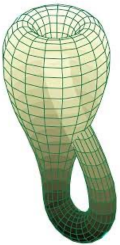
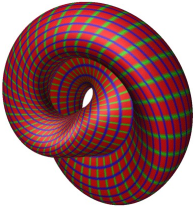
Cohomología de Farrell de Grupos Modulares de Superficies no Orientables



Nestor Colin Hernandez

CINVESTAV

Abril, 2022



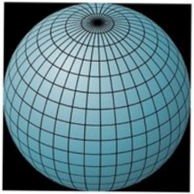
1. Grupos Modulares.

2. Algo de Cohomología de Grupos

3. Cohomología de Farrell de Grupos Modulares $\mathcal{N}_g^k$

Indice

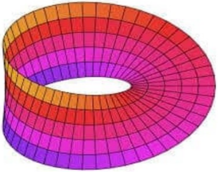
Objetos de Estudio. Superficies

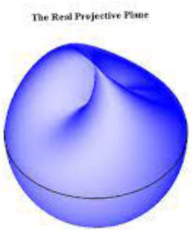

Genus = 0

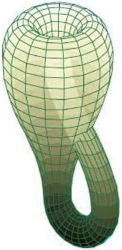

Genus = 1


Genus = 2


Genus = 3







Representaciones de una superficie no orientable

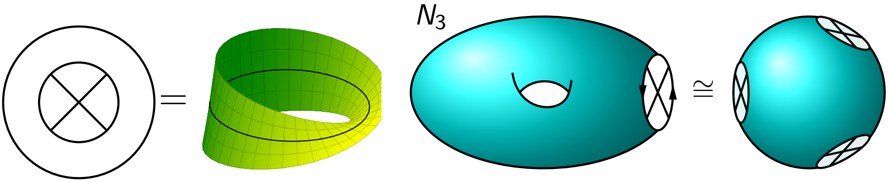


Figura: Crosscap y superficie de género 3.

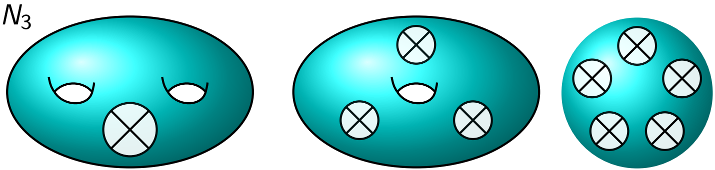


Figura: Representaciones gráficas de una superficie no orientable de género 5.

Representaciones de una superficie no orientable

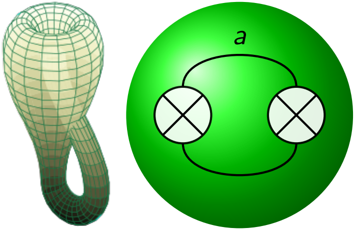


Figura: Botella de Klein

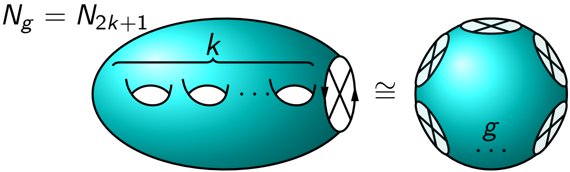


Figura: Superficie de género impar.

Grupo modular

Definición. Grupo modular

Sea S una superficie compacta, conexa y sin frontera y sea $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$ un subconjunto finito de S de cardinalidad $k \geq 0$, llamados también *puntos marcados*. **El grupo modular de S con k puntos marcados** se define como

$$Mod(S;k) := \begin{cases} \pi_0 Diff^+(S;k) & \text{si } S \text{ es orientable} \\ \pi_0 Diff(S;k) & \text{si } S \text{ es no orientable.} \end{cases}$$

donde $Diff(S;k)$ es el grupo de difeomorfismos que dejan fijo cada punto individualmente. Notación $\mathcal{N}_g^k = Mod(N_g;k)$ (el grupo modular puro)

$$\begin{aligned} Mod(S;k) &= \pi_0(Homeo(S;k)) \\ &\approx Homeo(S;k)/\sim \\ &\approx Diff(S, \partial S)/\sim \end{aligned}$$

Elementos de Orden Finito

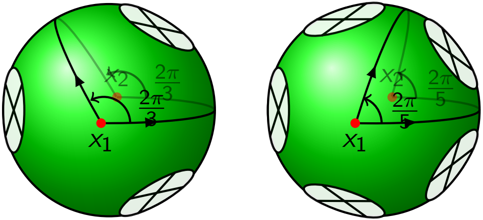
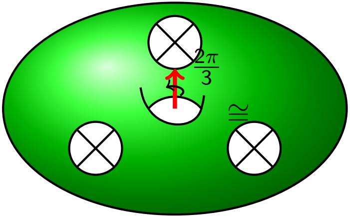


