Cuando los datos engañan

Matemáticas en la Sociedad

Omar Antolín Camarena
IMATE UNAM - CDMX

Paradojas

Una *paradoja* es una afirmación aparentemente absurda o contradictoria

Paradojas

Una *paradoja* es una afirmación aparentemente absurda o contradictoria que al ser investigada o explicada puede resultar estar bien fundada, o ser cierta.

Efecto de Will Rogers

¿Puede mover un número de un conjunto a otro subir el promedio de ambos conjuntos?

Efecto de Will Rogers

¿Puede mover un número de un conjunto a otro subir el promedio de ambos conjuntos?

¡Sí! Por ejemplo mover el 100 de $\{100, 200, 300\}$ a $\{1, 2, 3, 4\}$.

Efecto de Will Rogers

¿Puede mover un número de un conjunto a otro subir el promedio de ambos conjuntos?

¡Sí! Por ejemplo mover el 100 de $\{100, 200, 300\}$ a $\{1, 2, 3, 4\}$.

Pero el promedio de todos los números juntos, desde luego, no ha cambiado.

Efecto de Will Rogers

Alvan R. Feinstein, Daniel M. Sosin, Carolyn K. Wells, M.P.H., *The Will Rogers Phenomenon — Stage Migration and New Diagnostic Techniques as a Source of Misleading Statistics for Survival in Cancer*

Efecto de Will Rogers

Alvan R. Feinstein, Daniel M. Sosin, Carolyn K. Wells, M.P.H., *The Will Rogers Phenomenon — Stage Migration and New Diagnostic Techniques as a Source of Misleading Statistics for Survival in Cancer*

Mejoras en la detección de cáncer hacen que se detecte más temprano; algunas personas que se clasificaban antes como etapa 2, ahora se clasifican como etapa 3, por ejemplo.

Efecto de Will Rogers

Alvan R. Feinstein, Daniel M. Sosin, Carolyn K. Wells, M.P.H., *The Will Rogers Phenomenon — Stage Migration and New Diagnostic Techniques as a Source of Misleading Statistics for Survival in Cancer*

Mejoras en la detección de cáncer hacen que se detecte más temprano; algunas personas que se clasificaban antes como etapa 2, ahora se clasifican como etapa 3, por ejemplo.

Esto mejora la supervivencia de ambos grupos porque típicamente los que antes se consideraban erróneamente etapa 2 eran los más graves de esa etapa y están entre los menos graves de la etapa 3.

Efecto de Will Rogers

¿Cuándo mover a x de A a B aumenta ambos promedio?

Efecto de Will Rogers

¿Cuándo mover a x de A a B aumenta ambos promedio?

$$m := |A|, \quad p := \frac{1}{m} \sum_{a \in A} a$$

Efecto de Will Rogers

¿Cuándo mover a x de A a B aumenta ambos promedio?

$$m := |A|, \quad p := \frac{1}{m} \sum_{a \in A} a$$

$$\mathrm{Prom}(A \setminus \{x\}) = \frac{mp - x}{m - 1}.$$

Efecto de Will Rogers

¿Cuándo mover a x de A a B aumenta ambos promedio?

$$m := |A|, \quad p := \frac{1}{m}\sum_{a\in A} a$$

$$\mathrm{Prom}(A \setminus \{x\}) = \frac{mp - x}{m-1}.$$

$$\frac{mp - x}{m-1} > p$$
$$\iff mp - x > (m-1)p$$
$$\iff p > x$$

Efecto de Will Rogers

¿Cuándo mover a x de A a B aumenta ambos promedio?

$$m := |A|, \quad p := \frac{1}{m}\sum_{a\in A} a \qquad n := |B| \quad q := \frac{1}{n}\sum_{b\in B} b$$

$$\mathrm{Prom}(A \setminus \{x\}) = \frac{mp - x}{m-1}.$$

$$\begin{aligned} & \frac{mp-x}{m-1} > p \\ \iff & mp - x > (m-1)p \\ \iff & p > x \end{aligned}$$

Efecto de Will Rogers

¿Cuándo mover a x de A a B aumenta ambos promedio?

