

Dimensión virtualmente abeliana de gráficas de grupos

Décima Jornada de Geometría, Topología y Dinámica

Porfirio Leandro León Álvarez

Universidad Nacional Autónoma de México
Instituto de Matemáticas
porfirio.leon@im.unam.mx

16 de junio

Índice de la plática

Espacios clasificantes para familias y aplicaciones

Dimensión geométrica para familias

Dimensión cohomológica vs dimensión geométrica

Gráfica de grupos y su grupo fundamental

Dimensión virtualmente abeliana de gráficas de grupos

Familias de subgrupos

Definición (Familia de subgrupos)

Sea G un grupo, una colección de subgrupos $\mathcal{F}$ de G es una familia si es no vacía, es cerrado bajo conjugación y tomar subgrupos.

Ejemplos

1. La familia que consiste sólo del subgrupo trivial $\{1\}$.
2. La familia F_{fin} que consiste de todos los subgrupos finitos de G .
3. La familia V_{cyc} que consiste de todos los subgrupos virtualmente cíclicos de G .
4. Para n fijo. Definimos la familia

$$\mathcal{F}_n = \{H < G \mid H \text{ es virtualmente } \mathbb{Z}^r \text{ para algún } 0 \leq r \leq n\}.$$

G-CW-complejos

Definición (G-CW-complejo)

Un G-CW-complejo X , es un CW-complejo tal que:

- i) G actúa en X y la acción es celular.
- ii) Si $g \in G$ fija una célula como conjunto, entonces la fija puntualmente.

Ejemplos

A S^2 le podemos dar una estructura de $\mathbb{Z}_2$ -CW-complejo con la acción antipodal.

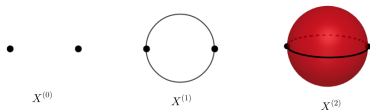


Figura: Una estructura de $\mathbb{Z}_2$ -CW-complejo a S^2 .

Espacios clasificantes para familias

Definición (Espacio clasificante para familias)

Sea G un grupo y $\mathcal{F}$ una familia de G . Decimos que un G -CW-complejo X es un modelo para el espacio clasificante $E_{\mathcal{F}}G$ si se satisface:

1. Para todo $x \in X$, $G_x \in \mathcal{F}$.
2. El conjunto de puntos fijos $X^H = \{x \in X : hx = x \ \forall h \in H\}$ es contráctil siempre que H pertenezca a $\mathcal{F}$.

Ejemplos

1. Sea G un grupo virtualmente cíclico, entonces $\mathbb{R}$ es un modelo para $E_{\mathcal{F}_0}G$.
2. Sea F_n el grupo libre en n generadores, entonces la gráfica de Cayley es modelo para $E_{\mathcal{F}_0}G$.

Algunas aplicaciones de los espacios clasificantes

Los espacios clasificantes aparecen en varios contextos:

- Se pueden utilizar para definir la cohomología relativa de Adams.
- Aparecen en las conjeturas de isomorfismo de Farrell-Jones y Baum-Connes.
- Se pueden utilizar para calcular la complejidad topológica de un grupo.

Por las razones anteriores es importante construir modelos para $E_{\mathcal{F}}G$ concretos y minimales en el sentido de dimensión y/o del número de células.

Dimensión geométrica para familias

Definición ($\mathcal{F}$ -dimensión geométrica)

Sean G un grupo y $\mathcal{F}$ una familia de subgrupos de G . Definimos la $\mathcal{F}$ -dimensión geométrica de G como

$$\mathrm{gd}_{\mathcal{F}}(G) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid \text{existe un modelo para } E_{\mathcal{F}}G \text{ de dimensión } n\}.$$

Ejemplos

1. $\mathrm{gd}_{\mathcal{F}}(G) = 0$ si y sólo si $G \in \mathcal{F}$.
2. (Stallings and Swan 1969, M. J. Dunwoody. 1979)
 $\mathrm{gd}_{\mathcal{F}_0}(G) = 1$ si sólo si G es virtualmente libre y no finito.
3. $\mathrm{gd}_{\mathcal{F}_k}(\mathbb{Z}^n) = n + k$ para $k < n$.