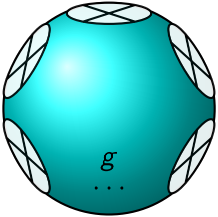
Figura: Elementos de orden 3 y 5 en N_3 y N_5

Género 5



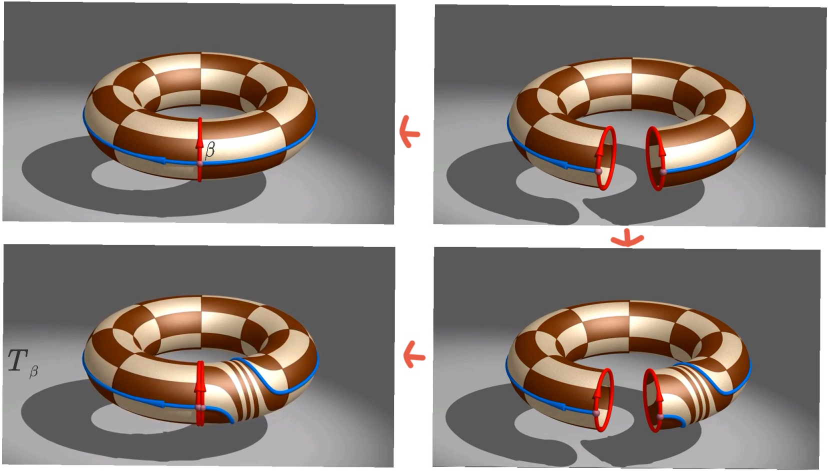
Elemento de orden 3

Género g

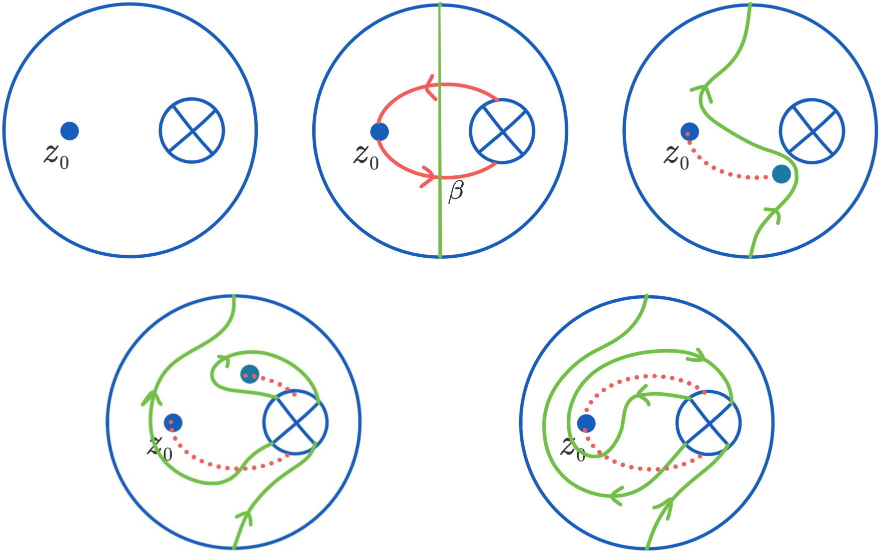


Elemento de orden g

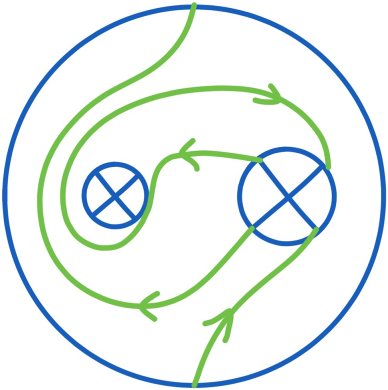
Giros de Dehn



Punctured Slides



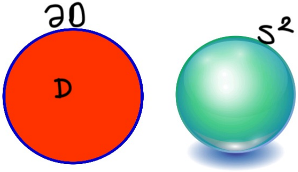
Boundary Slide y Crosscap Slides



Ejemplos de MCG

$$Mod(D, \partial D) = Mod(S^2)$$

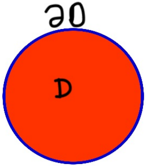
$$= Mod(S^2, 1) = 0$$



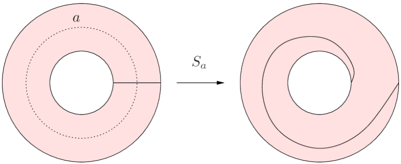
Ejemplos de MCG

$$Mod(D, \partial D) = Mod(S^2)$$

$$= Mod(S^2, 1) = 0$$

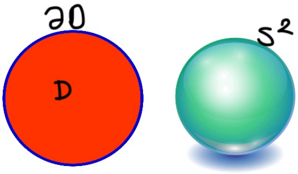


$$Mod(C, \partial C) \cong \mathbb{Z} \cong \langle T_\beta \rangle$$

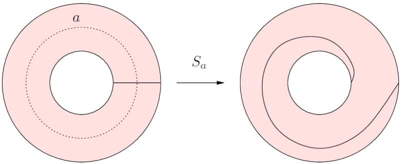


Ejemplos de MCG

$$Mod(D, \partial D) = Mod(S^2)$$
$$= Mod(S^2, 1) = 0$$



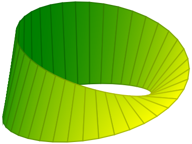
$$Mod(C, \partial C) \cong \mathbb{Z} \cong \langle T_\beta \rangle$$

