

Nudos racionales hiperbólicos

Leydi Guadalupe Hernández López
Tutora: Dra. Fabiola Manjarrez Gutiérrez

Instituto de Matemáticas, UNAM.

Duodécima Jornada de Geometría, Topología y Dinámica.

Contenido

- 1 Nudos toroidales y nudos satélites
- 2 Nudos hiperbólicos
- 3 Nudos Racionales hiperbólicos
- 4 Esbozo de la demostración

Contenido

1 Nudos toroidales y nudos satélites

2 Nudos hiperbólicos

3 Nudos Racionales hiperbólicos

4 Esbozo de la demostración

Nudos

Un nudo K es la imagen de un encaje suave de S^1 a S^3 .

Consideramos los nudos salvo isotopía ambiente.

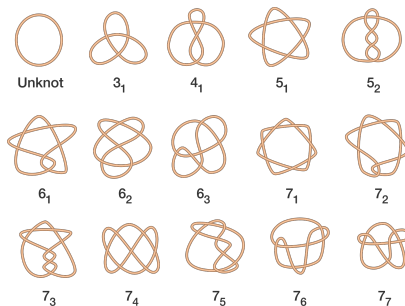


Figura: Tabla de nudos.

Invariantes

El problema fundamental es la clasificación de los nudos.

Invariante

Un invariante de enlaces es una función del conjunto de enlaces a algún otro conjunto conocido.

Invariantes

El problema fundamental es la clasificación de los nudos.

Invariante

Un invariante de enlaces es una función del conjunto de enlaces a algún otro conjunto conocido.

- 1 Número de desanudamiento.
- 2 Polinomio de Jones.
- 3 Polinomio de Alexander.
- 4 Grupo de Nudo.
- 5 Volumen.

Nudos toroidales y satélites

Un *nudo toroidal* es un nudo que puede ser encajado (sin cruces) en el toro no anudado en S^3 .

Un *nudo satélite* es un nudo que se puede encajar en la vecindad regular de otro nudo en S^3 .

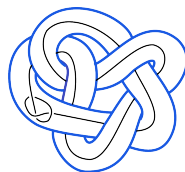
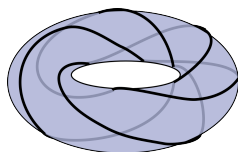


Figura: Nudo toroidal y nudo satélite.

Teorema de Hiperbolización de Thurston [Pur20]

Un nudo es hiperbólico si y sólo si no es un nudo satélite o un nudo toroidal.

Contenido

- 1 Nudos toroidales y nudos satélites
- 2 Nudos hiperbólicos
- 3 Nudos Racionales hiperbólicos
- 4 Esbozo de la demostración

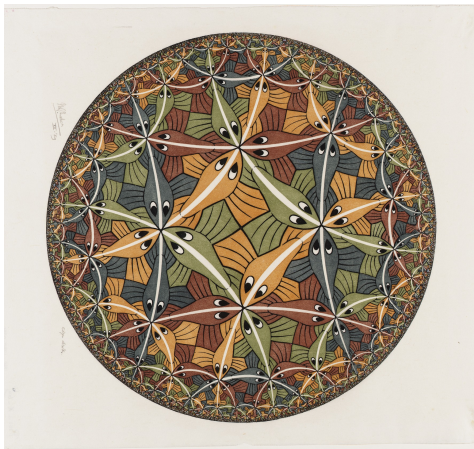


Figura: Plano hiperbólico

Nudo hiperbólico.

Un nudo K es hiperbólico si su complemento $S^3 \setminus K$ admite una estructura hiperbólica completa.

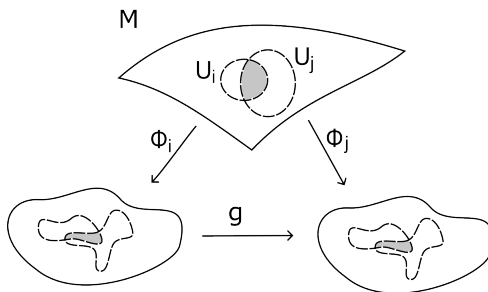


Figura: Estructura geométrica

Contenido

- 1 Nudos toroidales y nudos satélites
- 2 Nudos hiperbólicos
- 3 Nudos Racionales hiperbólicos
- 4 Esbozo de la demostración

Ovillos racionales

Ovillo

Un *ovillo* es una 1-variedad encajada propiamente en la 3-bola B .

Ovillo racional

Un *ovillo racional* es la imagen de cualquiera de los ovillos de la Figura 6 de un homeomorfismo $f : B \rightarrow B$ tal que manda el conjunto $\{NO, NE, SO, SE\}$ en sí mismo.

