El grupo modular: el caso no orientable

Duodećima Jornada de Geometría, Topología y Dinámica

Sandy Guadalupe Aguilar Rojas

21 de junio del 2024

CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

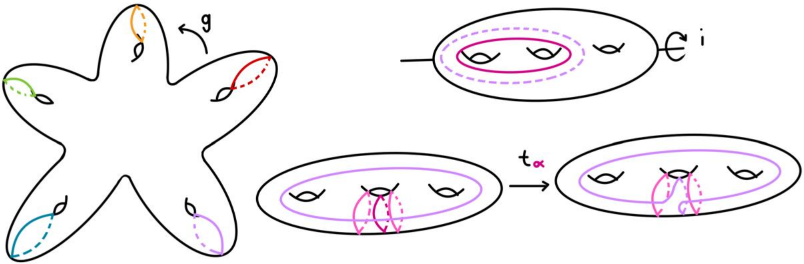
El grupo modular

Definición

Dada Σ una superficie, el **grupo modular** de Σ se define como

$$Map(\Sigma) := Homeo(\Sigma)/\text{isotopía}.$$

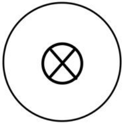
Si Σ es orientable, a $Map(\Sigma)$ se le suele llamar el **grupo modular extendido** de Σ.

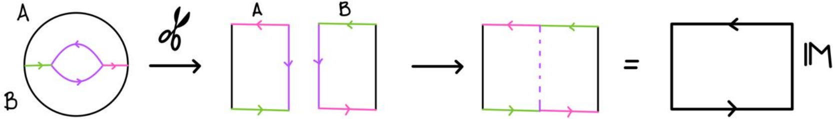


Superficies no orientables

Definición

Un **crosscap** es una representación gráfica de una banda de Möbius.





Superficies no orientables

Sea N una superficie conexa no orientable de género $g \geq 1$ con $c \geq 0$ componentes de frontera.

Consideramos una superficie orientable S de género h con $c + k$ componentes de frontera tal que

$$2h + k = g \quad \text{y} \quad k \geq 1.$$

Podemos representar a N intercambiando k componentes de frontera de S por crosscaps.

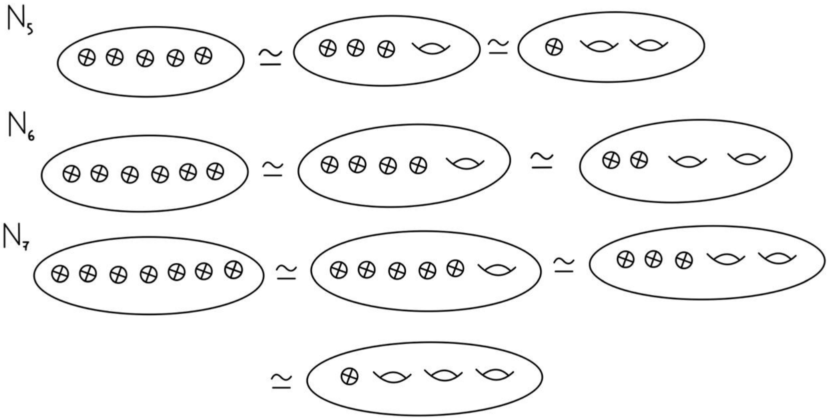
Ejemplo

Sea $N = N_5^0$, entonces $g = 5$ y $c = 0$.
Si $2h + k = 5$ y $k \geq 1$, entonces

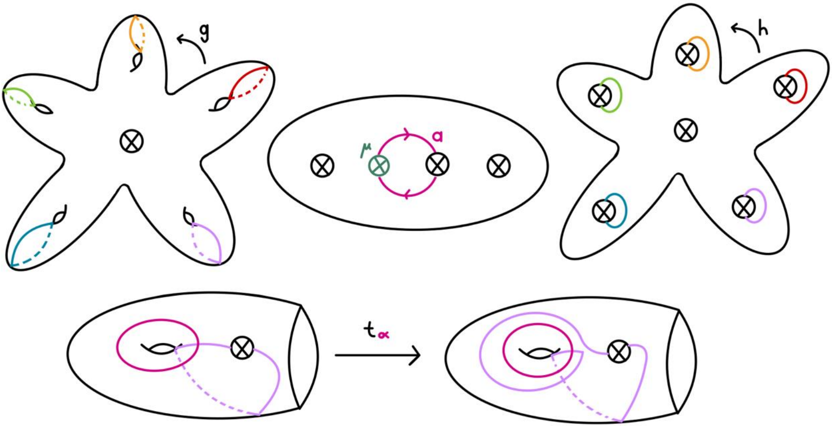
$$(h, k) \in \{(0, 5), (1, 3), (2, 1)\}.$$

Así, $S \in \{S_0^5, S_1^3, S_2^1\}$.