$$m := |A|, \quad p := \frac{1}{m}\sum_{a\in A} a \qquad n := |B| \quad q := \frac{1}{n}\sum_{b\in B} b$$

$$\mathrm{Prom}(A \setminus \{x\}) = \frac{mp - x}{m-1}. \qquad \mathrm{Prom}(B \cup \{x\}) = \frac{nq + x}{n+1}.$$

$$\begin{aligned} & \frac{mp - x}{m-1} > p \\ \iff & mp - x > (m-1)p \\ \iff & p > x \end{aligned}$$

Efecto de Will Rogers

¿Cuándo mover a x de A a B aumenta ambos promedio?

$$m := |A|, \quad p := \frac{1}{m} \sum_{a \in A} a \qquad n := |B| \quad q := \frac{1}{n} \sum_{b \in B} b$$

$$\mathrm{Prom}(A \setminus \{x\}) = \frac{mp - x}{m - 1}. \qquad \mathrm{Prom}(B \cup \{x\}) = \frac{nq + x}{n + 1}.$$

$$\frac{mp - x}{m - 1} > p$$
$$\iff mp - x > (m - 1)p$$
$$\iff p > x$$

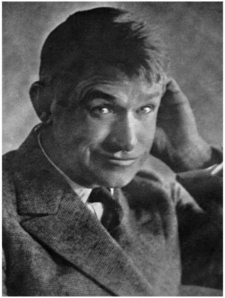
$$\frac{nq + x}{n + 1} > q$$
$$\iff np - x > (n + 1)p$$
$$\iff x > q$$

Efecto de Will Rogers

¿Pero por qué el nombre?

Efecto de Will Rogers

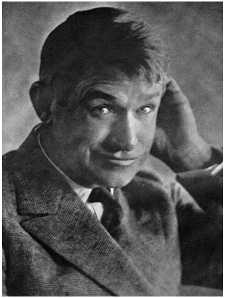
¿Pero por qué el nombre?



Fotografía por Melbourne Spurr, *Filmplay Journal* (1922).

Efecto de Will Rogers

¿Pero por qué el nombre?

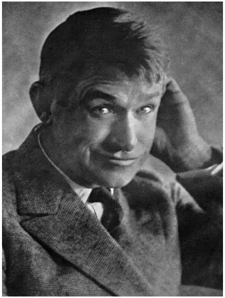


Fotografía por Melbourne Spurr, *Filmplay Journal* (1922).

Will Rogers fue un comediante de vaudeville, escritor cómico y actor de cine en los 1920s y 1930s en Estados Unidos. Hizo 71 películas de las cuales 50 eran mudas. Tenía una columna humorística de periódico muy popular, que se publicaba nacionalmente.

Efecto de Will Rogers

¿Pero por qué el nombre?

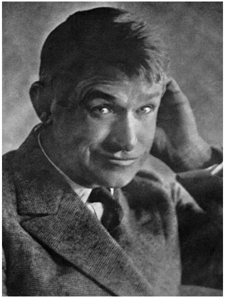


Fotografía por Melbourne Spurr, *Filmplay Journal* (1922).

Will Rogers fue un comediante de vaudeville, escritor cómico y actor de cine en los 1920s y 1930s en Estados Unidos. Hizo 71 películas de las cuales 50 eran mudas. Tenía una columna humorística de periódico muy popular, que se publicaba nacionalmente. Era cheroqui.

Efecto de Will Rogers

¿Pero por qué el nombre?



Fotografía por Melbourne Spurr, *Filmplay Journal* (1922).

Will Rogers fue un comediante de vaudeville, escritor cómico y actor de cine en los 1920s y 1930s en Estados Unidos. Hizo 71 películas de las cuales 50 eran mudas. Tenía una columna humorística de periódico muy popular, que se publicaba nacionalmente. Era cheroqui.

"When the Okies left Oklahoma and moved to California, they raised the average intelligence level in both states."

Falacia de la frecuencia base

Supongamos que un alcoholímetro siempre detecta a un conductor ebrio, pero que el 5% de las veces erróneamente indica que un conductor sobrio está ebrio.

Falacia de la frecuencia base

Supongamos que un alcoholímetro siempre detecta a un conductor ebrio, pero que el 5% de las veces erróneamente indica que un conductor sobrio está ebrio.

Supongamos que uno de cada 1000 conductores está ebrio.

