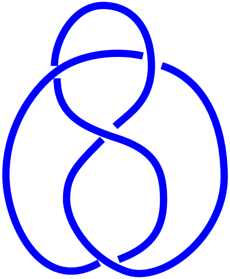
Descubriendo familias de nudos especiales.

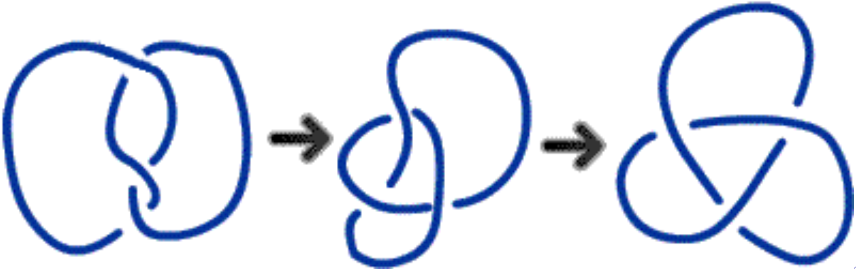
Araceli Guzmán Tristán (CIMAT)
en colaboración con **Mario Eudave**[1] y **Enrique Ramírez**[2]

Jornada de Geometría, Topología y Dinámica

[1] IMUNAM
[2] CIMAT

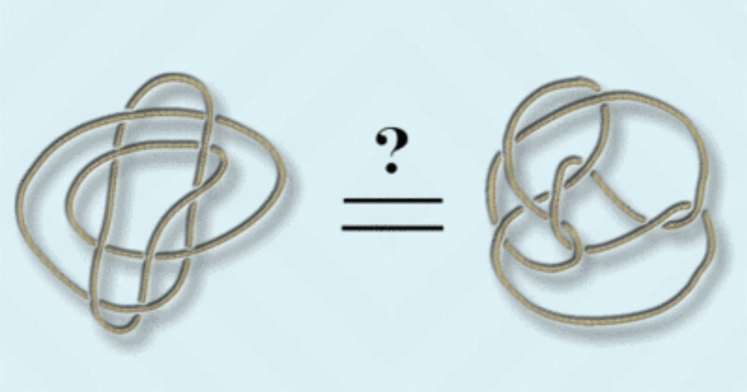
Nudos



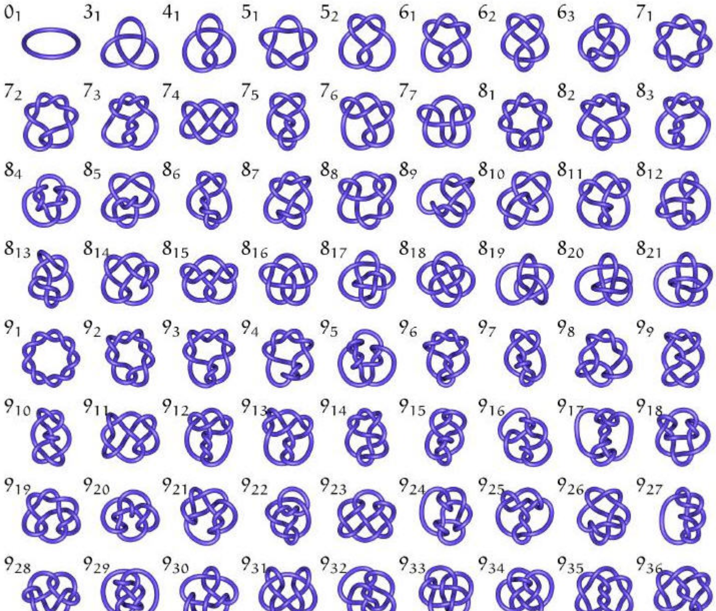


Problema fundamental en la Teoría de Nudos

Poder decidir si dos nudos dados son el mismo ó no.



Tablas de nudos.