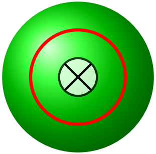


$$Mod(T) = SL(2, \mathbb{Z})$$

Ejemplos de MCG NO Orientable

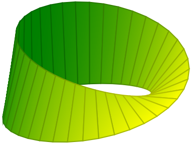
$Mod(M, \partial M) = 0$ $Mod(\mathbb{R}P^2) = 0$

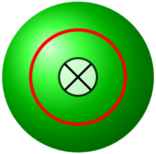




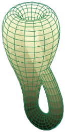
Ejemplos de MCG NO Orientable

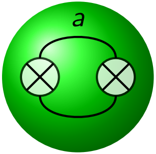
$Mod(M, \partial M) = 0$ $Mod(\mathbb{R}P^2) = 0$





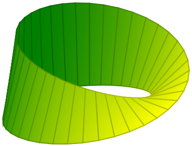
$$Mod(K) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$
$$\cong \langle y \rangle \times \langle t_a \rangle$$

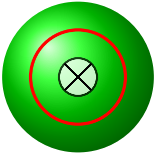




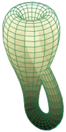
Ejemplos de MCG NO Orientable

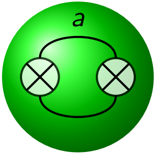
$Mod(M, \partial M) = 0$ $Mod(\mathbb{R}P^2) = 0$



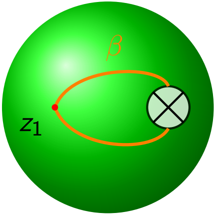


$$Mod(K) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$
$$\cong \langle y \rangle \times \langle t_a \rangle$$

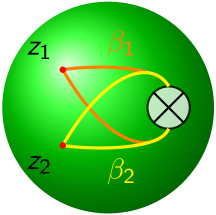




$$Mod(\mathbb{R}P^2, 1) \cong \mathbb{Z}_2 \cong \langle v_1 \rangle$$



$$Mod(\mathbb{R}P^2, 2) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \cong \langle v_1 \rangle \times \langle v_2 \rangle$$



Indice

Cohomología de un Grupo

- G un grupo.
- $\mathbb{Z}G$ el anillo de grupo formado por por los elementos de la forma

$$\sum_{g \in G} a_g g \text{ con } a_g \in \mathbb{Z}.$$

- M un G-módulo.
- Una resolución proyectiva P_* de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$.

$$\ldots \to P_n \to P_{n-1} \to \ldots \to P_0 \to \mathbb{Z} \to 0$$

Cohomología de un Grupo

- G un grupo.
- $\mathbb{Z}G$ el anillo de grupo formado por por los elementos de la forma

$$\sum_{g\in G} a_g g \text{ con } a_g \in \mathbb{Z}.$$

- M un G-módulo.
- Una resolución proyectiva P_* de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$.

$$\ldots \to P_n \to P_{n-1} \to \ldots \to P_0 \to \mathbb{Z} \to 0$$

- Ejemplo. $G = \mathbb{Z}_2 =< t \mid t^2 = 1 >$ una resolución es

$$\ldots \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{t+1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{t-1} \ldots \xrightarrow{t+1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z} \to 0.$$

- $M = \mathbb{Z}$ como G-módulo trivial, entonces

$$\begin{array}{ll} \_ \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z} & \to \mathbb{Z} \ldots \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \to 0 \\ Hom_{\mathbb{Z}G}(\_, \mathbb{Z}) & \leftarrow \mathbb{Z} \ldots \mathbb{Z} \xleftarrow{\times 2} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \leftarrow 0 \end{array}$$

Cohomología de Grupos

Definición. Cohomología y Homología de un Grupo

Con lo anterior definimos

$$H_*(G, M) := H_*(P \otimes_G M)$$

$$H^*(G, M) := H^*(Hom_G(P, M)).$$

Cohomología de Grupos

Definición. Cohomología y Homología de un Grupo

Con lo anterior definimos

$$H_*(G, M) := H_*(P \otimes_G M)$$

$$H^*(G, M) := H^*(Hom_G(P, M)).$$

Ejemplo

- Si $G = \mathbb{Z}_2 =< t \mid t^2 = 1 >$ y $M = \mathbb{Z}$ como G-módulo trivial.

$$\_ \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z} \qquad\qquad Hom_{\mathbb{Z}G}(\_, \mathbb{Z})$$

$$\to \mathbb{Z} \ldots \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \to 0 \qquad\qquad \leftarrow \mathbb{Z} \ldots \mathbb{Z} \xleftarrow{\times 2} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \leftarrow 0$$

