ ) variables que no están correlacionadas llamadas **componentes principales**.

# ANÁLISIS DE COMPONENTES PRINCIPALES (PCA)

Supongamos que se han observado un conjunto de datos  $z_1, z_2, \dots, z_N \in \mathbb{R}^n$ , sobre una muestra de  $n$  individuos ( $n \ll N$ ).

**Objetivo:** Realizar una transformación ortogonal para convertir un conjunto de observaciones posiblemente correlacionadas en un conjunto de  $m$  ( $m < n$ ) variables que no están correlacionadas llamadas **componentes principales**.

La transformación está definida de tal manera que la primera componente principal contenga la varianza de mayor tamaño, la segunda varianza de mayor tamaño en la segunda componente, y así sucesivamente.



# EJEMPLOS DE PCA

- 1 Un análisis consideró las **calificaciones escolares** de  $N = 15$  estudiantes en  $n = 8$  materias. Las dos primeras componentes principales explicaban juntos el 82,1% de la varianza. La primera de ellas parecía fuertemente correlacionado con las materias de humanidades mientras que la segunda aparecía relacionado con las materias de ciencias.
- 2 Un análisis de **metodología docente**, consideró las calificaciones de  $N = 54$  estudiantes de biología y  $n = 8$  tipos de habilidades. El primer factor principal que explicaba las calificaciones era la inteligencia del estudiante y en segundo lugar la metodología de aprendizaje usada.
- 3 Un análisis de  $n = 11$  **indicadores socioeconómicos** de  $N = 96$  países, reveló que los resultados podían explicarse en alto grado a partir de sólo dos componentes principales, la primera de ellas tenía que ver con el nivel de PIB total del país y la segunda con el índice de ruralidad.

# EJEMPLOS DE PCA

- 1 Un análisis consideró las **calificaciones escolares** de  $N = 15$  estudiantes en  $n = 8$  materias. Las dos primeras componentes principales explicaban juntos el 82,1% de la varianza. La primera de ellas parecía fuertemente correlacionado con las materias de humanidades mientras que la segunda aparecía relacionado con las materias de ciencias.
- 2 Un análisis de **metodología docente**, consideró las calificaciones de  $N = 54$  estudiantes de biología y  $n = 8$  tipos de habilidades. El primer factor principal que explicaba las calificaciones era la inteligencia del estudiante y en segundo lugar la metodología de aprendizaje usada.
- 3 Un análisis de  $n = 11$  **indicadores socioeconómicos** de  $N = 96$  países, reveló que los resultados podían explicarse en alto grado a partir de sólo dos componentes principales, la primera de ellas tenía que ver con el nivel de PIB total del país y la segunda con el índice de ruralidad.

# EJEMPLOS DE PCA

- 1 Un análisis consideró las **calificaciones escolares** de  $N = 15$  estudiantes en  $n = 8$  materias. Las dos primeras componentes principales explicaban juntos el 82,1% de la varianza. La primera de ellas parecía fuertemente correlacionado con las materias de humanidades mientras que la segunda aparecía relacionado con las materias de ciencias.
- 2 Un análisis de **metodología docente**, consideró las calificaciones de  $N = 54$  estudiantes de biología y  $n = 8$  tipos de habilidades. El primer factor principal que explicaba las calificaciones era la inteligencia del estudiante y en segundo lugar la metodología de aprendizaje usada.
- 3 Un análisis de  $n = 11$  **indicadores socioeconómicos** de  $N = 96$  países, reveló que los resultados podían explicarse en alto grado a partir de sólo dos componentes principales, la primera de ellas tenía que ver con el nivel de PIB total del país y la segunda con el índice de ruralidad.

# FORMULACIÓN MATEMÁTICA DEL PCA

Dado un conjunto de datos  $z_1, z_2, \dots, z_N \in \mathbb{R}^n$ , sus primeras  $m$  **componentes principales** están dadas por

$$x_j = Q_x^T(z_j - \bar{z}), \quad j = 1, \dots, m$$

donde  $\bar{z}$  es el valor medio de  $z$  y  $Q_x \in \mathbb{R}^{n \times m}$  tiene sus columnas ortogonales de tal manera que

$$\sum_{j=1}^N \|(z_j - \bar{z}) - Q_x x_j\|^2$$

sea lo menor posible (**mínimos cuadrados**).

La matriz  $Q_x$  consiste en las primeras  $m$  columnas de  $U$  en la **descomposición de valores singulares**

$$Z^T = USV^T$$

donde  $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $V \in \mathbb{R}^{N \times N}$  son matrices ortogonales y  $S \in \mathbb{R}^{n \times N}$  es la matriz **diagonal** que contiene los autovalores de la **matriz de covarianza**  $Z^T Z$  ordenados en orden decreciente.

# FORMULACIÓN MATEMÁTICA DEL PCA

Dado un conjunto de datos  $z_1, z_2, \dots, z_N \in \mathbb{R}^n$ , sus primeras  $m$  **componentes principales** están dadas por

$$x_j = Q_x^T (z_j - \bar{z}), \quad j = 1, \dots, m$$

donde  $\bar{z}$  es el valor medio de  $z$  y  $Q_x \in \mathbb{R}^{n \times m}$  tiene sus columnas ortogonales de tal manera que

$$\sum_{j=1}^N \|(z_j - \bar{z}) - Q_x x_j\|^2$$

sea lo menor posible (**mínimos cuadrados**).

La matriz  $Q_x$  consiste en las primeras  $m$  columnas de  $U$  en la **descomposición de valores singulares**

$$Z^T = USV^T$$

donde  $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $V \in \mathbb{R}^{N \times N}$  son matrices ortogonales y  $S \in \mathbb{R}^{n \times N}$  es la matriz **diagonal** que contiene los autovalores de la **matriz de covarianza**  $Z^T Z$  ordenados en orden decreciente.

# MODELOS AUTORREGRESIVOS AR( $p$ )

Sea una serie temporal  $z_1, z_2, \dots, z_N \in \mathbb{R}^n$ .