Invariante ser o no casifibrado

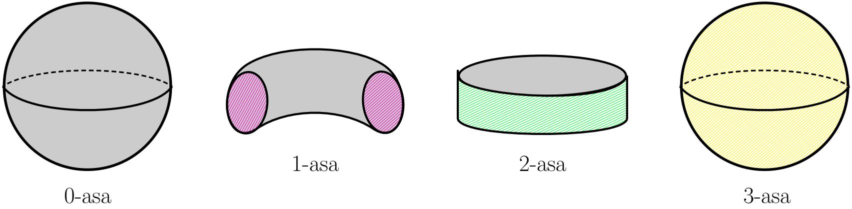
Este invariante se basa en la existencia de una cierta descomposición del exterior de un nudo.

- Fue definido por Fabiola Manjarrez[1] en 2009.
- Solamente se conocían ejemplos de nudos casifibrados.
- Nuestra intención fue exhibir ejemplos de nudos no casifibrados.

[1] IMUNAM

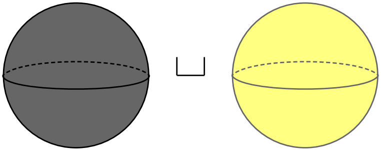
Descomposición de 3-variedades

Una descomposición en asas de una 3-variedad M es una sucesión de 0-asas, 1-asas, 2-asas y 3-asas cuya unión es M.

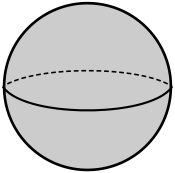


Ejemplo

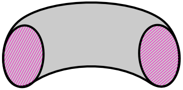
S^3:



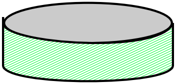
Descomposición de 3-variedades



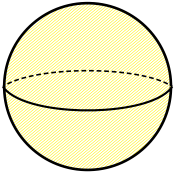
0-asa



1-asa

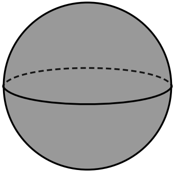


2-asa

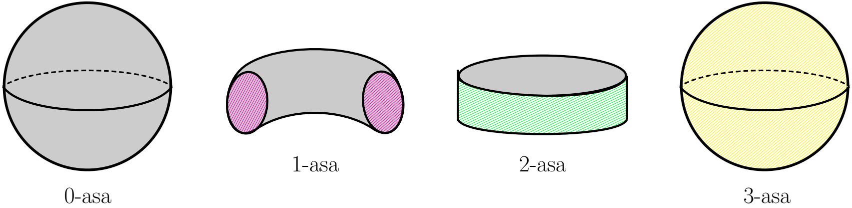


3-asa

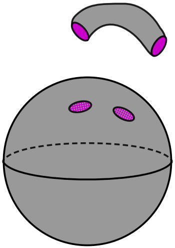
Ejemplo



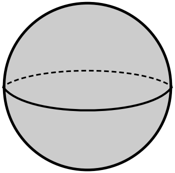
Descomposición de 3-variedades



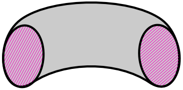
Ejemplo



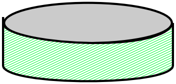
Descomposición de 3-variedades



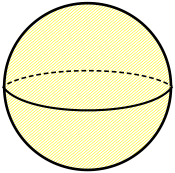
0-asa



1-asa

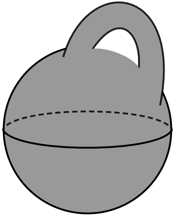


2-asa

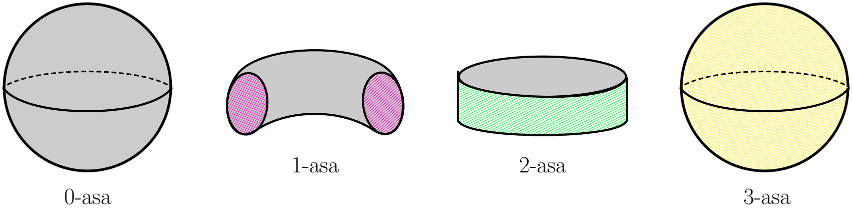


3-asa

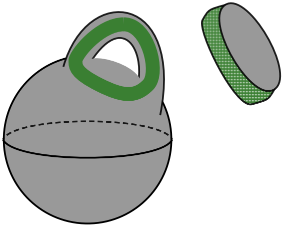
Ejemplo



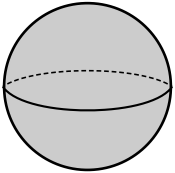
Descomposición de 3-variedades



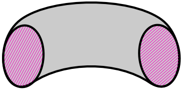
Ejemplo



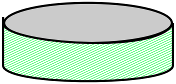
Descomposición de 3-variedades



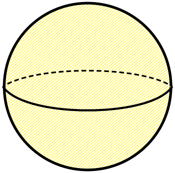
0-asa



1-asa

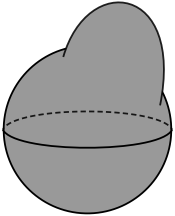


2-asa

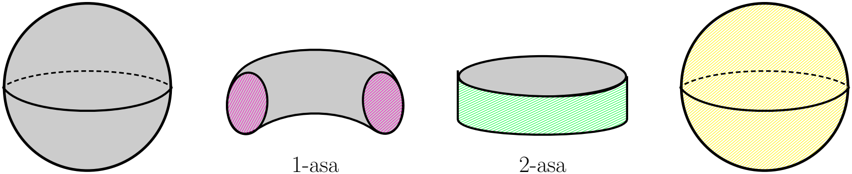


3-asa

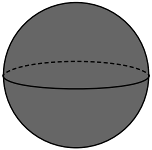
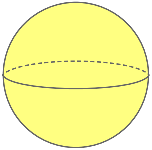
Ejemplo



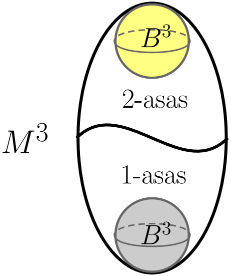
Descomposición de 3-variedades



Ejemplo

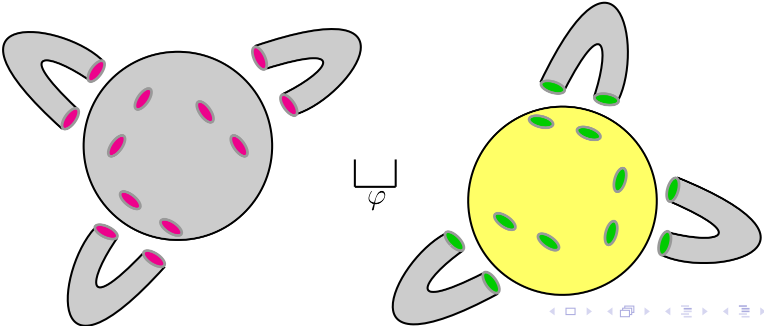
S^3:  $\sqcup$ 

Descomposición de Heegaard

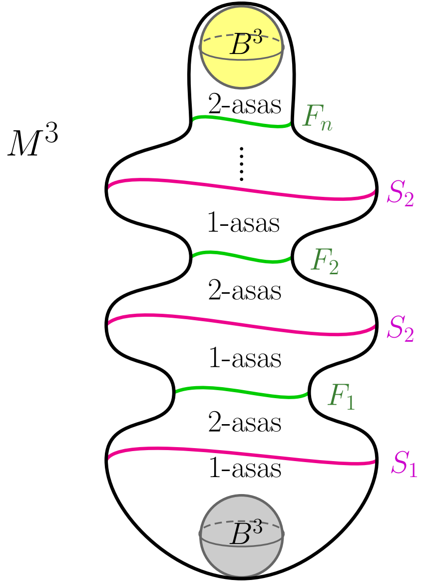


Teorema (Moise, 1952)

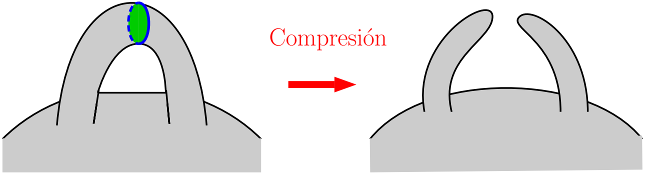
Toda 3-variedad compacta, orientable y sin frontera admite una descomposición de Heegaard.