Superficies no orientables



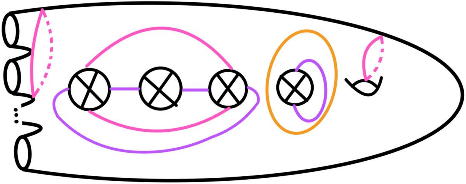
Elementos de $Map(N)$



Curvas en superficies no orientables

Definición

Una curva cerrada simple α en N es **esencial** si es no trivial, no periferal y no acota una banda de Möbius.



Definición

Una curva esencial α es

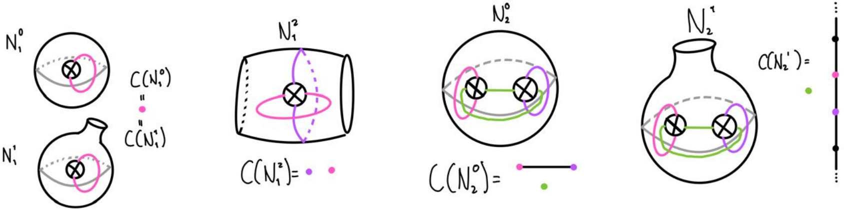
- **de dos lados** si una vecindad de α es un anillo.
- **de un lado** si una vecindad de α es una banda de Möbius.

El complejo de curvas

Definición

El **complejo de curvas** de una superficie Σ, $\mathcal{C}(\Sigma)$, se define como el complejo simplicial abstracto dado por la siguiente información.

- **Vértices:** clases de isotopía de curvas esenciales en Σ.
- **Simplejos:** un conjunto de vértices $\{\alpha_0, \ldots, \alpha_n\}$ es un n-simplejo si los elementos de dicho conjunto son disjuntos por parejas.



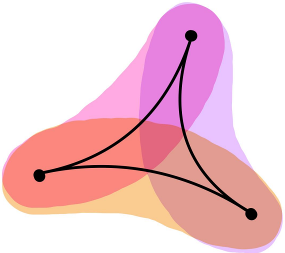
El complejo de curvas

Teorema

Sea N una superficie no orientable, conexa y compacta de género $g \geq 1$ y $n \geq 0$ componentes de frontera. Si $\frac{3}{2}g + n > 5$, entonces $\mathcal{C}_1(N)$ es conexo.

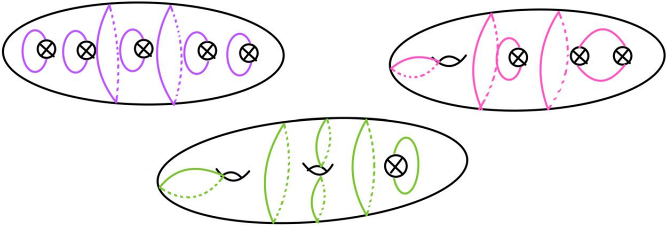
Teorema (Erika Kuno, [Kun16])

Sea N una superficie no orientable, conexa y compacta de género $g \geq 1$ y $n \geq 0$ componentes de frontera. Si $\mathcal{C}_1(N)$ es conexo, entonces es 17-hiperbólico.



Definición

A los simplejos de $\mathcal{C}(N)$ de dimensión maximal se les llama **descomposiciones en pantalones**.



Proposición (Ver [AK14])

Sea $N = N_g^c$ con $(g, c) \neq (2, 0)$. Si $g = 2r + 1$ tomamos $a_r = 3r + c - 2$ y $b_r = 4r + c - 2$, si $g = 2r$ tomamos $a_r = 3r + c - 4$ y $b_r = 4r + c - 4$. Existe un simplejo maximal de dimensión q en $\mathcal{C}(N)$ si y sólo si $a_r < q < b_r$.

La acción de $Map(N)$ en $\mathcal{C}_1(N)$

$Map(N)$ actúa en $\mathcal{C}_1(N)$:

$$
\begin{array}{rcll}
Map(N) \times \mathcal{C}_1(N) & \to & \mathcal{C}(N) & \\
(g, \alpha) & \mapsto & g(\alpha): & [0,1] \to N \\
 & & & x \mapsto g \circ \alpha(x)
\end{array}
$$

Observación

$Map(N)$ actúa en $\mathcal{C}_1(N)$ por isometrías.

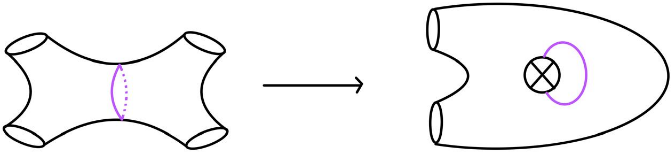
Observación

$Map(N)$ no es cuasiisométrico a $\mathcal{C}_1(N)$.