**Objetivo:** modelizar el proceso averiguando el siguiente valor en términos de los  $p$  anteriores ( $p = \text{orden}$ ), es decir

$$z_j = b + \sum_{i=1}^p A_i z_{j-i} + \varepsilon_j,$$

donde  $A_1, \dots, A_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son **parámetros matriciales** del modelo (con ciertas restricciones),  $b \in \mathbb{R}^n$  es un vector constante y  $\varepsilon_j \in \mathbb{R}^n$  es un vector de ruidos (blanco).

Estos modelos se usan mayoritariamente en procesamiento de señales. El problema principal es determinar los valores de  $A_i$  que mejor modelizan la señal, al igual que el orden óptimo.

# MODELOS AUTORREGRESIVOS AR( $p$ )

Sea una serie temporal  $z_1, z_2, \dots, z_N \in \mathbb{R}^n$ .

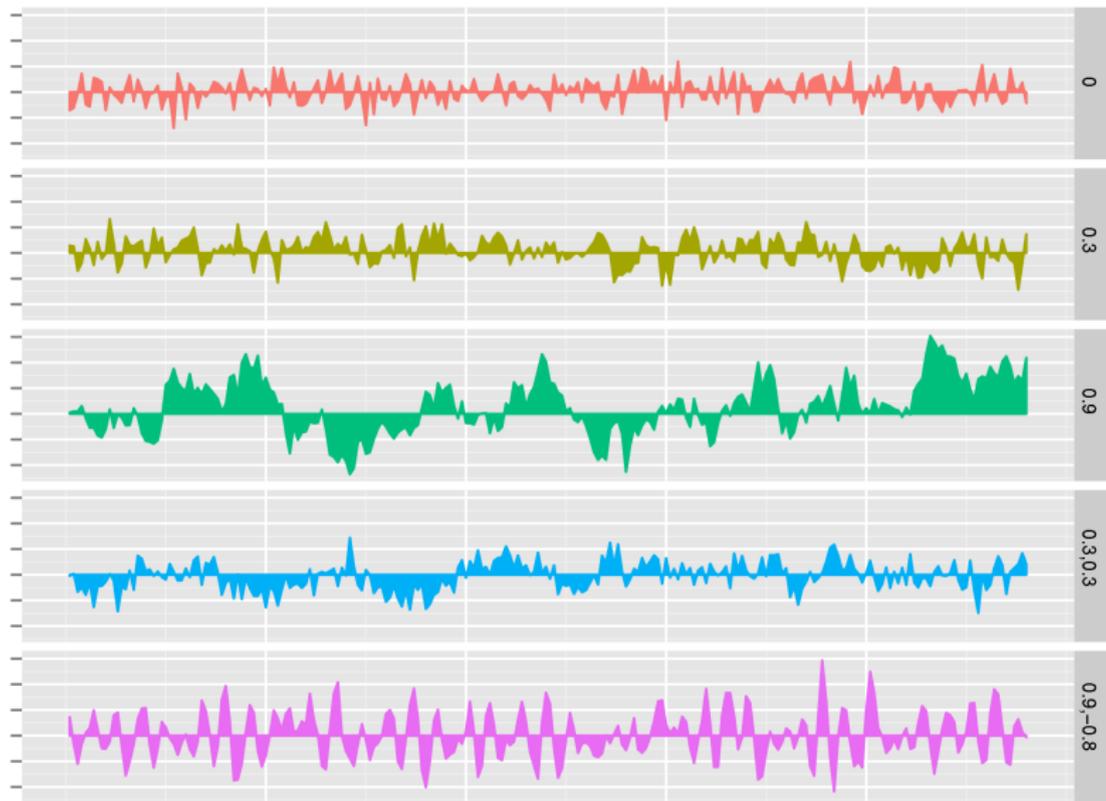
**Objetivo:** modelizar el proceso averiguando el siguiente valor en términos de los  $p$  anteriores ( $p = \text{orden}$ ), es decir

$$z_j = b + \sum_{i=1}^p A_i z_{j-i} + \varepsilon_j,$$

donde  $A_1, \dots, A_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son **parámetros matriciales** del modelo (con ciertas restricciones),  $b \in \mathbb{R}^n$  es un vector constante y  $\varepsilon_j \in \mathbb{R}^n$  es un vector de ruidos (blanco).

Estos modelos se usan mayoritariamente en procesamiento de señales. El problema principal es determinar los valores de  $A_i$  que mejor modelizan la señal, al igual que el orden óptimo.

# EJEMPLOS DE AR( $p$ ) ( $n = 1$ )



# SUMARIO

- 1 ANÁLISIS DE COMPONENTES PRINCIPALES Y MODELOS AUTORREGRESIVOS
- 2 COMPONENTES PRINCIPALES DINÁMICAS
- 3 APLICACIÓN A TEMPERATURAS SUPERFICIALES GLOBALES DEL OCÉANO

# COMPONENTES PRINCIPALES DINÁMICAS (PDC)

**Objetivo:** Mezclar PCA y AR(p).

## CASO LINEAL Y AUTÓNOMO ( $p = 1$ )

Sean  $z_1, z_2, \dots, z_N \in \mathbb{R}^n$  observaciones de una serie temporal. Buscamos una **subvariedad**  $m$ -dimensional  $x$  de  $z$  de la forma  $x = Q_x^T z$ , donde  $Q_x$  tiene sus columnas ortogonales.

Al mismo tiempo vamos buscando una **dinámica** en la variedad reducida

$$\bar{x}_{j+1} = A x_j$$

de tal manera que el costo total

$$c = \sum_{j=1}^{N-1} \|z_{j+1} - Q_x \bar{x}_{j+1}\|^2 = \sum_{j=1}^{N-1} \|z_{j+1} - Q_x A Q_x^T z_j\|^2$$

sea lo menor posible.

# COMPONENTES PRINCIPALES DINÁMICAS (PDC)

**Objetivo:** Mezclar PCA y AR(p).

## CASO LINEAL Y AUTÓNOMO ( $p = 1$ )

Sean  $z_1, z_2, \dots, z_N \in \mathbb{R}^n$  observaciones de una serie temporal. Buscamos una **subvariedad**  $m$ -dimensional  $x$  de  $z$  de la forma  $x = Q_x^T z$ , donde  $Q_x$  tiene sus columnas ortogonales.