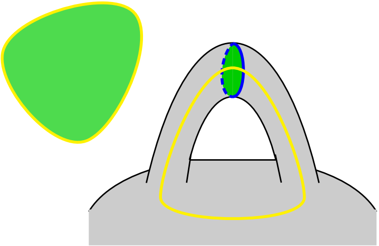


Descomposiciones generalizadas de Heegaard



Scharlemann y Thompson, en 1994 buscaron una descomposición de M^3 en la que las superficies F_i son *incompresibles* y las superficies S_i son *débilmente incompresibles*.

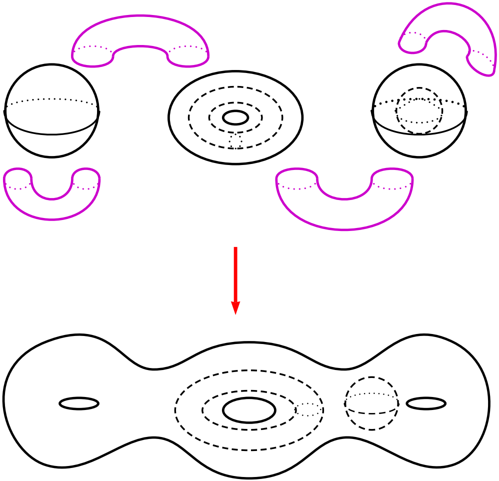




Débilmente Incompresible. Cualesquiera dos discos de compresión en lados opuestos se intersectan en su frontera.

Descomposiciones de Heegaard para variedades con frontera

Cuerpos de compresión.

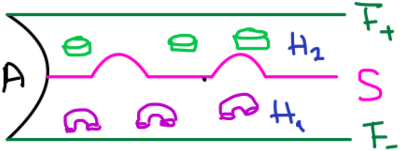


Descomposición circular del exterior de un nudo.

Sea K un nudo en S^3 y F una superficie de Seifert para K.

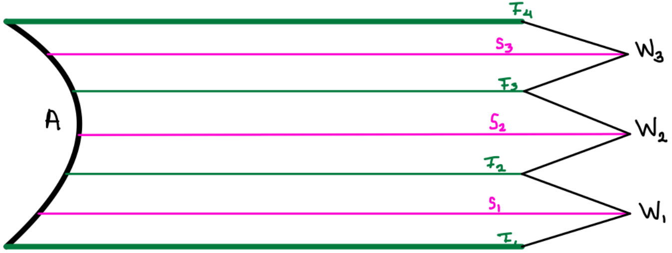
Consideremos la 3-variedad definida como $M = E(K) \backslash \mathring{\mathcal{N}}(F)$.

M tiene una descomposición de Heegaard con frontera.



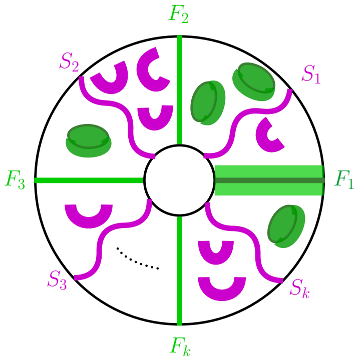
Descomposición circular del exterior de un nudo.

Cuando la descomposición de Heegaard (H_1, S, H_2) es debilmente reducible (i.e. existen discos de compresión $D_i \subset H_i$ para $i = 1, 2$ tales que $\partial D_1 \cap \partial D_2 = \emptyset$) entonces podemos cambiar la posición de las 1-asas y 2-asas (como en el trabajo de Scharlemann y Thompson) para obtener una descomposición de Heegaard como sigue:



Descomposición circular del exterior de un nudo.