Ovillos triviales

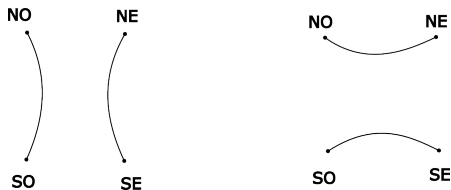


Figura: ∞ (izquierda) y 0 (derecha)

Ovillo racional

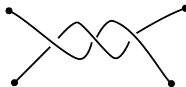
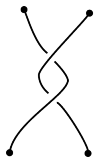
Se llaman ovillos racionales porque pueden ser definidos mediante un número racional

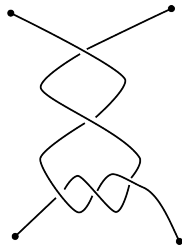
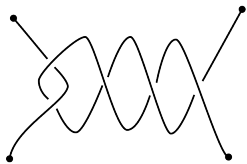
$$[a_n, a_{n-1}, \dots, a_1] = a_n + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_1}}}$$

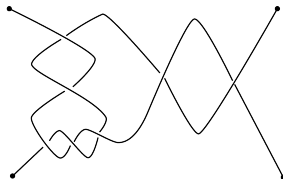
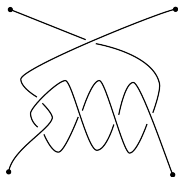
Al ovillo definido por un número racional $[a_n, a_{n-1}, \dots, a_1]$ se denota como $T(a_n, \dots, a_1)$.

Si n es par comenzamos con ∞ de la Figura 6 y si n es impar comenzamos con 0 de la Figura 6.

Ejemplo: Construcción de los ovillos $T(-1, 1, -3, 2)$ $T(2, -2, 3)$.







Ovillo y nudos racionales

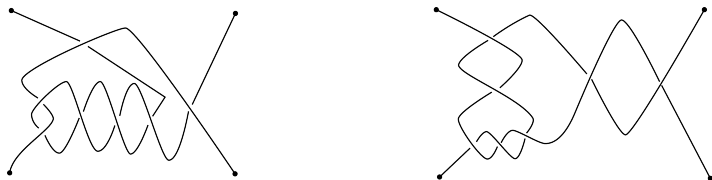


Figura: Ovillo $T(-1, 1, -3, 2)$ (izquierda) y ovillo $T(2, -2, 3)$ (derecha)

Convención: El término de más a la izquierda a_n corresponde a una sucesión de cruces horizontales.

Y consideramos $\frac{1}{0} = \infty$, esto justifica los nombres los ovillos triviales, ver Figura 6.

Numerador y denominador

El *numerador* $N(T)$ de un ovrillo racional es formado al unir NO con NE y SO con SE con un arco simple sin cruces.

El *denominador* $D(T)$ de un ovrillo racional es formado al unir NO con SO y NE con SE con un arco simple sin cruces

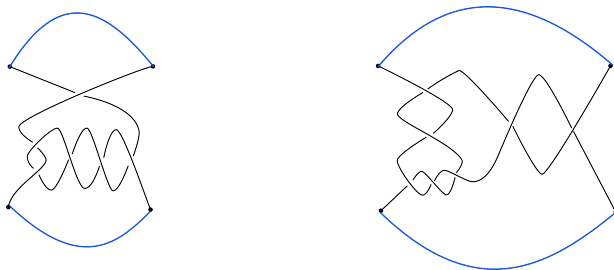


Figura: $N(T(-1, 1, -3, 2))$ y $N(T(2, -2, 3))$

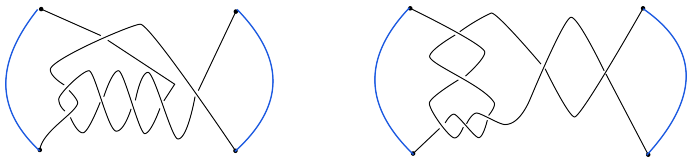


Figura: $D(T(-1, 1, -3, 2))$ y $D(T(2, -2, 3))$

Ovillo racional

Un nudo o enlace racional es el denominador de un ovillo racional

Notación: El nudo o enlace racional que es el denominador $D(T(a_n, \dots, a_1))$ se denota como $K[a_{n-1}, \dots, a_1]$.

Diagrama alternante

Un *diagrama alternante* es un diagrama tal que si seguimos al diagrama en una dirección, los cruces se alternan entre arriba y abajo.