Al mismo tiempo vamos buscando una **dinámica** en la variedad reducida

$$\tilde{x}_{j+1} = A x_j$$

de tal manera que el costo total

$$c = \sum_{j=1}^{N-1} \|z_{j+1} - Q_x \tilde{x}_{j+1}\|^2 = \sum_{j=1}^{N-1} \|z_{j+1} - Q_x A Q_x^T z_j\|^2$$

sea lo menor posible.

# COMPONENTES PRINCIPALES DINÁMICAS (PDC)

**Objetivo:** Mezclar PCA y AR(p).

## CASO LINEAL Y AUTÓNOMO ( $p = 1$ )

Sean  $z_1, z_2, \dots, z_N \in \mathbb{R}^n$  observaciones de una serie temporal.

Buscamos una **subvariedad**  $m$ -dimensional  $x$  de  $z$  de la forma  $x = Q_x^T z$ , donde  $Q_x$  tiene sus columnas ortogonales.

Al mismo tiempo vamos buscando una **dinámica** en la variedad reducida

$$\tilde{x}_{j+1} = Ax_j$$

de tal manera que el costo total

$$c = \sum_{j=1}^{N-1} \|z_{j+1} - Q_x \tilde{x}_{j+1}\|^2 = \sum_{j=1}^{N-1} \|z_{j+1} - Q_x A Q_x^T z_j\|^2$$

sea lo menor posible.

# COMPONENTES PRINCIPALES DINÁMICAS (PDC)

**Objetivo:** Mezclar PCA y AR(p).

## CASO LINEAL Y AUTÓNOMO ( $p = 1$ )

Sean  $z_1, z_2, \dots, z_N \in \mathbb{R}^n$  observaciones de una serie temporal. Buscamos una **subvariedad**  $m$ -dimensional  $x$  de  $z$  de la forma  $x = Q_x^T z$ , donde  $Q_x$  tiene sus columnas ortogonales.

Al mismo tiempo vamos buscando una **dinámica** en la variedad reducida

$$\tilde{x}_{j+1} = Ax_j$$

de tal manera que el costo total

$$c = \sum_{j=1}^{N-1} \|z_{j+1} - Q_x \tilde{x}_{j+1}\|^2 = \sum_{j=1}^{N-1} \|z_{j+1} - Q_x A Q_x^T z_j\|^2$$

sea lo menor posible.

# COMPONENTES PRINCIPALES DINÁMICAS (PDC)

**Objetivo:** Mezclar PCA y AR(p).

## CASO LINEAL Y AUTÓNOMO ( $p = 1$ )

Sean  $z_1, z_2, \dots, z_N \in \mathbb{R}^n$  observaciones de una serie temporal. Buscamos una **subvariedad**  $m$ -dimensional  $x$  de  $z$  de la forma  $x = Q_x^T z$ , donde  $Q_x$  tiene sus columnas ortogonales.

Al mismo tiempo vamos buscando una **dinámica** en la variedad reducida

$$\tilde{x}_{j+1} = Ax_j$$

de tal manera que el costo total

$$c = \sum_{j=1}^{N-1} \|z_{j+1} - Q_x \tilde{x}_{j+1}\|^2 = \sum_{j=1}^{N-1} \|z_{j+1} - Q_x A Q_x^T z_j\|^2$$

sea lo menor posible.

# COMPONENTES PRINCIPALES DINÁMICAS (PDC)

**Objetivo:** Mezclar PCA y AR(p).

## CASO LINEAL Y AUTÓNOMO ( $p = 1$ )

Sean  $z_1, z_2, \dots, z_N \in \mathbb{R}^n$  observaciones de una serie temporal. Buscamos una **subvariedad**  $m$ -dimensional  $x$  de  $z$  de la forma  $x = Q_x^T z$ , donde  $Q_x$  tiene sus columnas ortogonales.

Al mismo tiempo vamos buscando una **dinámica** en la variedad reducida

$$\tilde{x}_{j+1} = Ax_j$$

de tal manera que el costo total

$$c = \sum_{j=1}^{N-1} \|z_{j+1} - Q_x \tilde{x}_{j+1}\|^2 = \sum_{j=1}^{N-1} \|z_{j+1} - Q_x A Q_x^T z_j\|^2$$

sea lo menor posible.

CASO BIDIMENSIONAL ( $n = 2$ )

Llamamos  $z = \begin{pmatrix} A \\ P \end{pmatrix}$  y buscamos una **subvariedad**  $x$  de  $z$  de dimensión  $m = 1$  tal que

$$x = A \cos(\theta) + P \sin(\theta)$$

$$y = -A \sin(\theta) + P \cos(\theta)$$

Buscamos adicionalmente una **dinámica** en  $x$

$$\tilde{x}_{j+1} = a x_j$$

La **función de coste** es entonces

$$\begin{aligned} c(\theta, a) &= \sum_{j=1}^{N-1} \left\| \begin{pmatrix} A_{j+1} - \tilde{A}_{j+1} \\ P_{j+1} - \tilde{P}_{j+1} \end{pmatrix} \right\|^2 = \sum_{j=1}^{N-1} \left\| \begin{pmatrix} x_{j+1} - \tilde{x}_{j+1} \\ y_{j+1} - \tilde{y}_{j+1} \end{pmatrix} \right\|^2 \\ &= \sum_{j=1}^{N-1} \left\| \begin{pmatrix} x_{j+1} - a x_j \\ y_{j+1} \end{pmatrix} \right\|^2 = \sum_{j=1}^{N-1} (y_{j+1})^2 + (x_{j+1} - a x_j)^2 \end{aligned}$$

CASO BIDIMENSIONAL ( $n = 2$ )

Llamamos  $z = \begin{pmatrix} A \\ P \end{pmatrix}$  y buscamos una **subvariedad**  $x$  de  $z$  de dimensión  $m = 1$  tal que

$$x = A \cos(\theta) + P \sin(\theta)$$

$$y = -A \sin(\theta) + P \cos(\theta)$$

Buscamos adicionalmente una **dinámica** en  $x$

$$\tilde{x}_{j+1} = a x_j$$

La **función de coste** es entonces

$$\begin{aligned} c(\theta, a) &= \sum_{j=1}^{N-1} \left\| \begin{pmatrix} A_{j+1} - \tilde{A}_{j+1} \\ P_{j+1} - \tilde{P}_{j+1} \end{pmatrix} \right\|^2 = \sum_{j=1}^{N-1} \left\| \begin{pmatrix} x_{j+1} - \tilde{x}_{j+1} \\ y_{j+1} - \tilde{y}_{j+1} \end{pmatrix} \right\|^2 \\ &= \sum_{j=1}^{N-1} \left\| \begin{pmatrix} x_{j+1} - a x_j \\ y_{j+1} \end{pmatrix} \right\|^2 = \sum_{j=1}^{N-1} (y_{j+1})^2 + (x_{j+1} - a x_j)^2 \end{aligned}$$