Identificando nuevamente las copias de F obtenemos una descomposición circular del exterior de un nudo que esquematizamos como



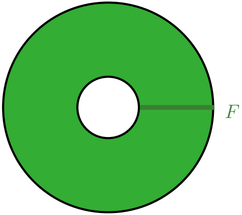
Las superficies F_i se llaman superficies delgadas y las superficies S_i se llaman superficies gruesas.

Posición circular delgada

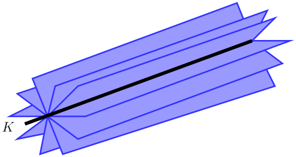
La complejidad de una superficie cerrada S, es el número $c(S) = 2g(S) - 1$, $c(S^2) = 0$.
Definimos el ancho de una descomposición en asas de M como el conjunto de enteros $\{c(S_i) | 1 \leq i \leq k\}$.
Comparamos el ancho de dos descomposiciones de M usando el orden lexicográfico. Por ejemplo, $\{3, 3, 5, 3, 2, 1\} < \{2, 2, 5, 3, 4\}$ pues $\{5, 3, 3, 3, 2, 1\} < \{5, 4, 3, 2, 2\}$.
Se define el ancho de la variedad M como el mínimo de los anchos de todas las descomposiciones de M.
Se dice que una descomposición de M es delgada si su ancho es el ancho de M.

Posición circular delgada

$|cw(E(K))| = 0$

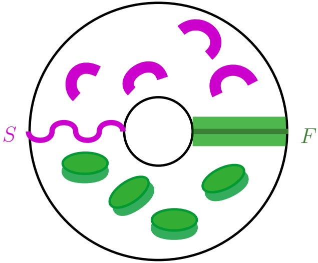


Nudo fibrado



$|cw(E(K))| = 1$

Nudo casifibrado



$|cw(E(K))| \geq 2 \Rightarrow$ Nudo no casifibrado

Posición circular delgada

Teorema (F. Manjarrez-Gutiérrez, 2009)

Si $(E(K), \mathcal{D})$ está en posición circular delgada, entonces

- *Cada F_i es incompresible en $E(K)$.*
- *Cada S_i es débilmente incompresible en $E(K)$.*

Corolario

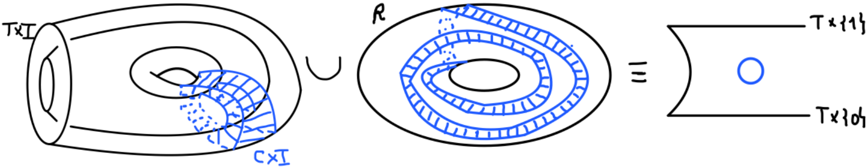
Si K es un nudo no casifibrado, entonces K tiene al menos 2 superficies de Seifert incompresibles ajenas.

Observación

Supongamos que T es una superficie de género uno con una componente frontera. Consideremos $T \times [0,1]$. Sea C un anillo en T cuyo corazón es una curva esencial en T. Entonces $C \times [0,1]$ es un toro sólido.
Sea R un toro sólido y

$$H = (T \times [0,1] \backslash int(C \times [0,1])) \cup R$$

pegados por sus fronteras de forma que $C \times \{0\}$ se identifica con un anillo en ∂R que da dos o más vueltas longitudinalmente.

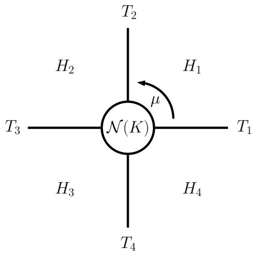


Puede probarse que H es un cubo con asas de género dos.