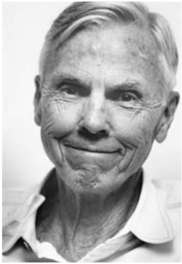
$$H_i(\mathbb{Z}_2; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = 0 \\ \mathbb{Z}_2 & \text{si } i \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } i \text{ es par} \end{cases} \qquad H^i(\mathbb{Z}_2; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = 0 \\ \mathbb{Z}_2 & \text{si } i \text{ es par} \\ 0 & \text{si } i \text{ es impar} \end{cases}$$

Cohomología de Tate

- Similitudes entre H_* y H^* en el caso en que G es un grupo finito.
- Cuando tenemos un grupo **finito** y un G-módulo M podemos definir el mapeo norma $N : M \to M$ dado por

$$N(m) = \left(\sum_{g \in G} g \right) \cdot m$$

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[rr, "N"'] \arrow[d] & & M \\
M_G = H_0(G, M) \arrow[rr, "\overline{N}"] & & H^0(G, M) = M^G \arrow[u]
\end{tikzcd}$$



Cohomología de Tate

Definición. Cohomología de Tate

Si G es un grupo finito y M es un G-módulo, definimos los **grupos de cohomología de Tate** de G como los grupos:

$$\hat{H}^n(G;M) := \begin{cases} H^n(G;M) & \text{si } n \geq 1 \\ coker\,\bar{N} & \text{si } n = 0 \\ ker\,\bar{N} & \text{si } n = -1 \\ H_{-1-n}(G;M) & \text{si } n \leq -2 \end{cases}$$

Ejemplo.

$G = \mathbb{Z}_m$, entonces

$$\hat{H}^n(G;\mathbb{Z}) := \begin{cases} \mathbb{Z}_m & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

$D_{2p} = \langle x, y \mid x^p = y^2 = 1, yxy^{-1} = x^{-1} \rangle$ con p primo

$$\hat{H}^n(D_{2p};\mathbb{Z}) := \begin{cases} \mathbb{Z}_{2p} & \text{si } n = 0\ (4) \\ 0 & \text{si } n = 1,3\ (4) \\ \mathbb{Z}_2 & \text{si } n = 2\ (4) \end{cases}$$

Cohomología de Tate. Formal

- Una **resolución completa** para un grupo G, es un complejo de cadenas aciclico $F = (F_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ de $\mathbb{Z}G-$módulos proyectivos

$$\ldots \to F_{n+1} \to F_n \to \ldots \to F_1 \to F_0 \to F_{-1} \to \ldots \to F_{-m} \to \ldots,$$

  junto con un mapeo $\varepsilon : F_0 \to \mathbb{Z}$ tal que $\varepsilon : F_+ \to \mathbb{Z}$ es una resolución en el sentido usual, donde $F_+ = (F_i)_{i\geq 0}$.

- **La cohomología de Tate**

$$\hat{H}^i(G; M) := H^i(\mathrm{Hom}_G(F, M)),$$

Dimensión Cohomológica

La definición de $H_*(G;M)$ y $H^*(G;M)$ nos permiten elegir resoluciones proyectivas arbitrarias $P = (P_i)_{i\geq 0}$ de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$.

$$\ldots \to P_n \to P_{n-1} \to \ldots \to P_0 \to \mathbb{Z}$$

Esta libertad de elección, nos hace intentar elegir una resolución P de tal forma que sea la más *pequeña* como sea posible.

Definición. Dimensión Cohomológica

Sea Γ un grupo, definimos la **dimensión cohomológica** de Γ como el menor entero de una resolución proyectiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}\Gamma$, posiblemente infinita y será denotada como $\mathrm{cd}(\Gamma)$.

Ejemplos de Dimensión Cohomológica

Ejemplos de dimensiones cohomológicas

- cd(G)=0 si G es el grupo trivial.
- Para $G = \mathbb{Z}_m$ una resolución proyectiva consta:

$$\ldots \xrightarrow{t} \mathbb{Z}G \xrightarrow{N} \mathbb{Z}G \xrightarrow{t-1} \ldots \xrightarrow{N} \mathbb{Z}G \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z} \to 0.$$

  Y no se puede encontrar una resolución más pequeña, $cd(\mathbb{Z}_m) = \infty$.
- En general si G tiene torsión entonces $cd(G) = \infty$.

Dimensión Cohomológica Virtual

- Tenemos un grupo Γ quizás infinito.
- Tenemos un subgrupo H libre de torsión y de índice finito.
- Fijemonos en la dimensión cohomológica de H.

Definición. Dimensión Cohomológica Virtual

Sean Γ y H como antes. Definimos la **dimensión cohomológica virtual** como la dimensión cohomológica de H y lo denotamos como $\operatorname{vcd}(\Gamma)$.