Dimensión cohomológica vs dimensión geométrica

Sean G un grupo y $\mathcal{F}$ una familia de G . La $\mathcal{F}$ -dimensión geométrica tiene su contra parte algebraica, la $\mathcal{F}$ -dimensión cohomológica $cd_{\mathcal{F}}(G)$ que satisface

$$cd_{\mathcal{F}}(G) \leq gd_{\mathcal{F}}(G) \leq \max\{3, dc_{\mathcal{F}}(G)\}. \quad (1)$$

Si $cd_{\mathcal{F}}(G) \geq 3$ entonces $cd_{\mathcal{F}}(G) = gd_{\mathcal{F}}(G)$.

Pregunta abierta: ¿Existe un grupo con $cd(G) = 2$ y $gd(G) = 3$?

Pregunta abierta: ¿Es cierto que $cd_{\mathcal{F}}(G) = 1$ si y sólo si $gd_{\mathcal{F}}(G) = 1$?

Dimensión cohomológica vs dimensión geométrica

Sean G un grupo y $\mathcal{F}$ una familia de G . La $\mathcal{F}$ -dimensión geométrica tiene su contra parte algebraica, la $\mathcal{F}$ -dimensión cohomológica $cd_{\mathcal{F}}(G)$ que satisface

$$cd_{\mathcal{F}}(G) \leq gd_{\mathcal{F}}(G) \leq \max\{3, dc_{\mathcal{F}}(G)\}. \quad (1)$$

Si $cd_{\mathcal{F}}(G) \geq 3$ entonces $cd_{\mathcal{F}}(G) = gd_{\mathcal{F}}(G)$.

Pregunta abierta: ¿Existe un grupo con $cd(G) = 2$ y $gd(G) = 3$?

Pregunta abierta: ¿Es cierto que $cd_{\mathcal{F}}(G) = 1$ si y sólo si $gd_{\mathcal{F}}(G) = 1$?

Dimensión cohomológica vs dimensión geométrica

Sean G un grupo y $\mathcal{F}$ una familia de G . La $\mathcal{F}$ -dimensión geométrica tiene su contra parte algebraica, la $\mathcal{F}$ -dimensión cohomológica $cd_{\mathcal{F}}(G)$ que satisface

$$cd_{\mathcal{F}}(G) \leq gd_{\mathcal{F}}(G) \leq \max\{3, dc_{\mathcal{F}}(G)\}. \quad (1)$$

Si $cd_{\mathcal{F}}(G) \geq 3$ entonces $cd_{\mathcal{F}}(G) = gd_{\mathcal{F}}(G)$.

Pregunta abierta: ¿Existe un grupo con $cd(G) = 2$ y $gd(G) = 3$?

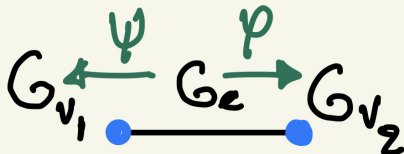
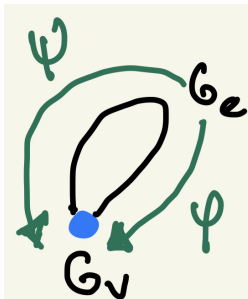
Pregunta abierta: ¿Es cierto que $cd_{\mathcal{F}}(G) = 1$ si y sólo si $gd_{\mathcal{F}}(G) = 1$?