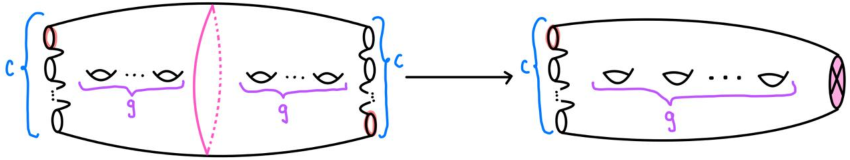
La doble cubierta orientable

Definición

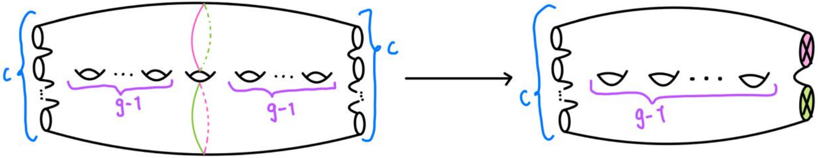
Sea $N = N_g^c$. Existe una única superficie orientable $\widetilde{N}$ tal que $\widetilde{N} \to N$ es una aplicación cubriente con $\mathbb{Z}_2$ actúa en $\widetilde{N}$ y $N = \widetilde{N}/\mathbb{Z}_2$.
A dicha superficie se le llama la **doble cubierta orientable** de N.



- Caso $N = N^{c}_{2g+1} \Rightarrow \tilde{N} = S^{2c}_{2g}$



- Caso $N = N^{c}_{2g} \Rightarrow \tilde{N} = S^{2c}_{2g-1}$



La doble cubierta orientable

Teorema (Kuno y Katayama [KK24])

Sea N una superficie conexa compacta no orientable de género $g \geq 1$ y $n \geq 0$ componentes de frontera, y $\widetilde{N}$ su doble cubierta orientable. Si $(g, n) \neq (2, 0)$, entonces $Map(N)$ está cuasiisométricamente encajado en $Map(\widetilde{N})$.

Observación

$Map(N)$ actúa en $\mathcal{C}_1(\widetilde{N})$ por isometrías.

Observación

$Map(N)$ no es cuasiisométrico a $\mathcal{C}_1(\widetilde{N})$.

La acción de $Map(N)$ en $\mathcal{C}_1(\widetilde{N})$

Definición

Sea G un grupo actuando en un espacio X. Se dice que la acción es **WPD** si se satisface lo siguiente:

- G no es virtualmente cíclico,
- G contiene al menos un elemento $g \in G$ que actúa en X como una isometría hiperbólica, y
- para todo elemento hiperbólico $g \in G$, todo elemento $x \in X$ y toda $C > 0$ existe $n > 0$ tal que el conjunto

  $$\{\gamma \in G | d_X(x, \gamma x) \leq C, d_X(g^n x, \gamma g^n x) \leq C\}$$

  es finito.

Proposición (Ver [Sha10])

La acción de $Map(N)$ en $\mathcal{C}_1(\widetilde{N})$ es WPD.

La acción de $Map(N)$ en $\mathcal{C}_1(N)$

Proposición

Existe una función calculable $F\colon \mathbb{N}^4 \to \mathbb{N}$ tal que se satisface lo siguiente: Sea $N = N_g^c$ una superficie no orientable tal que $\frac{3}{2}g + c \geq 5$ y $r \in \mathbb{Z}$ no negativo. Entonces para cualesquiera dos curvas α y β tales que

$$d_{\mathcal{C}_1(N)}(\alpha, \beta) \geq 70r + 5,$$

el número de elementos $h \in Map(N)$ que satisfacen

$$d_{\mathcal{C}_1(N)}(\alpha, h\alpha) \leq r \qquad \text{y} \qquad d_{\mathcal{C}_1(N)}(\beta, h\beta) \leq r$$

está acotado por arriba por $F(\iota(\alpha, \beta), r, g, c)$.

Observación

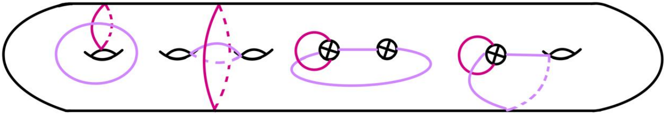
La acción de $Map(N)$ en $\mathcal{C}_1(N)$ es WPD.

El complejo de marcas

Sea N una superficie no orientable tal que $N \notin \{N_1^0, N_1^1, N_2^0\}$.