Ejemplo. VCD

- $\operatorname{vcd}(\mathbb{Z}_m) = 0$.
- En general $\operatorname{vcd}(\Gamma) = 0$ si Γ es finito.

Cohomología de Farrell

- Tenemos un grupo Γ tal que $vcd(\Gamma) = n < \infty$.
- Podemos construir una "resolución completa",

$$\ldots \to F_{n+1} \to F_n \to \ldots \to F_1 \to F_0 \to F_{-1} \to \ldots \to F_{-m} \to \ldots$$

donde cada F_i es un $\mathbb{Z}\Gamma$ módulo proyectivo, junto con una resolución proyectiva $\varepsilon : P \to \mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}\Gamma$

$$\ldots \to P_{n+1} \to P_n \to P_{n-1} \to \ldots \to P_0 \to \mathbb{Z},$$

tal que F y P coinciden en dimensiones suficientemente grandes, (dimensiones mayores o iguales que $vcd(\Gamma)$)

Definición. Cohomología de Farrell

Sea Γ como antes. Definimos la **Cohomología de Farrell** como

$$\widehat{H}^*(H; M) := H^*(\mathrm{Hom}_\Gamma(F, M))$$

para cualquier Γ-módulo M.

Propiedades de la Cohomología de Farrell.

Propiedades de la Cohomología de Farrell

- $\widehat{H}^i(\Gamma; M) = H^i(\Gamma; M)$ para $i > n = vcd(\Gamma)$
- $\widehat{H}^*(\Gamma; M) = 0$ si Γ es libre de torsión.
- $\widehat{H}^*(\Gamma; M)$ son grupos de torsión.
- Podemos hablar de $\widehat{H}^*(\Gamma; M)_{(p)}$.
- $\widehat{H}^*(\Gamma; -)$ tiene todas las propiedades cohomológicas usuales. En particular hay productos cup.

Cohomología p-periódica

- Podemos hablar de inversos en $\widehat{H}^*(\Gamma;\mathbb{Z})$. Digamos $u \in \widehat{H}^d(\Gamma;\mathbb{Z})$.
- Quiere decir que

$$u \cup \_ : \widehat{H}^n(\Gamma;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} \widehat{H}^{n+d}(\Gamma;\mathbb{Z}).$$

Definición. Cohomología periódica

Un grupo Γ con vcd finita tiene **cohomología periódica** si para algún entero $d \neq 0$, existe un elemento invertible $u \in \widehat{H}^d(\Gamma;\mathbb{Z})$.

Γ tiene **cohomología p-periódica** si la componente p-primaria $\widehat{H}^*(\Gamma;\mathbb{Z})_{(p)}$ contiene un elemento invertible de grado d no cero. El menor entero d para el cual se satisface lo anterior se llamará el p **período de** Γ.

Cohomología p-periódica

- Podemos hablar de inversos en $\widehat{H}^*(\Gamma;\mathbb{Z})$. Digamos $u \in \widehat{H}^d(\Gamma;\mathbb{Z})$.
- Quiere decir que
$$u \cup \_ : \widehat{H}^n(\Gamma;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} \widehat{H}^{n+d}(\Gamma;\mathbb{Z}).$$

Definición. Cohomología periódica

Un grupo Γ con vcd finita tiene **cohomología periódica** si para algún entero $d \neq 0$, existe un elemento invertible $u \in \widehat{H}^d(\Gamma;\mathbb{Z})$.

Γ tiene **cohomología p-periódica** si la componente p-primaria $\widehat{H}^*(\Gamma;\mathbb{Z})_{(p)}$ contiene un elemento invertible de grado d no cero. El menor entero d para el cual se satisface lo anterior se llamará el p **período de** Γ.

Ejemplo.

$G = \mathbb{Z}_m$, entonces

$$\hat{H}^n(G;\mathbb{Z}) := \begin{cases} \mathbb{Z}_m & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

$$D_{2p} = \langle x, y \mid x^p = y^2 = 1, yxy^{-1} = x^{-1} \rangle$$

$$\hat{H}^n(D_{2p};\mathbb{Z}) := \begin{cases} \mathbb{Z}_{2p} & \text{si } n = 0\ (4) \\ 0 & \text{si } n = 1,3\ (4) \\ \mathbb{Z}_2 & \text{si } n = 2\ (4) \end{cases}$$

Teorema de Brown

Teorema (Brown)

Si Γ tiene cohomología p-periódica, entonces:

$$\widehat{H}^i(\Gamma; M)_{(p)} = \prod_{\mathbb{Z}_p \in S} \widehat{H}^i(N(\mathbb{Z}_p); M)_{(p)},$$

donde S es un conjunto de representantes de las clases de conjugación de subgrupos de orden p en Γ y $N(\mathbb{Z}_p)$ es el normalizador del grupo $\mathbb{Z}_p$.