Diagrama reducido

Un *cruce reducible*, es un cruce a través del cual se puede trazar un círculo γ en el plano de proyección, tal que γ coincide con el diagrama en un solo punto, en el cruce.

Un *diagrama reducido* es un diagrama que no contiene cruces reducibles.

Región de torsión

Una *región de torsión* de un diagrama de nudo es una porción máxima del diagrama del nudo donde dos hebras se entrelazan, torciéndose una alrededor de la otra.

De ahora en adelante consideramos $K := K[a_{n-1}, \dots, a_1] \subset S^3$ un nudo o enlace racional y denotamos $C = \sum_{i=1}^{n-1} |a_i|$. Además, asumimos que $a_i < 0$ para todo i , o $a_i > 0$ para todo i y $|a_1| \geq 2$ y $|a_{n-1}| \geq 2$.

Teorema

Teorema

Un nudo o enlace racional con un diagrama alternante reducido con al menos dos regiones de torsión es hiperbólico.

Contenido

- 1 Nudos toroidales y nudos satélites
- 2 Nudos hiperbólicos
- 3 Nudos Racionales hiperbólicos
- 4 Esbozo de la demostración

Triangulación del exterior del nudo

Sea $S = S_{0,4}$, la 2-esfera con 4 ponchaduras.

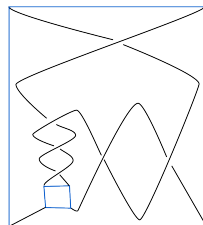
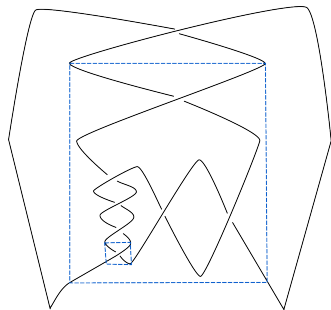


Figura: $N \cong S \times I$

Triangulación del exterior del nudo

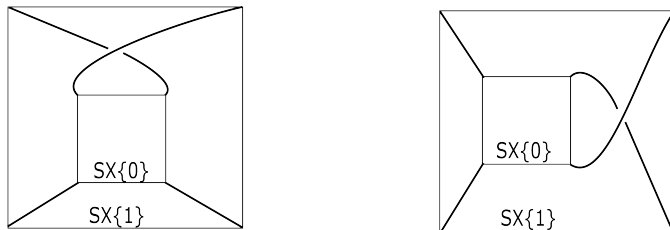


Figura: Cruce vertical (izquierda) y cruce horizontal (derecha).

Triangulación del exterior del nudo

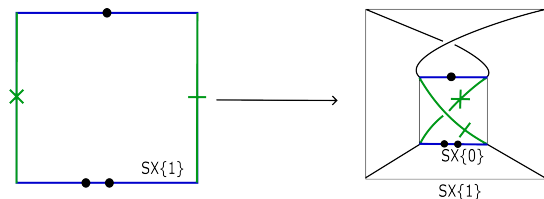


Figura: Isotopía de aristas verticales de $S_i \times \{1\}$ a $S_i \times \{0\}$.

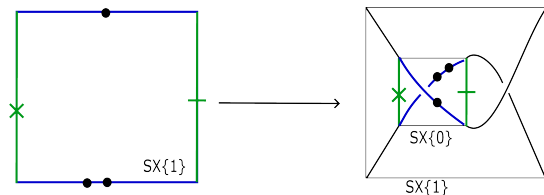


Figura: Isotopía de aristas horizontales de $S_i \times \{1\}$ a $S_i \times \{0\}$.

Triangulación del exterior del nudo

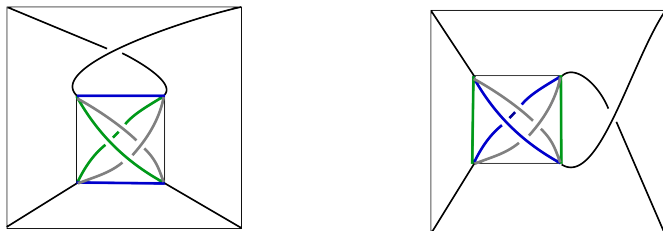


Figura: Identificación de las aristas en $S_i \times I$ y $S_{i+1} \times I$.

Triangulación del exterior del nudo

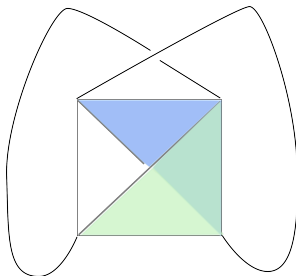


Figura: Pegado de las caras exteriores.