CASO BIDIMENSIONAL ( $n = 2$ )

Llamamos  $z = \begin{pmatrix} A \\ P \end{pmatrix}$  y buscamos una **subvariedad**  $x$  de  $z$  de dimensión  $m = 1$  tal que

$$x = A \cos(\theta) + P \sin(\theta)$$

$$y = -A \sin(\theta) + P \cos(\theta)$$

Buscamos adicionalmente una **dinámica** en  $x$

$$\tilde{x}_{j+1} = a x_j$$

La **función de coste** es entonces

$$\begin{aligned} c(\theta, a) &= \sum_{j=1}^{N-1} \left\| \begin{pmatrix} A_{j+1} - \tilde{A}_{j+1} \\ P_{j+1} - \tilde{P}_{j+1} \end{pmatrix} \right\|^2 = \sum_{j=1}^{N-1} \left\| \begin{pmatrix} x_{j+1} - \tilde{x}_{j+1} \\ y_{j+1} - \tilde{y}_{j+1} \end{pmatrix} \right\|^2 \\ &= \sum_{j=1}^{N-1} \left\| \begin{pmatrix} x_{j+1} - a x_j \\ y_{j+1} \end{pmatrix} \right\|^2 = \sum_{j=1}^{N-1} (y_{j+1})^2 + (x_{j+1} - a x_j)^2 \end{aligned}$$

## EJEMPLO SINTÉTICO

Generamos un ejemplo en el cual conocemos previamente que existe una **dinámica** en la variable  $x$  de la forma

$$\begin{aligned}x_{j+1} &= ax_j + 0.3\eta_j^x \\ y_{j+1} &= 0.6\eta_j^y\end{aligned}$$

donde  $a = 0.6$ ,  $j = 1, \dots, 999$  y  $\eta_j^{x,y}$  son muestras independientes distribuidas normalmente.

Rotamos, con ángulo  $\theta = \frac{\pi}{3}$ , los datos mediante

$$\begin{aligned}A_j &= x_j \cos(\theta) - y_j \sin(\theta) \\ P_j &= x_j \sin(\theta) + y_j \cos(\theta)\end{aligned}$$

y hacemos descenso sobre las variables  $a$  y  $\theta$ .

## EJEMPLO SINTÉTICO

Generamos un ejemplo en el cual conocemos previamente que existe una **dinámica** en la variable  $x$  de la forma

$$\begin{aligned}x_{j+1} &= ax_j + 0.3\eta_j^x \\ y_{j+1} &= 0.6\eta_j^y\end{aligned}$$

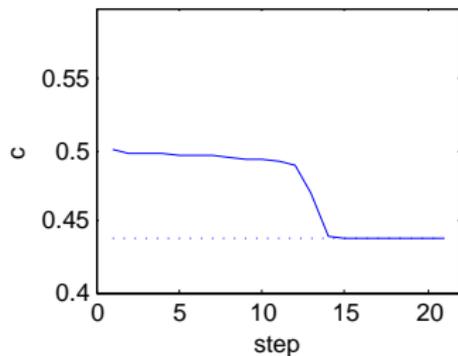
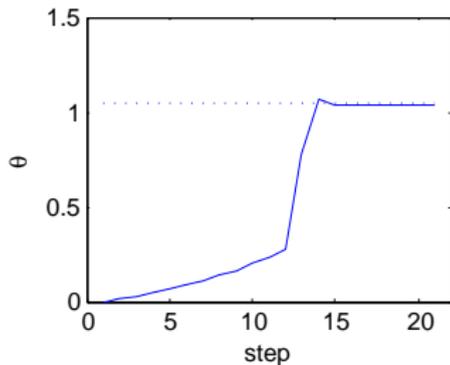
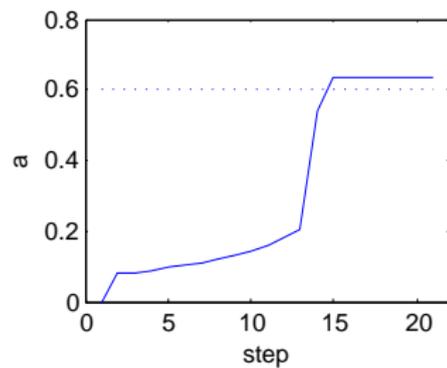
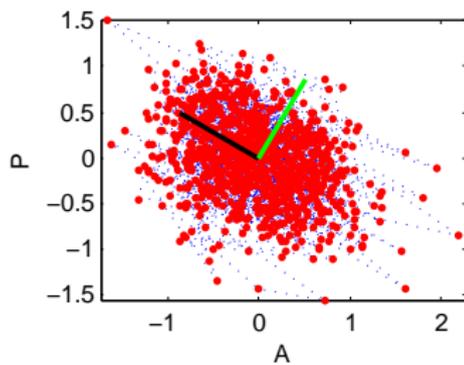
donde  $a = 0.6$ ,  $j = 1, \dots, 999$  y  $\eta_j^{x,y}$  son muestras independientes distribuidas normalmente.

Rotamos, con ángulo  $\theta = \frac{\pi}{3}$ , los datos mediante

$$\begin{aligned}A_j &= x_j \cos(\theta) - y_j \sin(\theta) \\ P_j &= x_j \sin(\theta) + y_j \cos(\theta)\end{aligned}$$

y hacemos descenso sobre las variables  $a$  y  $\theta$ .

## EJEMPLO SINTÉTICO



# EXTENSIONES

- **Procesos no-autónomos (Markovianos)**

En este caso, tanto la matriz  $Q$  como el parámetro matricial  $A$  pueden depender del tiempo o de otras variables, de tal manera que la dinámica en la variedad reducida es

$$x_{j+1} = A_t x_j + b_t.$$

Se usa en procesos en los que sabemos que son periódicos o tienen una tendencia ascendente o descendente.