Falacia de la frecuencia base

Supongamos que un alcoholímetro siempre detecta a un conductor ebrio, pero que el 5% de las veces erróneamente indica que un conductor sobrio está ebrio.

Supongamos que uno de cada 1000 conductores está ebrio.

Si la policía detiene un conductor al azar y el alcoholímetro indica que está ebrio, ¿cuál es la probabilidad de que de hecho esté ebrio?

Falacia de la frecuencia base

Supongamos que un alcoholímetro siempre detecta a un conductor ebrio, pero que el 5% de las veces erróneamente indica que un conductor sobrio está ebrio.

Supongamos que uno de cada 1000 conductores está ebrio.

Si la policía detiene un conductor al azar y el alcoholímetro indica que está ebrio, ¿cuál es la probabilidad de que de hecho esté ebrio?

95%, ¿no?

Falacia de la frecuencia base

Hagamos las cuentas:

Falacia de la frecuencia base

Hagamos las cuentas:

Si la policía le hiciera la prueba del alcoholímetro a 1000 conductores habría en promedio:

- 1 ebrio, que el alcoholímetro correctamente identificaría como ebrio,

Falacia de la frecuencia base

Hagamos las cuentas:

Si la policía le hiciera la prueba del alcoholímetro a 1000 conductores habría en promedio:

- 1 ebrio, que el alcoholímetro correctamente identificaría como ebrio,
- 999 conductores sobrios, de los cuales 5%, o sea 49.95 en promedio, serían falsamente indicados como ebrios por el alcoholímetro.

Falacia de la frecuencia base

Hagamos las cuentas:

Si la policía le hiciera la prueba del alcoholímetro a 1000 conductores habría en promedio:

- 1 ebrio, que el alcoholímetro correctamente identificaría como ebrio,
- 999 conductores sobrios, de los cuales 5%, o sea 49.95 en promedio, serían falsamente indicados como ebrios por el alcoholímetro.

O sea que solo $1/50.95 = 1.96\%$ de los que el alcoholímetro indica que están ebrios de hecho lo están.

Falacia de la frecuencia base

Rehagamos las cuentas suponiendo que 1 de cada 10 conductores está ebrio:

Falacia de la frecuencia base

Rehagamos las cuentas suponiendo que 1 de cada 10 conductores está ebrio:

Si la policía le hiciera la prueba del alcoholímetro a 1000 conductores habría en promedio:

- 100 ebrios, que el alcoholímetro correctamente identificaría como ebrios,

Falacia de la frecuencia base

Rehagamos las cuentas suponiendo que 1 de cada 10 conductores está ebrio:

Si la policía le hiciera la prueba del alcoholímetro a 1000 conductores habría en promedio:

- 100 ebrios, que el alcoholímetro correctamente identificaría como ebrios,
- 900 conductores sobrios, de los cuales 5%, o sea 45 en promedio, serían falsamente indicados como ebrios por el alcoholímetro.

Falacia de la frecuencia base

Rehagamos las cuentas suponiendo que 1 de cada 10 conductores está ebrio:

Si la policía le hiciera la prueba del alcoholímetro a 1000 conductores habría en promedio:

- 100 ebrios, que el alcoholímetro correctamente identificaría como ebrios,
- 900 conductores sobrios, de los cuales 5%, o sea 45 en promedio, serían falsamente indicados como ebrios por el alcoholímetro.

Entonces $100/145 = 68\%$ de los que el alcoholímetro indica que están ebrios, sí lo están.

Falacia de la frecuencia base

Podemos expresar el probema del alcoholímetro usando *probabilidad condicional*: la probabilidad de que ocurra A dado que B ocurrió es

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Falacia de la frecuencia base

Podemos expresar el probema del alcoholímetro usando *probabilidad condicional*: la probabilidad de que ocurra A dado que B ocurrió es

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Usaremos los siguientes eventos:

- E: el conductor realmente está Ebrio
- P: la prueba del alcoholímetro sale Positiva, es decir, indica ebriedad.

Falacia de la frecuencia base

Los datos del primer ejemplo del alcoholímetro son:

- El alcoholímetro siempre detecta a un conductor ebrio: $\mathbb{P}(P|E) = 1$.