Definición

Dada $\alpha \in \mathcal{C}_0(N)$, una **curva transversal limpia** para α es una curva $\beta \in \mathcal{C}_0(N)$ tal que la vecindad regular $N(\alpha \cup \beta)$ de $\alpha \cup \beta$ es tal que $N(\alpha \cup \beta) \in \{S_1^1, S_0^4, N_2^1, N_1^2\}$.

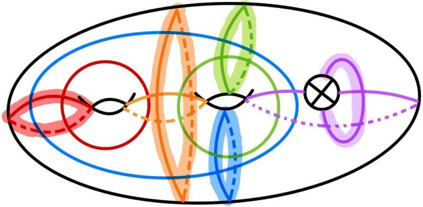


Definición

Una **marca** en N es una conjunto

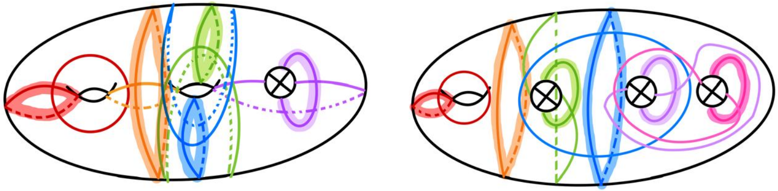
$$\mu = \{(\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_n, \beta_n)\}$$

tal que $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ es una descomposición en pantalones y β_i es una curva transversal limpia para α_i para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.
A las curvas en $base(\mu) := \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ les llamaremos **curvas base** y a las curvas en $trans(\mu) := \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ **curvas transversales**.



Observación

Dos marcas de una misma superficie pueden tener cardinalidades diferentes.



Definición

Una **marca limpia** en N es una marca $\mu = \{(\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_n, \beta_n)\}$ tal que $\iota(\alpha_i, \beta_j) = 0$ siempre que $i \neq j$.

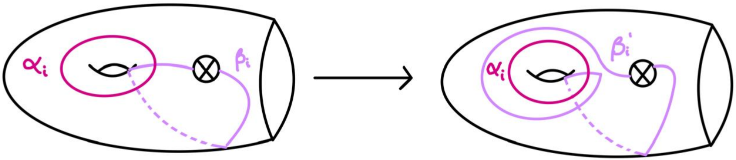
Movimientos de marcas

Dada una marca $\mu = \{(\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_n, \beta_n)\}$. Se definen los siguientes movimientos de marcas.

Definición

- **Giro:** Para un $i \in \{1, \dots, n\}$ fijo. Si α_i es una curva de dos lados, reemplazamos a β_i por el giro de Dehn de β_i a lo largo de α_i.

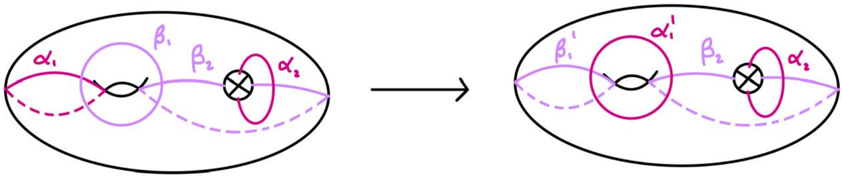
$$\{(\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_i, \beta_i), \dots, (\alpha_n, \beta_n)\}$$
$$\downarrow$$
$$\{(\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_i, t_{\alpha_i}(\beta_i)), \dots, (\alpha_n, \beta_n)\}$$



Definición

- **Intercambio:** Para un $i \in \{1, \ldots, n\}$ fijo tal que $N(\alpha_i \cup \beta_i) \neq N_2^1$, reemplazamos a α_i por β_i y a β_i por α_i.

$$\{(\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_i, \beta_i), \ldots, (\alpha_n, \beta_n)\}$$
$$\downarrow$$
$$\{(\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\beta_i, \alpha_i), \ldots, (\alpha_n, \beta_n)\}$$

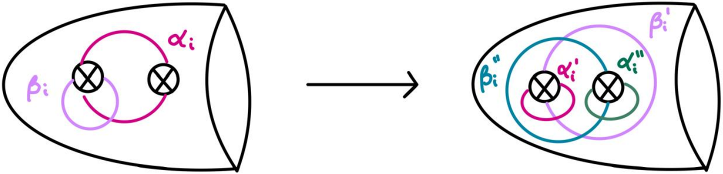


Movimientos de marcas

Definición

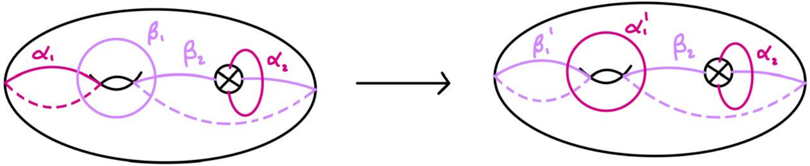
- **Movimiento adicional:** Para un $i \in \{1, \ldots, n\}$ fijo tal que $N(\alpha_i \cup \beta_i) = N_2^1$, eliminamos a α_i y la reemplazamos por las curvas α_i' y α_i''. En las curvas transversales, eliminamos a β_i reemplazándola por las curvas β_i' y β_i''.