Camino a seguir para el cálculo de la cohomología $\mathcal{N}_g^k$

- Fenómeno de periodicidad en grupos modulares $\mathcal{N}_g^k$.
- Subgrupos de orden p.
- Clases de Conjugación de subgrupos de orden p.
- Cohomología de los normalizadores.

Indice

Periodicidad en $\mathcal{N}_g^k$

Teorema

El grupo $\mathcal{N}_g^k$ *tiene las siguientes propiedades:*

1. $vcd(\mathcal{N}_g^k) < \infty$. *Más aún,* $vcd(\mathcal{N}_g^k) \leq 4g + k - 8$.
2. *Para todo* $g > 2$ *y todo* **primo impar** p, *si* $\mathcal{N}_g^k$ *contiene un subgrupo de orden* p, *entonces* $\mathcal{N}_g^k$ *tiene cohomología* p*-periódica.*

Periodicidad en $\mathcal{N}_g^k$

Teorema

El grupo $\mathcal{N}_g^k$ tiene las siguientes propiedades:

1. $vcd(\mathcal{N}_g^k) < \infty$. *Más aún,* $vcd(\mathcal{N}_g^k) \leq 4g + k - 8$.
2. *Para todo $g > 2$ y todo* **primo impar** *p, si $\mathcal{N}_g^k$ contiene un subgrupo de orden p, entonces $\mathcal{N}_g^k$ tiene cohomología p-periódica.*

Teorema (C.)

Sea $g > 2$ y p un primo impar. Si $\mathcal{N}_g^k$ contiene un subgrupo de orden p, entonces el p-periodo de $\mathcal{N}_g^k$ es **igual** *a 4, es decir, $p(\mathcal{N}_g^k) \leq 4$.*

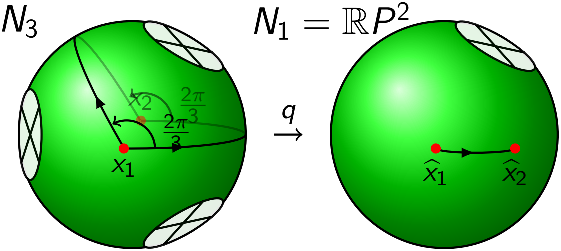
Torsión en $\mathcal{N}_g^k$

Dado un subgrupo $\mathbb{Z}_p < \mathcal{N}_g^k$, por el Teorema de realización de Nielsen, existe $f \in Diff(N_g; k)$ tal que $f^p = id$ y $\langle f \rangle \cong \mathbb{Z}_p$. Por lo que el grupo $\mathbb{Z}_p$ actúa por difeomorfismos en N_g y su espacio de órbitas es N_h. Obtenemos un cubriente ramificado.

$$q : N_g \to N_h$$

con t puntos de ramificación, los mismos que los puntos fijos de f. Por la ecuación de Riemann-Hurwitz

$$g - 2 = p(h-2) + t(p-1)$$



Torsión en $\mathcal{N}_g^k$

Teorema (C.)

$\mathcal{N}_g^k$ contiene un subgrupo de orden p si y sólo si la ecuación $g - 2 = p(h-2) + t(p-1)$ tiene una solución entera con $t \geq k, h \geq 1$.

Torsión en $\mathcal{N}_g^k$

Teorema (C.)

$\mathcal{N}_g^k$ contiene un subgrupo de orden p si y sólo si la ecuación $g-2=p(h-2)+t(p-1)$ tiene una solución entera con $t \geq k, h \geq 1$.

Ejemplo. Torsión

- **Género** $g=p$. La ecuación $g-2=p(h-2)+t(p-1)$ tiene una única solución $(h,t)=(1,2)$. El grupo modular $\mathcal{N}_p^k$ tiene un subgrupo de orden p cuando $k=0,1,2$ y la acción del grupo es el plano proyectivo $\mathbb{R}P^2$. Para $k>2$ no tiene p-torsión $\mathcal{N}_p^k$.

Torsión en $\mathcal{N}_g^k$

Teorema (C.)

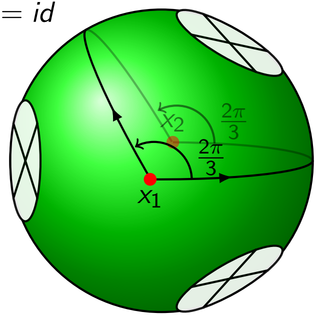
$\mathcal{N}_g^k$ contiene un subgrupo de orden p si y sólo si la ecuación $g-2=p(h-2)+t(p-1)$ tiene una solución entera con $t \geq k, h \geq 1$.