Construyendo una familia de nudos no casifibrados

Supongamos que K es un nudo con las siguientes propiedades:

- Hay 4 superficies de Seifert T_1, T_2, T_3, T_4 ajenas y no isótopicas en $E(K)$ todas ellas de género uno.



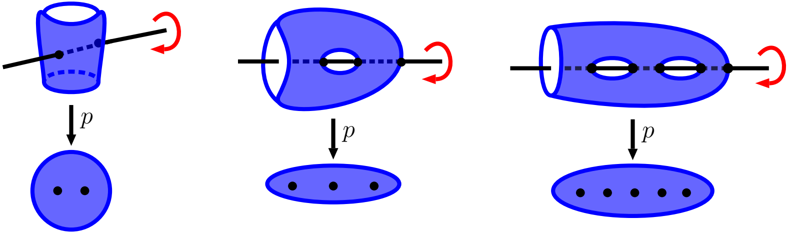
- H_i es un cubo con asas de género dos como en la observación.
- Los corazones de los anillos $C_i \times \{1\}$ y $C_{i+1} \times \{0\}$ se intersectan en un punto.

Teorema (Eudave-Muñoz, Guzmán-Tristán, Ramírez-Losada)

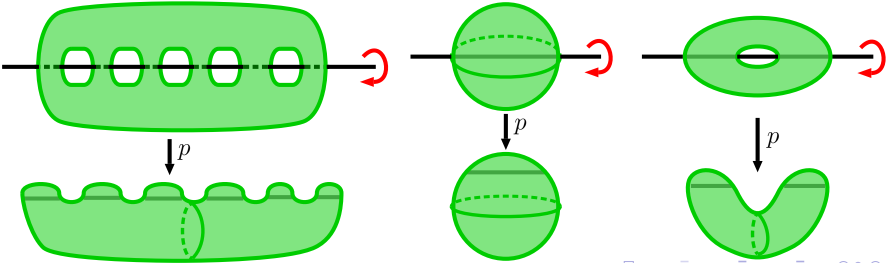
Existe una familia infinita de nudos hiperbólicos $K(\ell, m, n)$ que satisfacen las propiedades de arriba.

Cubiertas dobles ramificadas.

Superficies



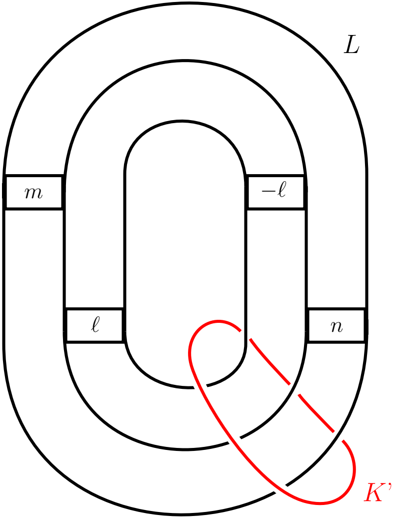
3-variedades



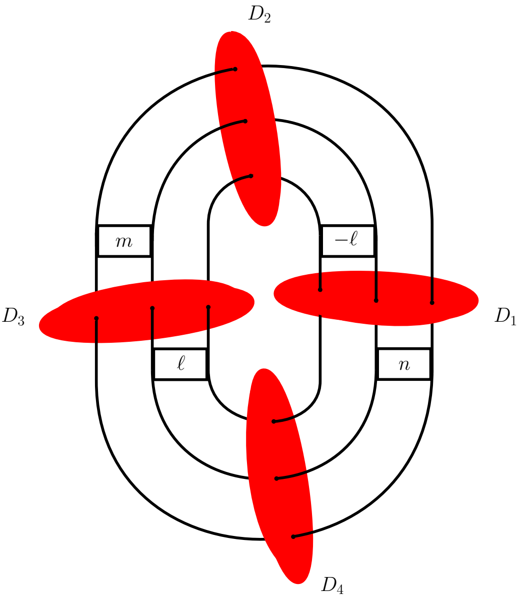
Sea $p \colon S^3 \to S^3$ la doble cubierta ramificada sobre L