- **Procesos de órdenes superiores (no-Markovianos)**

En este caso la dinámica en la variedad reducida es

$$x_{j+1} = A_1 x_j + A_2 x_{j-1} + \cdots + A_p x_{j-p+1} + b.$$

Los parámetros  $A_1, \dots, A_r$ , al igual que  $Q$  y  $b$ , pueden también depender a la vez del tiempo o de otras variables.

# EXTENSIONES

- **Procesos no-autónomos (Markovianos)**

En este caso, tanto la matriz  $Q$  como el parámetro matricial  $A$  pueden depender del tiempo o de otras variables, de tal manera que la dinámica en la variedad reducida es

$$x_{j+1} = A_t x_j + b_t.$$

Se usa en procesos en los que sabemos que son periódicos o tienen una tendencia ascendente o descendente.

- **Procesos de órdenes superiores (no-Markovianos)**

En este caso la dinámica en la variedad reducida es

$$x_{j+1} = A_1 x_j + A_2 x_{j-1} + \cdots + A_p x_{j-p+1} + b.$$

Los parámetros  $A_1, \dots, A_r$ , al igual que  $Q$  y  $b$ , pueden también depender a la vez del tiempo o de otras variables.

# SUMARIO

- 1 ANÁLISIS DE COMPONENTES PRINCIPALES Y MODELOS AUTORREGRESIVOS
- 2 COMPONENTES PRINCIPALES DINÁMICAS
- 3 APLICACIÓN A TEMPERATURAS SUPERFICIALES GLOBALES DEL OCÉANO

# CONSIDERACIONES PRELIMINARES

Tratamos de buscar un modelo de **reducción dimensional dinámico** basado en temperaturas superficiales del océano a lo largo de 50 puntos en el rango de tiempo desde enero de 1854 a octubre de 2009 (COADS). Con este estudio sólo queremos mostrar que las nuevas componentes dinámicas modelizan con mejor exactitud que otros modelos lineales.

- Existen **otras variables** que influyen en el comportamiento de estas temperaturas superficiales, como la atmósfera, los continentes o la radiación solar. Estas variables las podemos incluir convenientemente en nuestro método de forma no-autónoma.
- Sabemos también que la superficie del océano depende de corrientes marinas y su mezcla con otras capas más profundas del océano. Esto lleva a pensar que el proceso puede ser **no-Markoviano**, es decir, el orden  $p$  es mayor que 1.

# CONSIDERACIONES PRELIMINARES

Tratamos de buscar un modelo de **reducción dimensional dinámico** basado en temperaturas superficiales del océano a lo largo de 50 puntos en el rango de tiempo desde enero de 1854 a octubre de 2009 (COADS). Con este estudio sólo queremos mostrar que las nuevas componentes dinámicas modelizan con mejor exactitud que otros modelos lineales.

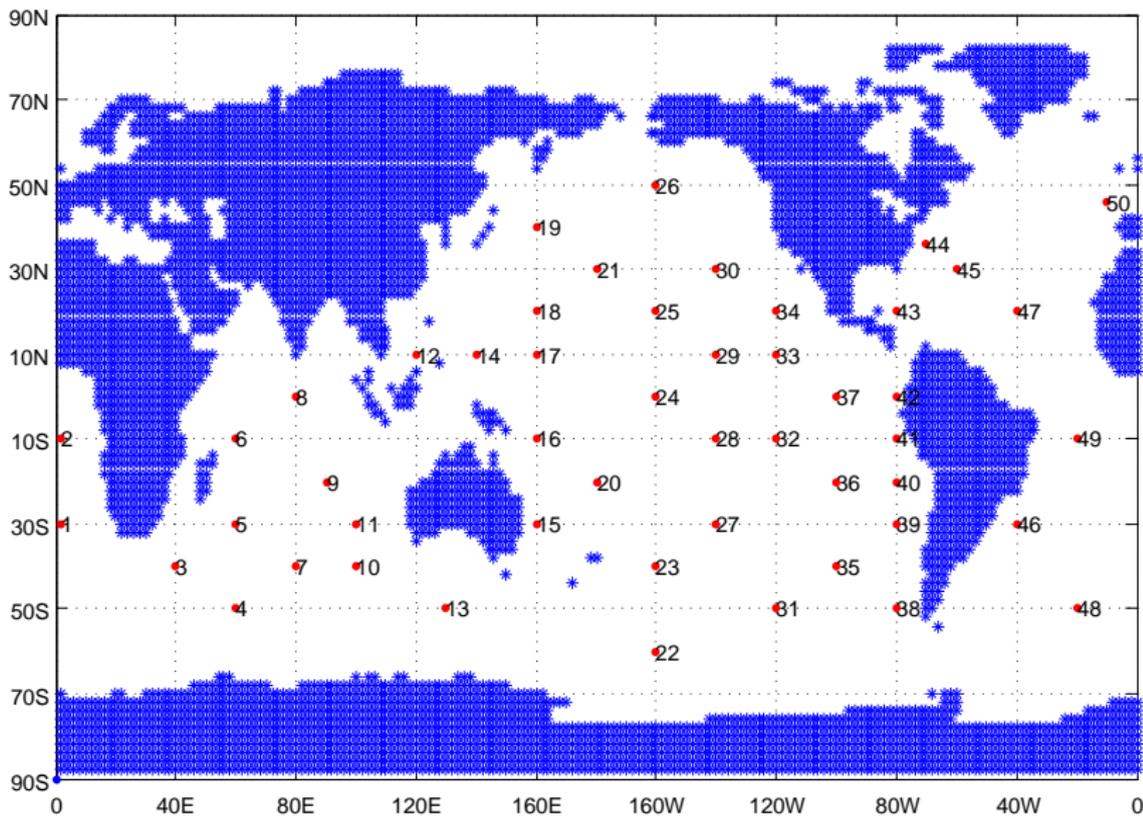
- Existen **otras variables** que influyen en el comportamiento de estas temperaturas superficiales, como la atmósfera, los continentes o la radiación solar. Estas variables las podemos incluir convenientemente en nuestro método de forma no-autónoma.
- Sabemos también que la superficie del océano depende de corrientes marinas y su mezcla con otras capas más profundas del océano. Esto lleva a pensar que el proceso puede ser **no-Markoviano**, es decir, el orden  $p$  es mayor que 1.