Esta triangulación tiene $2(C - 3)$ tetraedros, C es el número de cruces del nudo.

Triangulación de la cúspide

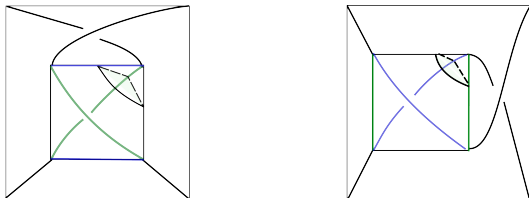


Figura: Meridiano en cruce vertical (izquierda) y cruce horizontal (derecha).

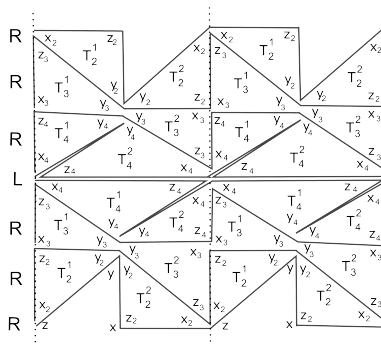
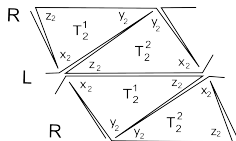


Figura: Triangulación

Definición

Una *estructura angular* para una triangulación $\mathbf{T}$ de una variedad M es una colección de ángulos diedrales interiores, donde cada arista de cada tetraedro satisface las siguientes condiciones:

- 1 Aristas opuestas del tetraedro tienen el mismo ángulo.
- 2 Los ángulos diedrales se encuentran en $(0, \pi)$.
- 3 En cada vértice, la suma de los ángulos diedrales de las aristas que se encuentran en dicho vértice es π .
- 4 La suma de los ángulos alrededor de una clase de arista en M es 2π

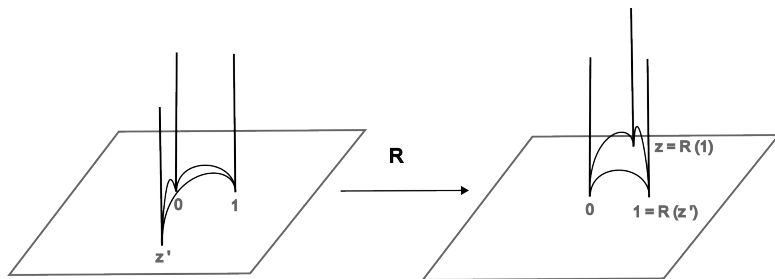


Figura: Invariante de arista z

Un ángulo diedral es el argumento de z .

Definición

El *volumen funcional* $\mathcal{V} : \mathcal{A}(T) \rightarrow \mathbb{R}$ está definido por

$$\mathcal{V}(a_1, \dots, a_{3n}) = \sum_{i=1}^{3n} \Lambda(a_i).$$

Donde $\Lambda(\theta)$ es la *función Lobachevsk*

$$\Lambda(\theta) = - \int_0^\theta \log |2senu| du.$$

Teorema

Toda 3-variedad que admite una estructura angular es hiperbólica.

Teorema

Sea M una 3-variedad orientable cuya frontera consiste de toros. con una triangulación ideal $\mathbf{T}$. Si un punto $p \in \mathcal{A}(\mathbf{T})$ es un punto crítico para el volumen funcional $\mathcal{V}$, entonces los tetraedros ideales hiperbólicos obtenidos de la estructura angular p da a M una estructura hiperbólica completa.

- 1 Para un nudo o enlace racional con al menos dos regiones de torsión el espacio de estructuras angulares para la triangulación $\mathcal{T}$ es no vacía.
- 2 Para los enlaces racionales con al menos dos regiones de torsión, el volumen funcional $\mathcal{V} : \mathcal{A}(\mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}$ no puede tener un máximo en la frontera de estructuras angulares.

Volumen de un nudo

Un tetraedro ideal hiperbólico t está definido por 3 ángulos α, β, γ y su volumen V es

$$V(t) = \Lambda(\alpha) + \Lambda(\beta) + \Lambda(\gamma)$$

Si el complemento de un nudo hiperbólico K tiene una triangulación de n tetraedros ideales t_i , entonces, el volumen del nudo es

$$V(K) = \sum_{i=1}^n V(t_i)$$

[Pur20] y [RAR94].



Jessica S Purcell, *Hyperbolic knot theory*, vol. 209, American Mathematical Soc., 2020.



John G Ratcliffe, S Axler, and KA Ribet, *Foundations of hyperbolic manifolds*, vol. 149, Springer, 1994.