Falacia de la frecuencia base

Los datos del primer ejemplo del alcoholímetro son:

- El alcoholímetro siempre detecta a un conductor ebrio: $\mathbb{P}(P|E) = 1$.
- El alcoholímetro indica que el conductor está ebrio en un 5% de los casos en los que el conductor está sobrio $\mathbb{P}(P|\neg E) = 0.05$.

Falacia de la frecuencia base

Los datos del primer ejemplo del alcoholímetro son:

- El alcoholímetro siempre detecta a un conductor ebrio: $\mathbb{P}(P|E) = 1$.
- El alcoholímetro indica que el conductor está ebrio en un 5% de los casos en los que el conductor está sobrio $\mathbb{P}(P|\neg E) = 0.05$.
- Uno de cada mil conductores está ebrio $\mathbb{P}(E) = 0.001$.

La pregunta era: dado que el alcoholímetro indica que un conductor está ebrio, ¿cual es la probabilidad de que éste ebrio?

Falacia de la frecuencia base

Los datos del primer ejemplo del alcoholímetro son:

- El alcoholímetro siempre detecta a un conductor ebrio: $\mathbb{P}(P|E) = 1$.
- El alcoholímetro indica que el conductor está ebrio en un 5% de los casos en los que el conductor está sobrio $\mathbb{P}(P|\neg E) = 0.05$.
- Uno de cada mil conductores está ebrio $\mathbb{P}(E) = 0.001$.

La pregunta era: dado que el alcoholímetro indica que un conductor está ebrio, ¿cual es la probabilidad de que éste ebrio? O sea, ¿cuánto es $\mathbb{P}(E|P)$?

Falacia de la frecuencia base

El teorema de Bayes dice:

$$\mathbb{P}(E|P) = \frac{\mathbb{P}(P|E)\mathbb{P}(E)}{\mathbb{P}(P)}.$$

Falacia de la frecuencia base

El teorema de Bayes dice:

$$\mathbb{P}(E|P) = \frac{\mathbb{P}(P|E)\mathbb{P}(E)}{\mathbb{P}(P)}.$$

Necesitamos saber $\mathbb{P}(P)$, la probabilidad de que el alcoholímetro indique ebriedad:

Falacia de la frecuencia base

El teorema de Bayes dice:

$$\mathbb{P}(E|P) = \frac{\mathbb{P}(P|E)\mathbb{P}(E)}{\mathbb{P}(P)}.$$

Necesitamos saber $\mathbb{P}(P)$, la probabilidad de que el alcoholímetro indique ebriedad:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(P) &= \mathbb{P}(P|E)\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(P|\neg E)\mathbb{P}(\neg E) \\ &= 1 \times 0.001 + 0.05 \times 0.999 = 0.05095\end{aligned}$$

Falacia de la frecuencia base

El teorema de Bayes dice:

$$\mathbb{P}(E|P) = \frac{\mathbb{P}(P|E)\mathbb{P}(E)}{\mathbb{P}(P)}.$$

Necesitamos saber $\mathbb{P}(P)$, la probabilidad de que el alcoholímetro indique ebriedad:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(P) &= \mathbb{P}(P|E)\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(P|\neg E)\mathbb{P}(\neg E)\\ &= 1 \times 0.001 + 0.05 \times 0.999 = 0.05095\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mathbb{P}(E|P) = 1 \times 0.001/0.05095 \approx 0.0196.$$

Falacia de la frecuencia base

Supongamos que uno de cada 1000 conductores está ebrio.

Falacia de la frecuencia base

Supongamos que uno de cada 1000 conductores está ebrio.

Supongamos que un alcoholímetro siempre detecta a un conductor ebrio, pero que de los 999 conductores sobrios, el alcoholímetro erróneamente indica que ≈ 50 de ellos están ebrios.

Falacia de la frecuencia base

Supongamos que uno de cada 1000 conductores está ebrio.

Supongamos que un alcoholímetro siempre detecta a un conductor ebrio, pero que de los 999 conductores sobrios, el alcoholímetro erróneamente indica que ≈ 50 de ellos están ebrios.

Si la policía detiene un conductor al azar y el alcoholímetro indica que está ebrio, ¿cuál es la probabilidad de que de hecho esté ebrio?

Falacia de la frecuencia base

Supongamos que uno de cada 1000 conductores está ebrio.

Supongamos que un alcoholímetro siempre detecta a un conductor ebrio, pero que de los 999 conductores sobrios, el alcoholímetro erróneamente indica que ≈ 50 de ellos están ebrios.