$$\{(\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_i, \beta_i), \ldots, (\alpha_n, \beta_n)\}$$
$$\downarrow$$
$$\{(\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_i', \beta_i'), (\alpha_i'', \beta_i''), \ldots, (\alpha_n, \beta_n)\}$$



Observación

El resultado de aplicarle a una marca limpia un movimiento giro o movimiento adicional es una marca limpia. Esto no sucede con el movimiento intercambio.



Movimientos de marcas

Definición

Una marca limpia μ' es **compatible** con una marca μ si satisface lo siguiente:

- $base(\mu) = base(\mu')$, y
- $d_{\mathcal{C}_1(Y)}(\beta, \beta')$ es minimal sobre todas las posibles elecciones de β.

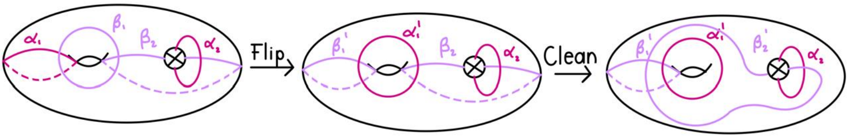
Proposición

Sea N una superficie no orientable y $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ una descomposición en pantalones de N. Entonces existe una marca limpia μ tal que $base(\mu) = \{\alpha_i\}_{i=1}^n$.

Movimientos de marcas

Definición

Dada una marca $\mu = \{(\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_n, \beta_n)\}$, se define el movimiento **intercambio limpio** de la siguiente manera: Para un $i \in \{1, \ldots, n\}$ fijo tal que $N(\alpha_i \cup \beta_i) \neq N_2^1$, reemplazamos a α_i por β_i y a β_i por α_i y consideramos una marca limpia compatible con la marca resultante.



Definición

Dada una superficie no orientable N el **complejo de marcas** $\mathcal{M}(N)$ se define como el grafo con vértices el conjunto de marcas limpias donde dos de éstas comparten una arista si es posible pasar de una a la otra mediante un movimiento giro, intercambio limpio o movimiento adicional.

Dotamos a este espacio con la métrica combinatoria.

Proposición

Sea N una superficie no orientable tal que $N \notin \{N_1^0, N_1^1, N_2^0\}$. Entonces $Map(N)$ es cuasiisométrico a $\mathcal{M}(N)$.

Espacios jerárquicamente hiperbólicos

Proposición

Sea N una superficie no orientable tal que $N \notin \{N_1^0, N_1^1, N_2^0\}$. Entonces $Map(N)$ satisface los primeros 5 axiomas de la definición de espacio jerárquicamente hiperbólico.

Denotaremos por χ al conjunto de clases de isotopía libre de subsuperficies de N distintas a S_0^3 y N_1^2.

Consideremos el conjunto $\{\mathcal{C}^1(W) | W \in \chi\}$.

Erika Kuno demostró en [Kun16] que estos espacios son 17-hiperbolicos.

Axioma 1: Proyecciones.
Existe un conjunto $\{\pi_X^{\mathcal{M}(N)}\colon \mathcal{M}(N) \to \mathcal{P}(\mathcal{C}_0(X)) | X \in \chi\}$ de proyecciones tal que

$$diam(\pi_X^{\mathcal{M}}(\mu)) \leq 2 \text{ para toda } \mu \in \mathcal{M}(N) \text{ y toda } X \in \chi.$$

Lema (Masur y Minsky, [MM00])

Sea S una superficie orientable, Y una subsuperficie de S. Si $\xi(Y) > 3$ entonces exite una función

$$\widetilde{\psi}\colon \mathcal{CA}_0(Y) \to \mathcal{P}(\mathcal{C}_0(Y)),$$

tal que:

- $\widetilde{\psi}(\alpha) = \{\alpha\}$ para $\alpha \in \mathcal{C}_0(Y)$,
- $d_{\mathcal{CA}_1(Y)}(\alpha, \widetilde{\psi}(\alpha)) \leq 1$, y
- si $d_{\mathcal{CA}_1(Y)}(\alpha, \beta) \leq 1$ entonces $d_{\mathcal{C}_1(Y)}(\widetilde{\psi}(\alpha), \widetilde{\psi}(\beta)) \leq 2$.

Espacios jerárquicamente hiperbólicos

Definición

Sea Y una subsuperficie de N tal que

- si Y es orientable entonces $\xi(Y) > 3$, y
- si Y es no orientable entonces $Y \notin \{N_1^0, N_1^1, N_2^0\}$.