# CONSIDERACIONES PRELIMINARES

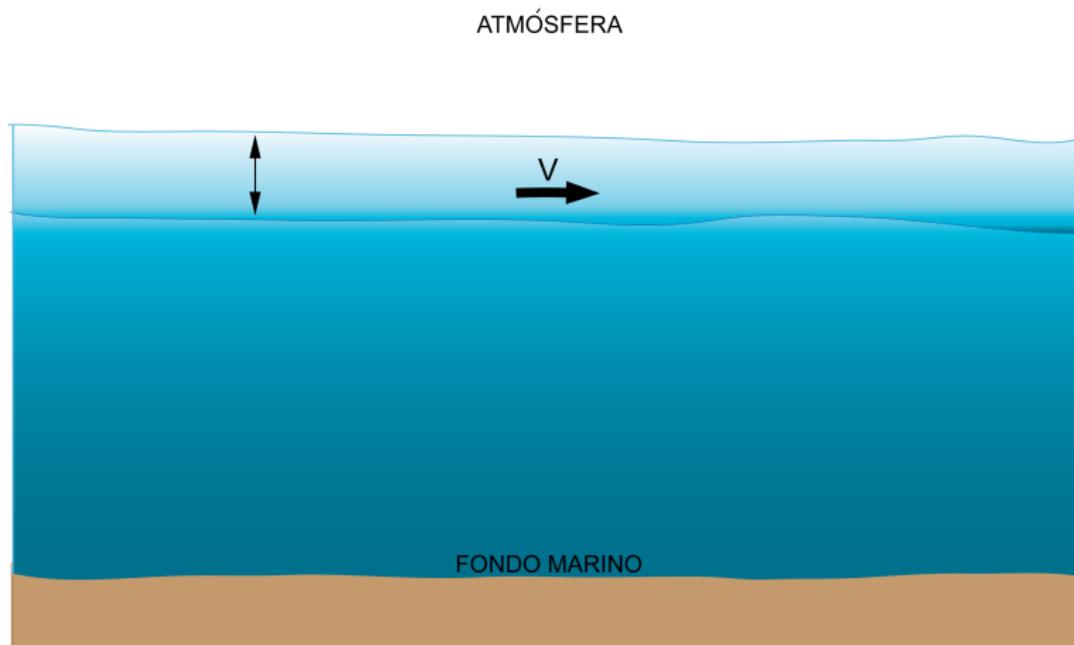
Tratamos de buscar un modelo de **reducción dimensional dinámico** basado en temperaturas superficiales del océano a lo largo de 50 puntos en el rango de tiempo desde enero de 1854 a octubre de 2009 (COADS). Con este estudio sólo queremos mostrar que las nuevas componentes dinámicas modelizan con mejor exactitud que otros modelos lineales.

- Existen **otras variables** que influyen en el comportamiento de estas temperaturas superficiales, como la atmósfera, los continentes o la radiación solar. Estas variables las podemos incluir convenientemente en nuestro método de forma no-autónoma.
- Sabemos también que la superficie del océano depende de corrientes marinas y su mezcla con otras capas más profundas del océano. Esto lleva a pensar que el proceso puede ser **no-Markoviano**, es decir, el orden  $p$  es mayor que 1.

# 50 PUNTOS EN EL OCÉANO



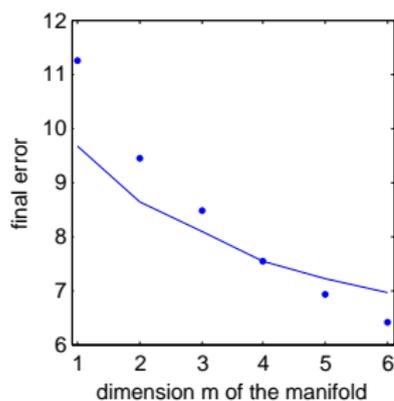
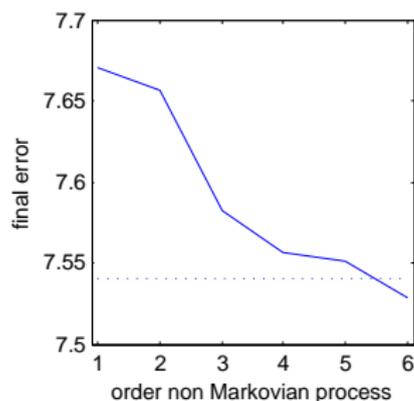
# ELECCIÓN DE LA DIMENSIÓN Y ORDEN DEL PROCESO



Orden del proceso:  $p = 3$

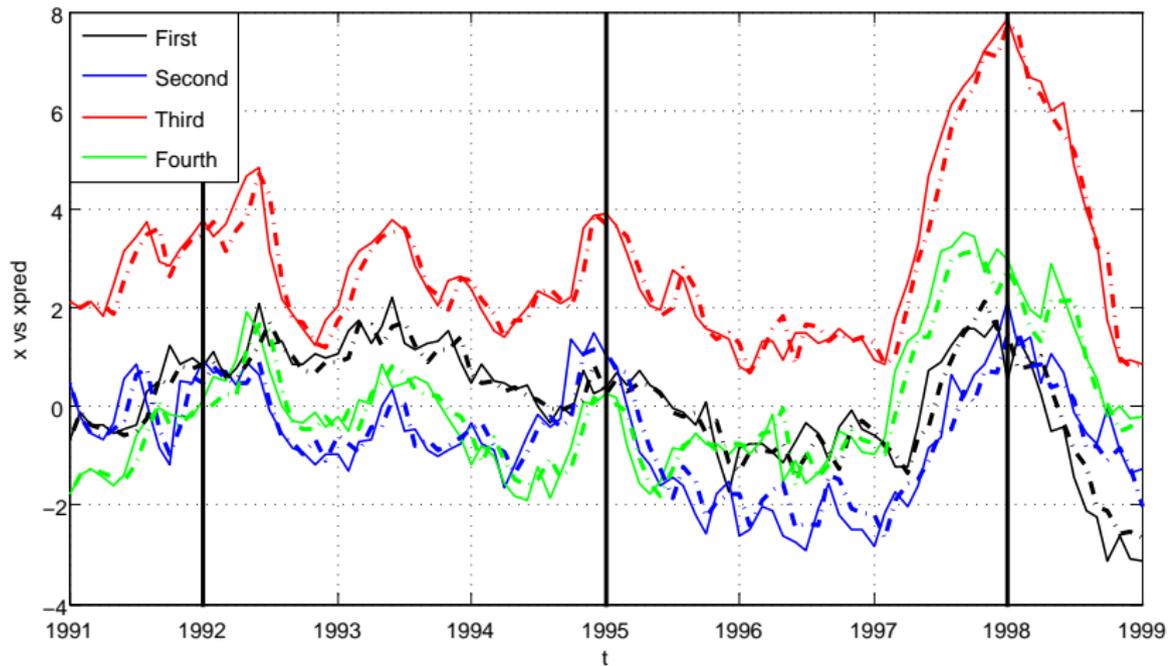
# ELECCIÓN DE LA DIMENSIÓN Y ORDEN DEL PROCESO