Gráfica de grupos

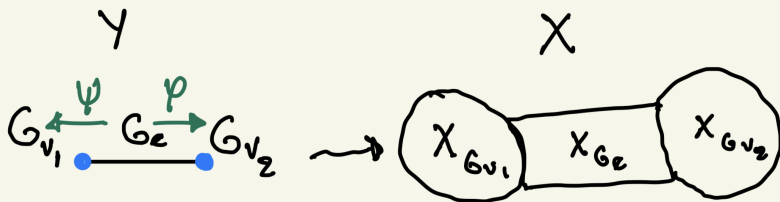
Definición (Gráfica de grupos)

Un gráfica de grupos $\mathcal{Y}$ consiste de:

- Una gráfica conexa Y ;
- Un grupo G_v para cada $v \in V(Y)$ y un grupo G_e para cada $e = \{v, w\} \in E(Y)$;
- monomorfismos $\varphi: G_e \rightarrow G_i$ donde $i = v, w$



El grupo fundamental de una graficas de grupos



$$\Rightarrow \pi_1(Y) := \pi_1(X, x_0) = G_{v_1} *_{G_e} G_{v_2}$$

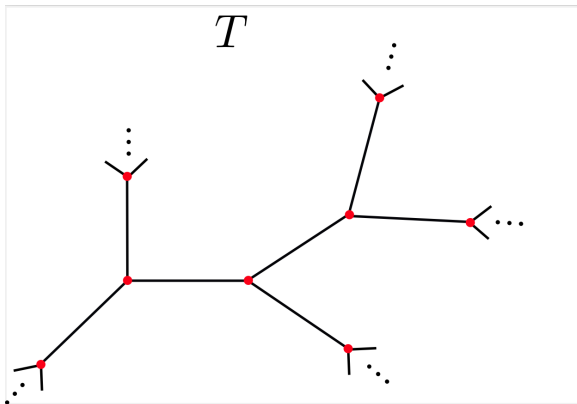
Ejemplos de grupos que se realizan como $\pi_1(Y)$

- El producto libre amalgamado de grupos se puede realizar como el grupo fundamental de una gráfica de grupos.
- El grupo libre F_n .
- El grupo fundamental de una 3-variedad.

El árbol de Bass-Serre

Teorema (El árbol de Bass-Serre)

Sea G el grupo fundamental de una gráfica de grupos Y . Entonces existe un árbol T en el que G actúa sin inversiones, los estabilizadores de los vértices son conjugados de los grupos vértices de Y .



Dimensión virtualmente abeliana de gráficas de grupos

Teorema (Cotas para la $\text{gd}_{\mathcal{F}_n}(G)$ de gráficas de grupos)

Sea Y un gráfica de grupos con grupo fundamental G finitamente generado y árbol de Bass-Serre T . Supongamos que la descomposición de G es acilíndrica. Entonces, para todo $k \geq 1$ tenemos

$$\max\{\text{gd}_{\mathcal{F}_k \cap G_v}(G_v), \text{gd}_{\mathcal{F}_k \cap G_e}(G_e) \mid v \in V(Y), e \in E(Y)\} \leq \text{gd}_{\mathcal{F}_k}(G)$$

y

$$\text{gd}_{\mathcal{F}_k}(G) \leq \max\{2, \text{gd}_{\mathcal{F}_k \cap G_v}(G_v), \text{gd}_{\mathcal{F}_k \cap G_e}(G_e) + 1 \mid v \in V(Y), e \in E(Y)\}$$

Idea de la demostración

Sea G el grupo fundamental de una gráfica de grupos como en el enunciado.

¿Cómo calculamos una cota superior de $\text{gd}_{\mathcal{F}_n}(G)$?

Lema auxiliar A. *Sea G un grupo. Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ familias de subgrupos de G tales que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$. Si X es un modelo para $E_{\mathcal{G}}G$, entonces*

$$\text{gd}_{\mathcal{F}}(G) \leq \max\{\text{gd}_{\mathcal{F} \cap G_{\sigma}}(G_{\sigma}) + \dim(\sigma) \mid \sigma \text{ es una célula de } X\}.$$

Idea de la demostración

Sea G el grupo fundamental de una gráfica de grupos como en el enunciado.