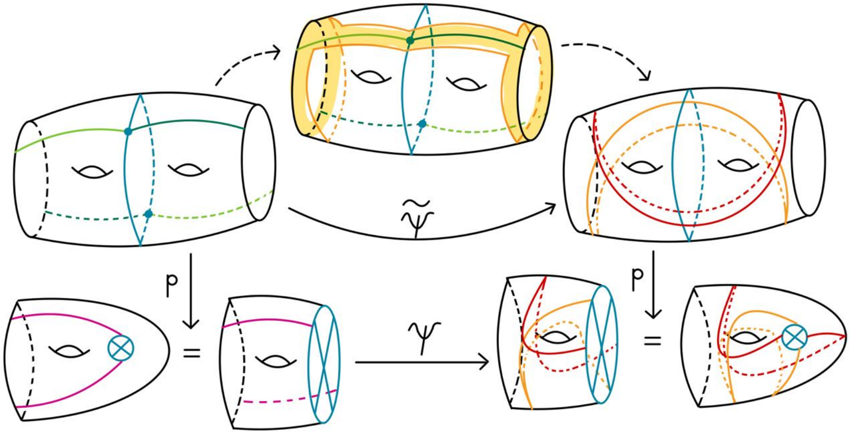
Definimos

$$\psi\colon \mathcal{CA}_0(Y) \to \mathcal{P}(\mathcal{C}_0(Y))$$

como sigue:

- Si $\alpha \in \mathcal{CA}_0(N)$ es una curva entonces $\psi(\alpha) = \{\alpha\}$.
- Si $\alpha \in \mathcal{CA}_0(N)$ es un arco entonces $\psi\colon (\alpha) = p(\widetilde{\psi}(\widetilde{\alpha}))$, donde $p\colon \widetilde{N} \to N$ es la doble cubierta orientable de N y $\widetilde{\alpha}$ es un levantamiento de α.

Espacios jerárquicamente hiperbólicos



Definición

Sea Y una subsuperficie de N tal que

- si Y es orientable entonces $\xi(Y) > 3$, y
- si Y es no orientable entonces $Y \notin \{N_1^0, N_1^1, N_2^0\}$.

Definimos

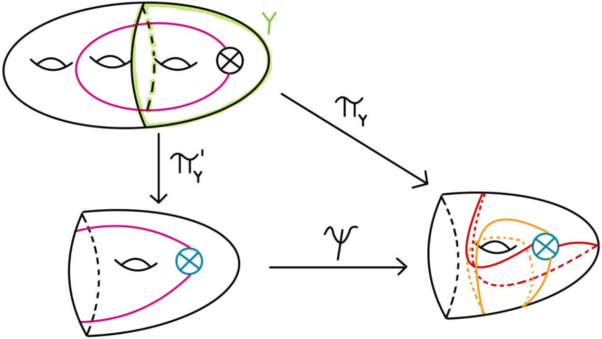
$$\pi'_Y \colon \mathcal{C}^0(N) \to \mathcal{P}(\mathcal{AC}^0(Y))$$

como sigue:

- Si $\alpha \in \mathcal{C}^0(N)$ no intersecta a Y esencialmente, entonces $\pi'_Y(\alpha) \colon = \emptyset$.
- Si $\alpha \in \mathcal{C}^0(N)$ intersecta a Y esencialmente
  - si $\alpha \in \mathcal{C}^0(Y)$ entonces $\pi'_Y(\alpha) \colon = \{\alpha\}$,
  - si $\alpha \notin \mathcal{C}^0(Y)$ entonces $\pi'_Y(\alpha)$ es el conjunto dado por la unión de los arcos esenciales que intersectan a Y.

Finalmente, definimos la **proyección a subsuperficies** como la composición de estas dos funciones

$$\pi_Y :=\psi \circ \pi'_Y : \mathcal{C}^0(N) \to \mathcal{C}^0(Y)$$



Definición

Sea N una superficie no orientable tal que $N \notin \{N_1^0, N_1^1, N_2^0\}$. Definimos la **proyección de marcas** a una subsuperficie X como

$$\begin{array}{rccc} \pi_X^{\mathcal{M}}: & \mathcal{M}(N) & \to & \mathcal{P}(\mathcal{C}(X)) \\ & \mu & \mapsto & \{\pi_X(\gamma) | \gamma \in base(\mu)\}. \end{array}$$

Observación

Del lema previo tenemos que

$$diam(\pi_X^{\mathcal{M}}(\mu)) \leq 2$$

para toda $\mu \in \mathcal{M}(N)$ y toda $X \in \chi$.

Axioma 2: Anidación.