$|\ell|, |m|, |n| \geq 2$

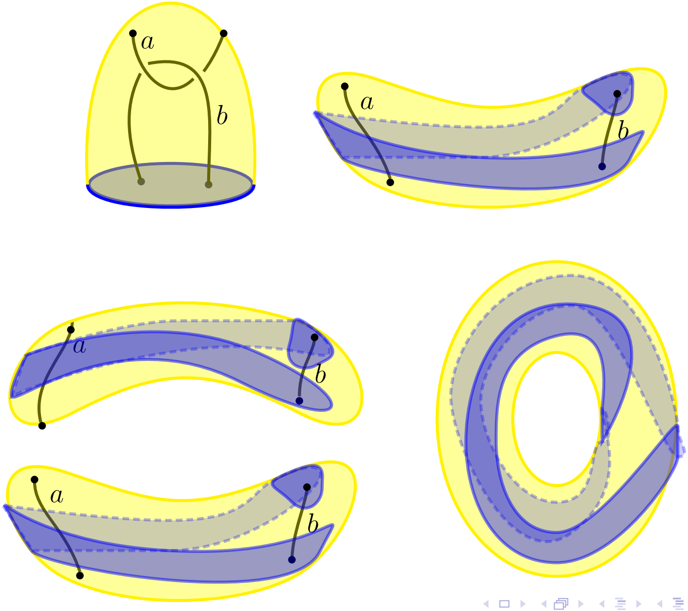
$K := K(\ell, m, n) = p^{-1}(K')$



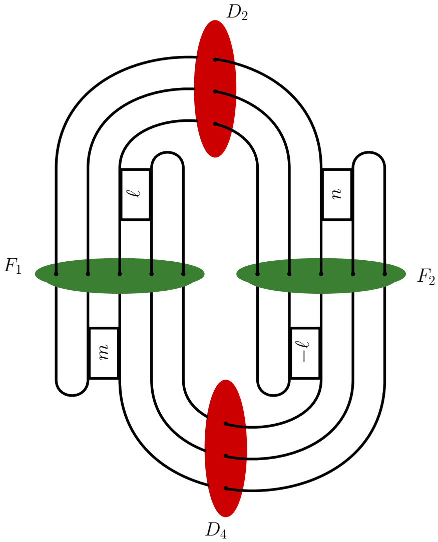
$p^{-1}(D_i)$ son superficies de Seifert para K

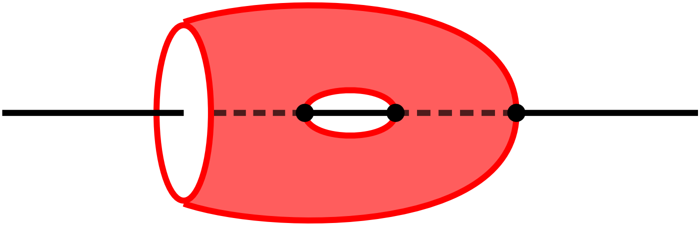


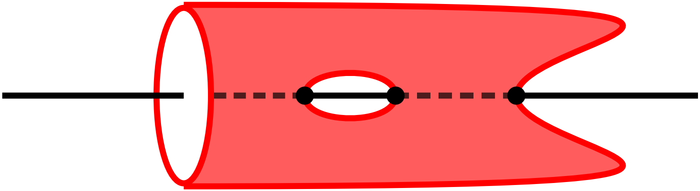
Las superficies de Seifert obtenidas no son isotópicas