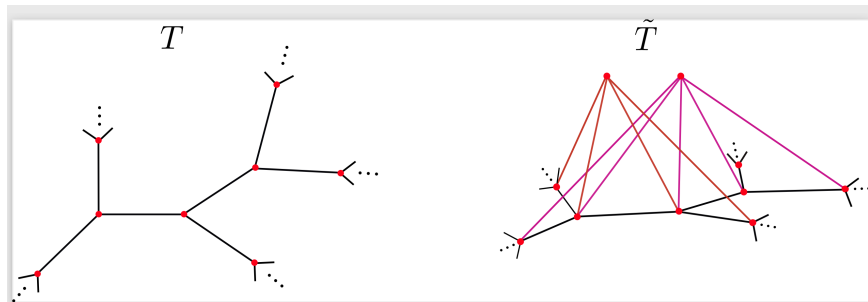
¿Cómo calculamos una cota superior de $\text{gd}_{\mathcal{F}_n}(G)$?

Lema auxiliar A. *Sea G un grupo. Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ familias de subgrupos de G tales que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$. Si X es un modelo para $E_{\mathcal{G}}G$, entonces*

$$\text{gd}_{\mathcal{F}}(G) \leq \max\{\text{gd}_{\mathcal{F} \cap G_{\sigma}}(G_{\sigma}) + \dim(\sigma) \mid \sigma \text{ es una célula de } X\}.$$

Idea de la demostración

Por teoría de Bass-Serre G actúa en un árbol T



$$\mathrm{gd}_{\mathcal{F}_k}(G) \leq \max\{\mathrm{gd}_{\mathcal{F}_k}(G_\sigma) + \dim(\sigma) \mid \sigma \text{ es una célula de } \tilde{T}\}.$$

Resultados

Teorema (L.A. 2023)

Sea Y un gráfica finita de grupos tal que para cada $v \in V(Y)$ el grupo G_v es un grupo virtualmente abeliano infinito y finitamente generado, con $\text{rango}(G_e) < \text{rango}(G_v)$. Supongamos que la descomposición de $G = \pi_1(Y)$ es acilíndrica. Sea $m = \max\{\text{rango}(G_v) \mid v \in V(Y)\}$. Entonces, para $1 \leq k < m$, tenemos $\text{gd}_{\mathcal{F}_k}(G) = m + k$.

Resultados

Teorema (L.A.-Sánchez Saldaña, 2021)

Sea M una 3-variedad conexa, cerrada y orientada. Sean $P_1, P_2, \dots, P_r$ las piezas de la descomposición prima de M .

Denotemos $\Gamma = \pi_1(M)$ y $\Gamma_i = \pi_1(P_i)$. Entonces, para todo $k \geq 2$,

$$\text{gd}_{\mathcal{F}_k}(\Gamma) = \begin{cases} 0 & \text{si } M = \mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3, \\ 2 & \text{si } r \geq 2, \Gamma_i \in \mathcal{F}_k \text{ para todo} \\ & 1 \leq i \leq r \text{ y } \Gamma \text{ no} \\ & \text{es virtualmente cíclico,} \\ \text{máx}\{\text{gd}_{\mathcal{F}_k}(\Gamma_i) | 1 \leq i \leq r\} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Referencias I



Noé Bárcenas.

A survey of Computations of Bredon Cohomology.

arXiv e-prints, page arXiv:2302.10415, February 2023.



Porfirio L. León Álvarez.

Classifying spaces for families of abelian subgroups of braid groups, RAAGs and graphs of abelian groups.

arXiv e-prints, April 2023.



Porfirio L. León Álvarez and Luis Jorge Sánchez Saldaña.

Classifying spaces for the family of virtually abelian subgroups of orientable 3-manifold groups.

Forum Math., 34(5):1277–1296, 2022.

Referencias II



Wolfgang Lück.

Survey on classifying spaces for families of subgroups.

In *Infinite groups: geometric, combinatorial and dynamical aspects*, volume 248 of *Progr. Math.*, pages 269–322.

Birkhäuser, Basel, 2005.



Jean-Pierre Serre.

Trees.

Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003.

Translated from the French original by John Stillwell, Corrected
2nd printing of the 1980 English translation.