Si la policía detiene un conductor al azar y el alcoholímetro indica que está ebrio, ¿cuál es la probabilidad de que de hecho esté ebrio?

$\approx 1/51$, ¿no?

Paradoja de Berkson

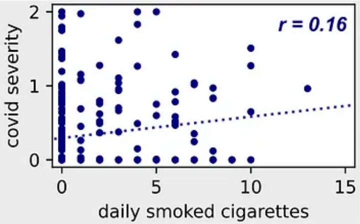
Se ha reportado que entre pacientes hospitalizados, hay una correlación negativa entre la severidad de los síntomas de COVID-19 y la cantidad de cigarros que fuman por día.

Paradoja de Berkson

Se ha reportado que entre pacientes hospitalizados, hay una correlación negativa entre la severidad de los síntomas de COVID-19 y la cantidad de cigarros que fuman por día. ¿Qué no fumar es un factor de riesgo para las enfermedades respiratorias?

Paradoja de Berkson

Se ha reportado que entre pacientes hospitalizados, hay una correlación negativa entre la severidad de los síntomas de COVID-19 y la cantidad de cigarros que fuman por día. ¿Qué no fumar es un factor de riesgo para las enfermedades respiratorias?



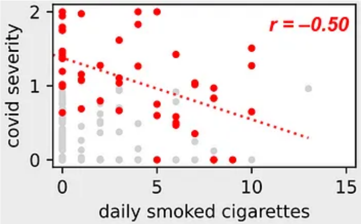


Imagen de Francesco Casalegno

Paradoja de Berkson

Podemos usar de nuevo la probabilidad condicional para analizar el fenómeno.

Paradoja de Berkson

Podemos usar de nuevo la probabilidad condicional para analizar el fenómeno.

Supongamos que A y B son eventos independientes, o sea que $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$.

Paradoja de Berkson

Podemos usar de nuevo la probabilidad condicional para analizar el fenómeno.

Supongamos que A y B son eventos independientes, o sea que $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$.

Ahora afirmo que, condicionados al evento $A \cup B$ no son independientes.

Paradoja de Berkson

Podemos usar de nuevo la probabilidad condicional para analizar el fenómeno.

Supongamos que A y B son eventos independientes, o sea que $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$.

Ahora afirmo que, condicionados al evento $A \cup B$ no son independientes.

$$\mathbb{P}(A|A \cup B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap (A \cup B))}{\mathbb{P}(A \cup B)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A \cup B)} > \mathbb{P}(A).$$

Paradoja de Simpson

	Full Population, N = 52			Men (M), N = 20			Women (¬M), N = 32		
	Success (S)	Failure (¬S)	Success Rate	Success	Failure	Success Rate	Success	Failure	Success Rate
Treatment (T)	20	20	50%	8	5	≈ 61%	12	15	≈ 44%
Control (¬T)	6	6	50%	4	3	≈ 57%	2	3	≈ 40%

Datos originales de Edward Simpson, tabla de la *Stanford Encyclopedia of Philosophy*

Paradoja de Simpson

Admisiones a posgrados en la Universidad de Berkeley, California en otoño de 1973.

	Solicitudes	**Admisiones**
Hombres	8442	**44%**
Mujeres	4321	35%

Paradoja de Simpson

Admisiones a posgrados en la Universidad de Berkeley, California en otoño de 1973.

Departamento	Hombres		Mujeres	
	Solicitudes	Admisiones	Solicitudes	Admisiones
A	825	62%	108	**82%**
B	560	63%	25	**68%**
C	325	**37%**	593	34%
D	417	33%	375	**35%**
E	191	**28%**	393	24%
F	272	6%	341	**7%**

Paradoja de Simpson

C R Charig, D R Webb, S R Payne, J E Wickham, *Comparison of treatment of renal calculi by open surgery, percutaneous nephrolithotomy, and extracorporeal shockwave lithotripsy*

	Tratamiento A	**Tratamiento B**
Cálculos pequeños	*Grupo 1* **93% (81/87)**	*Grupo 2* 87% (234/270)
Cálculos grandes	*Grupo 3* **73% (192/263)**	*Grupo 4* 69% (55/80)
Global	78% (273/350)	**83% (289/350)**