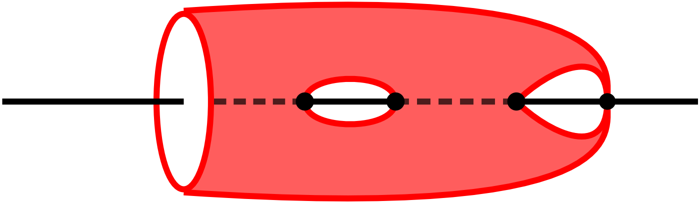


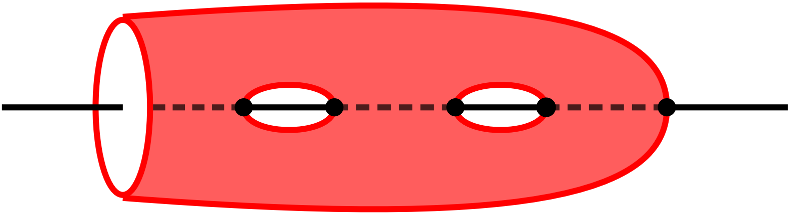
$E(K)$ admite una descomposición circular de ancho $\{3, 3\}$.

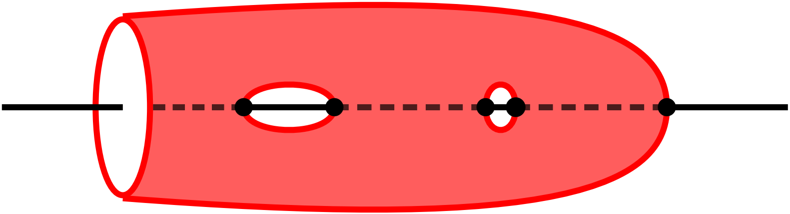


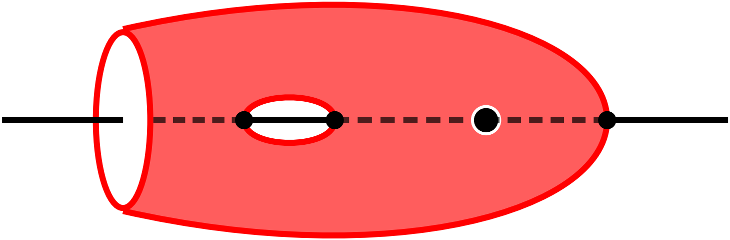


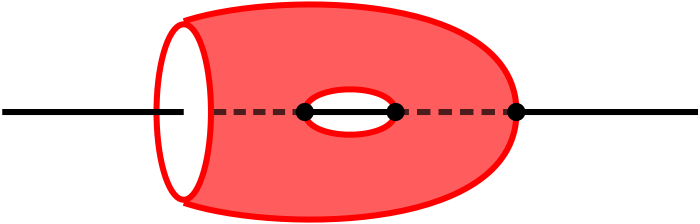












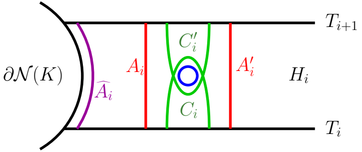
Teorema principal

Teorema (Eudave-Muñoz, Guzmán-Tristán, Ramírez-Losada)
Existe una familia infinita de nudos hiperbólicos de género uno que no son casifibrados.

Idea de la prueba. La familia de nudos $K(\ell, m, n)$ tiene género uno y su exterior admite una descomposición de ancho $\{3, 3\}$. Suponiendo que son casifibrados, su exterior admitiría una descomposición de ancho $\{3\}$.

Algunos lemas

- K es hiperbólico.
- Para cada $i = 1, \dots, 4$, existen salvo isotopía, cinco anillos incompresibles propiamente encajados en H_i, cuyas fronteras están en $T_i \sqcup T_{i+1}$, y que no son paralelos a T_i o T_{i+1}.



- Si A es un anillo incompresible, propiamente ancajado en $H_i \cup H_{i+1}$ y cuya frontera está en $T_i \cup T_{i+2}$, entonces es paralelo a un anillo en $\partial\mathcal{N}(K)$, o puede isotoparse para estar en H_i o H_{i+1}.
- El exterior de K, no puede contener otra superficie de Seifert de género uno para K y no isotópica a alguna T_i; $i = 1, \dots, 4$.

Si $E(K)$ tuviera una descomposición circular de ancho $\{3\}$.