Hacemos un análisis previo de cómo evoluciona el error final si aumentamos el orden del proceso  $p$  y la dimensión de la subvariedad  $m$ .

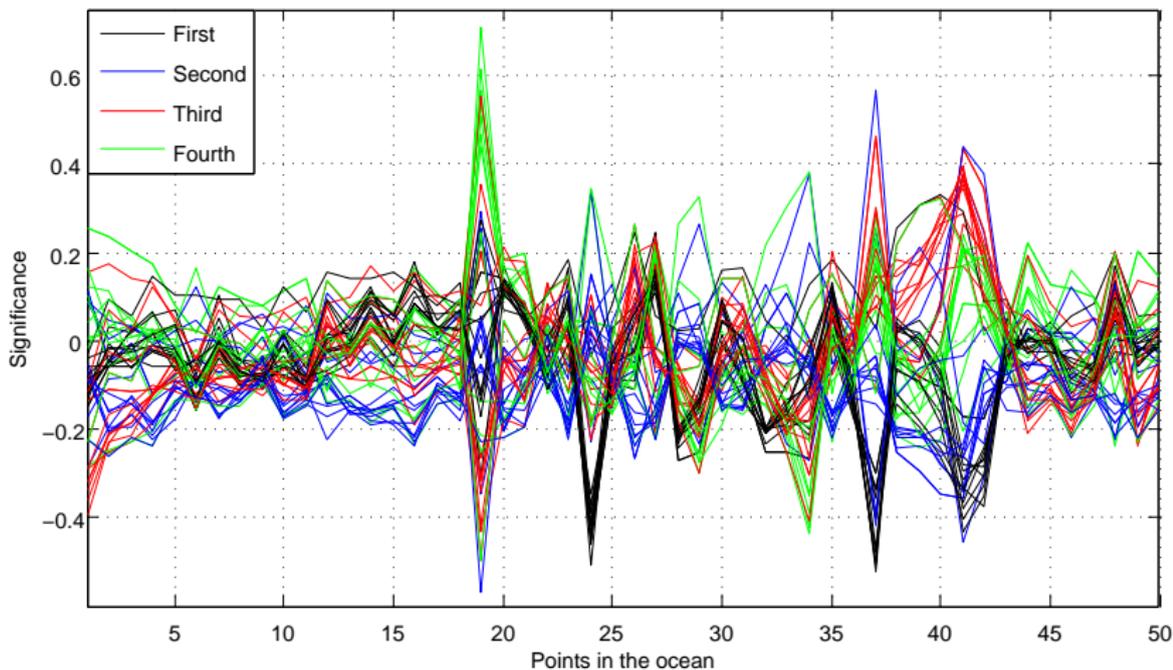


Observamos que la elección óptima se obtiene para  $p = 3$  y  $m = 4$ .

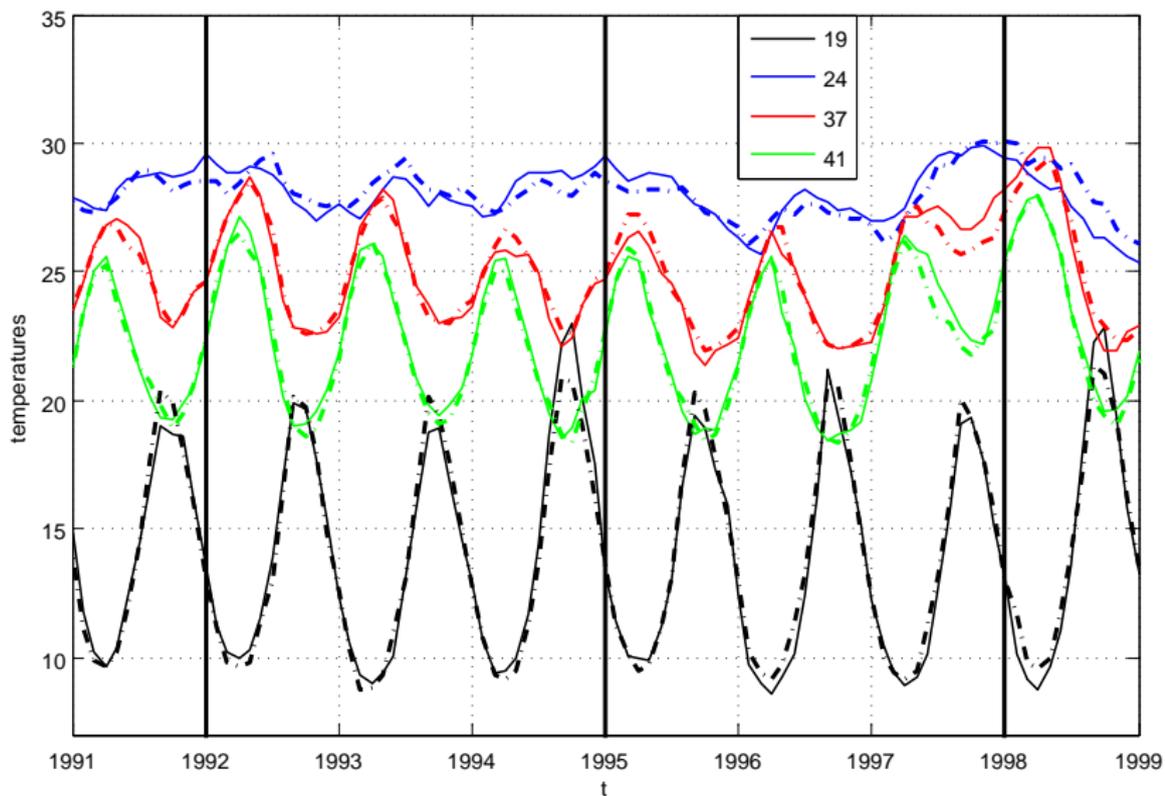
# COMPONENTES DINÁMICAS REALES Y PREDICHAS