Ejemplo. Torsión

- **Género** $g=p$. La ecuación $g-2=p(h-2)+t(p-1)$ tiene una única solución $(h,t)=(1,2)$. El grupo modular $\mathcal{N}_p^k$ tiene un subgrupo de orden p cuando $k=0,1,2$ y la acción del grupo es el plano proyectivo $\mathbb{R}P^2$. Para $k>2$ no tiene p-torsión $\mathcal{N}_p^k$.
- **Género** $g=p+1$. La ecuación $g-2=p(h-2)+t(p-1)$ tiene una única solución $(h,t)=(2,1)$. El grupo modular $\mathcal{N}_{p+1}^k$ tiene un subgrupo de orden p cuando $k=0,1$ y la acción del grupo sobre la superficie N_{p+1} es la botella de Klein K. Para $k>1$ no hay p-torsión en $\mathcal{N}_{p+1}^k$.

Clases de Conjugación.

$f^3 = id$



$$\sigma(f) = (1 \mid 1)$$
$$\cong (1 \mid 2) = (1 \mid -1)$$
$$\cong (2 \mid 1) = (-1 \mid 1)$$
$$\cong (2 \mid 2) = (-1 \mid -1)$$

Datos de punto para f de orden p

$$\sigma(f) = (\beta_1, \dots, \beta_k \mid \beta_{k+1}, \dots, \beta_t).$$

f y g de orden p son **conjugados** si y sólo si

$$\sigma(f) \cong \sigma(g).$$

f y g **homotópicos** de orden p, entonces

$$\sigma(f) \cong \sigma(g).$$

Dos clases α, $\beta \in \mathcal{N}_g^k$ de orden p son conjugadas si y sólo si

$$\sigma(\alpha) \cong \sigma(\beta).$$

Clases de conjugación

Teorema (C.)

Sean $g > 2$, $k \geq 1$ y $t > 1$ un entero que satisface la ecuación de Riemann-Hurwitz $g - 2 = p(h-2) + t(p-1)$. Entonces existe una correspondencia biyectiva:

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{Clases de congruencia de} \\ t - \textit{tuplas} \\ (1, \beta_2 \ldots, \beta_k \mid \beta_{k+1}, \ldots, \beta_t) \\ \textit{con } 0 < \beta_j < p \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \textit{Clases de conjugación} \\ \textit{de subgrupos} \\ \textit{de orden } p \textit{ en } \mathcal{N}_g^k \\ \textit{que actúan en } N_g \\ \textit{dejando } t \textit{ puntos fijos} \end{array} \right\}$$

Clases de conjugación

Teorema (C.)

Sean $g > 2$, $k \geq 1$ y $t > 1$ un entero que satisface la ecuación de Riemann-Hurwitz $g - 2 = p(h-2) + t(p-1)$. Entonces existe una correspondencia biyectiva:

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{Clases de congruencia de} \\ t - \textit{tuplas} \\ (1, \beta_2 \ldots, \beta_k \mid \beta_{k+1}, \ldots, \beta_t) \\ \textit{con } 0 < \beta_j < p \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \textit{Clases de conjugación} \\ \textit{de subgrupos} \\ \textit{de orden } p \textit{ en } \mathcal{N}_g^k \\ \textit{que actúan en } N_g \\ \textit{dejando } t \textit{ puntos fijos} \end{array} \right\}$$

Ejemplo. Género 3.

- Sabemos que hay 3-torsión y la única solución es $(h, t) = (1, 2)$. Entonces para $\mathcal{N}_3^1$, $\mathcal{N}_3^2$ tenemos que solo hay una única clase de congruencia

$$(1 \mid 1)$$

Cohomología de los normalizadores

Sea $\mathbb{Z}_p < \mathcal{N}_g^k$ y sea (h,t) la solución a la ecuación de Riemann-Hurwitz $g-2 = p(h-2) + t(p-1)$. Usando el cubriente ramificado $q : N_g \to N_h$, definimos un homomorfismo

$$\widehat{I} : N(\mathbb{Z}_p) \to \mathcal{N}_h^{(k,t)} \quad [y] \mapsto [z],$$

donde $z : N_h \to N_h$ and $y : N_g \to N_g$ satisface el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} N_g \arrow[r, "y"] \arrow[d, "q"'] & N_g \arrow[d, "q"] \\ N_h \arrow[r, "z"'] & N_h \end{tikzcd}$$

Cohomología de los normalizadores

Sea $\mathbb{Z}_p < \mathcal{N}_g^k$ y sea (h,t) la solución a la ecuación de Riemann-Hurwitz $g-2 = p(h-2) + t(p-1)$. Usando el cubriente ramificado $q : N_g \to N_h$, definimos un homomorfismo

$$\widehat{I} : N(\mathbb{Z}_p) \to \mathcal{N}_h^{(k,t)} \quad [y] \mapsto [z],$$

donde $z : N_h \to N_h$ and $y : N_g \to N_g$ satisface el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} N_g \arrow[r, "y"] \arrow[d, "q"'] & N_g \arrow[d, "q"] \\ N_h \arrow[r, "z"'] & N_h \end{tikzcd}$$

Teorema (C.)