Existe:

- una relación $\preceq$ que equipa a χ con un orden parcial donde χ tien un elemento $\preceq$-maximal.
- un conjunto $\rho_W^V \subset \mathcal{C}(W)$, para cada $V, W \in \chi$ con $V \prec W$, tal que $diam_{\mathcal{C}^1(W)}(\rho_W^V) = 1 \leq 2$.
- una proyección $p_V^W : \mathcal{C}^0(W) \to \mathcal{P}(\mathcal{C}^0(V))$.

Definición

Sea $V, W \in \chi$. Escribimos

- $V \preceq W$ si V es una subsuperficie de W.
- $V \prec W$ si V es una subsuperficie propia de W.

Definición

Si $V \prec W$, tomamos $\rho_W^V \subset \mathcal{C}(W)$ como el conjunto de curvas frontera de V.

Axioma 3: Ortogonalidad.
Existe una relación $\perp$ en χ tal que:

- es simétrica y antireflexiva,
- siempre que $V \preceq W$ y $W \perp U$ tenemos que $V \perp U$,
- si $V \perp W$, entonces V y W no son $\preceq$-comparables, y
- si $T \in \chi$ y $U \in \chi_T :=\{X \in \chi | X \preceq T\}$ es tal que $\{V \in \chi_T | V \perp U\} \neq \emptyset$, entonces existe $W \in \chi_T$ con la siguiente propiedad:
  para cada $V \in \chi_T$ *tal que* $V \perp U$ *tenemos* $V \preceq W$.

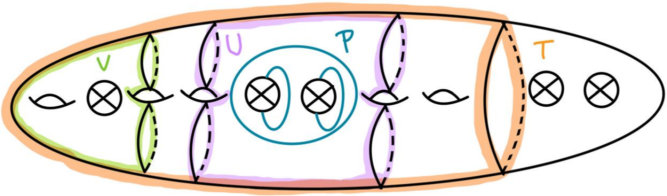
Definición

Sean $V, W \in \chi$, escribimos $V \perp W$ siempre que V y W puedan realizarse disjuntamente.

Sean $T \in \chi$ y $U \in \chi_T$ tales que $\{V \in \chi_T | V \perp U\} \neq \emptyset$.

Existe un par de pantalones P en U tal que $U \setminus P$ es conexa (dado que $U \notin \{S_0^3, N_1^2\}$).

Sea $W = T \setminus P \in \chi_T \setminus \{T\}$. Entonces para toda $V \in \chi_T$ tal que $V \perp U$ tenemos que $V \preceq W$.



Esto nos da el axioma de ortogonalidad.

Axioma 4: Transversalidad y consistencia.
Existe una relación $\pitchfork$ en χ y $k_0 \geq 0$ que satisface lo siguiente.

- Si $V \pitchfork W$, entonces existen $\rho_W^V \subset \mathcal{C}^0(W)$ y $\rho_V^W \subset \mathcal{C}^0(V)$ de diámetro a lo más 2 tales que

  $$min\{d_{\mathcal{C}^1(W)}(\pi_W^{\mathcal{M}}(\mu), \rho_W^V), d_{\mathcal{C}^1(V)}(\pi_V^{\mathcal{M}}(\mu), \rho_V^W)\} \leq k_0$$

  para toda $\mu \in \mathcal{M}(N)$.
- Si $V \preceq W$, entonces existe ρ_W^V tal que

  $$min\{d_{\mathcal{C}^1(W)}\big(\pi_W^{\mathcal{M}}(\mu), \rho_W^V\big), diam_{\mathcal{C}^1(V)}\Big(\pi_V^{\mathcal{M}}(\mu) \cup p_V^W\big(\pi_W^{\mathcal{M}}(\mu)\big)\Big)\} \leq k_0$$

  para toda $\mu \in \mathcal{M}(N)$.

- Supongamos que $U \prec V$ o $U \pitchfork V$, y $U \prec W$ o $U \pitchfork W$. Si $V \pitchfork W$ tenemos que

$$min\{d_{\mathcal{C}^1(W)}(\rho^U_W, \rho^V_W), d_{\mathcal{C}^1(V)}(\rho^U_V, \rho^W_V)\} \leq k_0$$

y si $V \prec W$ tenemos

$$min\{d_{\mathcal{C}^1(W)}(\rho^U_W, \rho^V_W), diam_{\mathcal{C}^1(V)}(\rho^U_V \cup p^W_V(\rho^U_W))\} \leq k_0.$$

- Si $V \preceq U$ o $U \perp V$ entonces

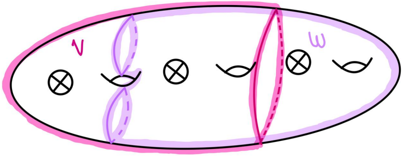
$$d_{\mathcal{C}^1(W)}(\rho^U_W, \rho^V_W) \leq k_0$$

siempre que $W \in \chi \setminus \{U, V\}$ satisface $V \preceq W$ o $V \pitchfork W$, y $U \preceq W$ o $U \pitchfork W$.