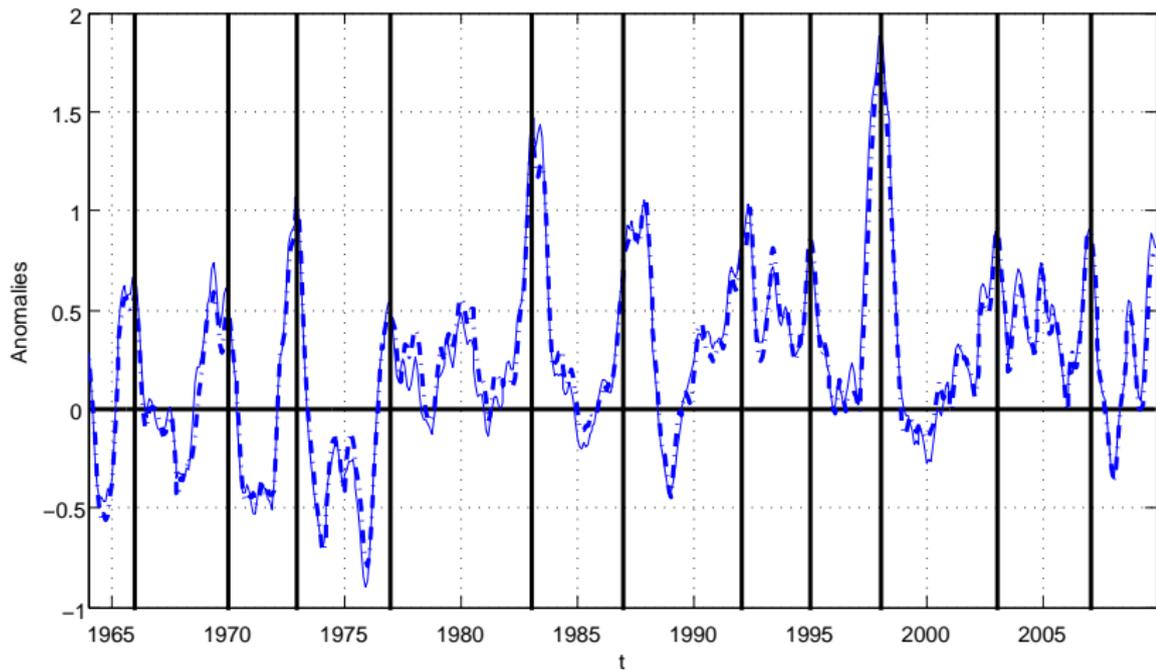
# PUNTOS DE MAYOR INFLUENCIA: 19, 24, 37 Y 41



# TEMPERATURAS REALES Y PREDICHAS



# ANOMALÍAS



# CONCLUSIONES

- La nueva metodología permite reducir la dimensión de una serie temporal buscando una subvariedad  $x$  y un modelo dinámico  $x_{j+1} = D(x_j, x_{j-1}, \dots, t)$  que minimiza el error de aproximación. La hemos aplicado tanto a ejemplos sintéticos como a situaciones reales.
- Una cuestión pendiente sería la **predicción futura** sin tener información de meses anteriores. En el caso de temperaturas del océano, después de tres meses, la predicción futura no es buena. Esto es debido a que existen muchas variables que modifican el modelo y que hacen que los parámetros no se ajusten a valores reales. Sin embargo, la predicción podría ser buena para algunos otros modelos donde no haya tanta variabilidad o volatilidad.
- Más información: M. D. de la Iglesia and E. G. Tabak, *Principal dynamical components*, Communications in Pure and Applied Mathematics, to appear (2012).

# CONCLUSIONES

- La nueva metodología permite reducir la dimensión de una serie temporal buscando una subvariedad  $x$  y un modelo dinámico  $x_{j+1} = D(x_j, x_{j-1}, \dots, t)$  que minimiza el error de aproximación. La hemos aplicado tanto a ejemplos sintéticos como a situaciones reales.
- Una cuestión pendiente sería la **predicción futura** sin tener información de meses anteriores. En el caso de temperaturas del océano, después de tres meses, la predicción futura no es buena. Esto es debido a que existen muchas variables que modifican el modelo y que hacen que los parámetros no se ajusten a valores reales. Sin embargo, la predicción podría ser buena para algunos otros modelos donde no haya tanta variabilidad o volatilidad.
- Más información: M. D. de la Iglesia and E. G. Tabak, *Principal dynamical components*. Communications in Pure and Applied Mathematics, to appear (2012).

# CONCLUSIONES

- La nueva metodología permite reducir la dimensión de una serie temporal buscando una subvariedad  $x$  y un modelo dinámico  $x_{j+1} = D(x_j, x_{j-1}, \dots, t)$  que minimiza el error de aproximación. La hemos aplicado tanto a ejemplos sintéticos como a situaciones reales.
- Una cuestión pendiente sería la **predicción futura** sin tener información de meses anteriores. En el caso de temperaturas del océano, después de tres meses, la predicción futura no es buena. Esto es debido a que existen muchas variables que modifican el modelo y que hacen que los parámetros no se ajusten a valores reales. Sin embargo, la predicción podría ser buena para algunos otros modelos donde no haya tanta variabilidad o volatilidad.
- Más información: M. D. de la Iglesia and E. G. Tabak, *Principal dynamical components*, Communications in Pure and Applied Mathematics, to appear (2012).