Sea $\mathbb{Z}_p < \mathcal{N}_g^k$ y sea $N(\mathbb{Z}_p)$ su normalizador en $\mathcal{N}_g^k$. Entonces existe un homomorfismo inyectivo

$$I : N(\mathbb{Z}_p)/\mathbb{Z}_p \to \mathcal{N}_h^{(k,t)}$$

$$\mathcal{N}_h^{(k,t)} = \pi_0 Diff(N_h, fix\{p_1, \ldots, p_k\}, per\{p_{k+1}, \ldots p_t\})$$

Cohomología de los normalizadores

Caso $g = 3$.

Hay una única solución $(h, t) = (1, 2)$. Para un subgrupo $\mathbb{Z}_3 < \mathcal{N}_3^k$ con $k = 1, 2$.

- Tenemos el homomorfismo inyectivo:

$$I : N(\mathbb{Z}_3)/\mathbb{Z}_3 \to \mathcal{N}_1^{(k,2)}$$

cuya imagen es

$$Im(I) = \{[z] \in \mathcal{N}_1^{(k,t)} \mid z \quad \text{se levanta}\}$$

Cohomología de los normalizadores

Caso $g = 3$.

Hay una única solución $(h, t) = (1, 2)$. Para un subgrupo $\mathbb{Z}_3 < \mathcal{N}_3^k$ con $k = 1, 2$.

- Tenemos el homomorfismo inyectivo:

$$I : N(\mathbb{Z}_3)/\mathbb{Z}_3 \to \mathcal{N}_1^{(k,2)}$$

  cuya imagen es

$$Im(I) = \{[z] \in \mathcal{N}_1^{(k,t)} \mid z \quad \text{se levanta}\}$$

- $\mathcal{N}_1^{(1,2)} \cong \mathcal{N}_1^2 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \langle v_1 \rangle \times \langle v_2 \rangle$

Cohomología de los normalizadores

Caso $g = 3$.

Hay una única solución $(h, t) = (1, 2)$. Para un subgrupo $\mathbb{Z}_3 < \mathcal{N}_3^k$ con $k = 1, 2$.

- Tenemos el homomorfismo inyectivo:

$$I : N(\mathbb{Z}_3)/\mathbb{Z}_3 \to \mathcal{N}_1^{(k,2)}$$

  cuya imagen es

$$Im(I) = \{[z] \in \mathcal{N}_1^{(k,t)} \mid z \quad \text{se levanta}\}$$

- $\mathcal{N}_1^{(1,2)} \cong \mathcal{N}_1^2 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \langle v_1 \rangle \times \langle v_2 \rangle$
- La imagen de I es $\mathbb{Z}_2$ generada por el producto $v_1 \cdot v_2$.

Cohomología de los normalizadores

Caso $g = 3$.

Hay una única solución $(h, t) = (1, 2)$. Para un subgrupo $\mathbb{Z}_3 < \mathcal{N}_3^k$ con $k = 1, 2$.

- Tenemos el homomorfismo inyectivo:

$$I : N(\mathbb{Z}_3)/\mathbb{Z}_3 \to \mathcal{N}_1^{(k,2)}$$

cuya imagen es

$$Im(I) = \{[z] \in \mathcal{N}_1^{(k,t)} \mid z \quad \text{se levanta}\}$$

- $\mathcal{N}_1^{(1,2)} \cong \mathcal{N}_1^2 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \langle v_1 \rangle \times \langle v_2 \rangle$
- La imagen de I es $\mathbb{Z}_2$ generada por el producto $v_1 \cdot v_2$.
- El normalizador tiene dos posibilidades:

$$N(\mathbb{Z}_3) \cong \mathbb{Z}_6 \quad \text{o} \quad N(\mathbb{Z}_3) \cong \mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_2 \cong D_6$$

$$\widehat{H}^i(N(\mathbb{Z}_3); \mathbb{Z})_{(3)} = \begin{cases} \mathbb{Z}_3 & \text{si } i = 0 \ mod(4) \\ 0 & \text{si } i = 1, 2, 3 \ mod(4) \end{cases}$$

Cohomología de Farrell en género 3.

$$\widehat{H}^i(\mathcal{N}_3^k;\mathbb{Z})_{(3)} = \begin{cases} \mathbb{Z}_3 & \text{si } i = 0 \ mod(4) \\ 0 & \text{si } i = 1,2,3 \ mod(4) \end{cases} \qquad k = 1,2$$

$$\widehat{H}^i(\mathcal{N}_3^k;\mathbb{Z})_{(3)} = 0 \qquad k > 2.$$

Puesto que $vcd(\mathcal{N}_3^2) \leq 6$, entonces la cohomología usual para dimensión mayor que 6 coincide con la cohomología de Farrell.

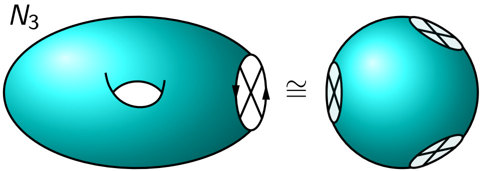


Figura: Superficie de género 3 no orientable

G R A C I A S !!!