Espacios jerárquicamente hiperbólicos

Definición

Sean $V, W \in \chi$. Decimos que $V \pitchfork W$ si $V \not\precsim W, W \not\precsim V$ y $V \not\perp W$.



Definición

Sean $V, W \in \chi$ tales que $V \pitchfork W$. Tomamos $\rho^V_W \subset \mathcal{C}^0(W)$ y $\rho^W_V \subset \mathcal{C}^0(V)$ como el conjunto de curvas frontera de V y W en W y V.

Observación

Sean $V, W \in \chi$ tales que $V \pitchfork W$, entonces

$$diam_{\mathcal{C}^1(W)}(\rho_W^V),\ diam_{\mathcal{C}^1(V)}(\rho_V^W) = 1 \leq 2.$$

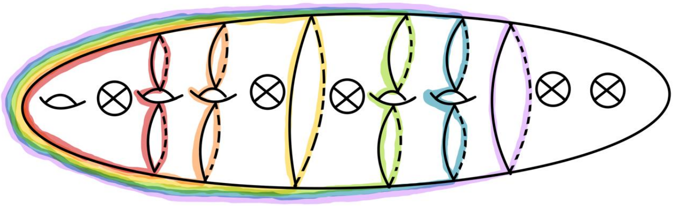
Definición

Sean $V, W \in \chi$ tales que $V \prec W$. Tomamos $\rho_W^V \subset \mathcal{C}^0(W)$ como el conjunto de curvas frontera de V y W en W y V.

Axioma 5: Complejidad finita.
Existe $n \geq 0$ tal que si $\{U_i\}_i$ es una sucesión de elementos en χ tales que $U_i \prec U_{i+1}$. Entonces $\{U_i\}_i$ tiene longitud a lo más n.

Sean $\rho_0 \colon = \rho_{U_0}^{U_1}$ y $\rho_{i+1} \colon = \rho_{U_{i+1}}^{U_{i+2}} \sqcup \rho_i$.

Esto nos da una sucesión $\{\rho_i\}_i \subset \mathcal{C}^1(N)$ tal que cada ρ_i consiste de curvas disjuntas por pares y $\rho_i \subset \rho_{i+1}$.



Como cada curva en ρ_i is de dos lados, tenemos que $\{\rho_i\}_i$ en una sucesión finita de longitud n con

- $n \leq 3r + c - 2$ si $N = N^c_{2r+1}$,
- $n \leq 3r + c - 4$ si $N = N^c_{2r}$.

Estas cotas se traducen a la longitud de la sucesión $\{U_i\}_i$.

De esto, la **complejidad** de $\mathcal{M}(N)$ es $3r + c - 2$ o $3r + c - 4$ dependiendo del género de N.

Esto nos da el quinto axioma de espacios jerárquicamente hiperbólicos.

Trabajo en progreso

- Axiomas faltantes de espacios jerárquicamente hiperbólicos.
- Dimensión geométrica de $Map(N)$.
- Rigidez cuasiisométrica.

Teorema (Bowditch, [Bow13])

Si (Λ, ρ, μ) es un espacio mediado grueso de rango a lo más ν entonces todo cono asintótico de éste es un algebra mediada topológica localmente convexa de rango a lo más ν.

Corolario (Bowditch, [Bow13])

Si (Λ, ρ) es un espacio geodésico que admite una estructura mediada gruesa de rango a lo más ν, entonces no admite encajes cuasiisométricos de $\mathbb{R}^{\nu+1}$.

¡GRACIAS!

Ferihe Atalan and Mustafa Korkmaz.
Automorphisms of curve complexes on nonorientable surfaces.
Groups Geom. Dyn., 8(1):39–68, 2014.

Brian H. Bowditch.
Coarse median spaces and groups.
Pacific J. Math., 261(1):53–93, 2013.

Erika Kuno and Takuya Katayama.
The mapping class group of a nonorientable surface is quasi-isometrically embedded in the mapping class group of the orientation double cover.
Groups Geom. Dyn., pages 1–12, 2024.

Bibliography II

Erika Kuno.
Uniform hyperbolicity for curve graphs of non-orientable surfaces.
Hiroshima Math. J., 46(3):343–355, 2016.

H. A. Masur and Y. N. Minsky.
Geometry of the complex of curves. II. Hierarchical structure.
Geom. Funct. Anal., 10(4):902–974, 2000.

Kenneth J. Shackleton.
An acylindricity theorem for the mapping class group.
New York J. Math., 16:563–573, 2010.