Grupos finitamente generados actuando en árboles

Francisco Nicolás

Avril 2022

Jornadas de Geometría, Topología y Dinámica

Motivación

Sea $f : X \to B$ una submersión holomorfa,

Motivación

Sea $f : X \to B$ una submersión holomorfa, propia,

Motivación

Sea $f : X \to B$ una submersión holomorfa, propia, que no es una fibración holomorfa localmente trivial

Motivación

Sea $f : X \to B$ una submersión holomorfa, propia, que no es una fibración holomorfa localmente trivial y cuya fibra es una superficie orientada S de género $g \geq 2$.

Motivación

Sea $f : X \to B$ una submersión holomorfa, propia, que no es una fibración holomorfa localmente trivial y cuya fibra es una superficie orientada S de género $g \geq 2$.

Pregunta

Qué se puede decir de la monodromía $\pi_1(B) \to MCG(S)$ *?*

Motivación

Sea $f : X \to B$ una submersión holomorfa, propia, que no es una fibración holomorfa localmente trivial y cuya fibra es una superficie orientada S de género $g \geq 2$.

Pregunta

Qué se puede decir de la monodromía $\pi_1(B) \to MCG(S)$?

Teorema (Shiga, 1997)

Si X es una superficie compleja y B es una superficie hiperbólica,

Motivación

Sea $f : X \to B$ una submersión holomorfa, propia, que no es una fibración holomorfa localmente trivial y cuya fibra es una superficie orientada S de género $g \geq 2$.

Pregunta

Qué se puede decir de la monodromía $\pi_1(B) \to MCG(S)$?

Teorema (Shiga, 1997)

Si X es una superficie compleja y B es una superficie hiperbólica, entonces la imágen de la monodromía $\pi_1(B) \to MCG(S)$ es infinita

Motivación

Sea $f : X \to B$ una submersión holomorfa, propia, que no es una fibración holomorfa localmente trivial y cuya fibra es una superficie orientada S de género $g \geq 2$.

Pregunta

Qué se puede decir de la monodromía $\pi_1(B) \to MCG(S)$?

Teorema (Shiga, 1997)

Si X es una superficie compleja y B es una superficie hiperbólica, entonces la imágen de la monodromía $\pi_1(B) \to MCG(S)$ es infinita y no preserva la clase d'isotopía de una curva simple cerrada en S.

Hipótesis generales

Sean G y Γ dos grupos finitamente generados.

Hipótesis generales

Sean G y Γ dos grupos finitamente generados. Supongamos que

- $G \lhd \Gamma$

Hipótesis generales

Sean G y Γ dos grupos finitamente generados. Supongamos que

- $G \triangleleft \Gamma$
- Existe un árbol T y una acción $G \curvearrowright T$

Hipótesis generales

Sean G y Γ dos grupos finitamente generados. Supongamos que

- $G \lhd \Gamma$
- Existe un árbol T y una acción $G \curvearrowright T$

Preguntas

1. *¿Bajo qué condiciones podemos extender la acción $G \curvearrowright T$ al grupo Γ ?*

Hipótesis generales

Sean G y Γ dos grupos finitamente generados. Supongamos que

- $G \lhd \Gamma$
- Existe un árbol T y una acción $G \curvearrowright T$

Preguntas

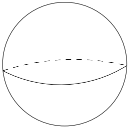
1. *¿Bajo qué condiciones podemos extender la acción $G \curvearrowright T$ al grupo Γ ?*
2. *¿Qué se puede decir de Γ en este caso ?*

Grupos de superficie

Recordemos que las superficies cerradas orientadas son :

Grupos de superficie

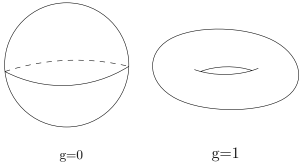
Recordemos que las superficies cerradas orientadas son :



g=0

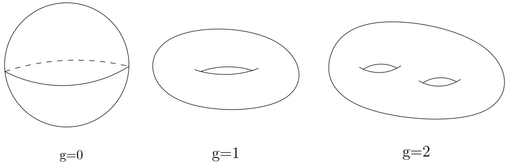
Grupos de superficie

Recordemos que las superficies cerradas orientadas son :



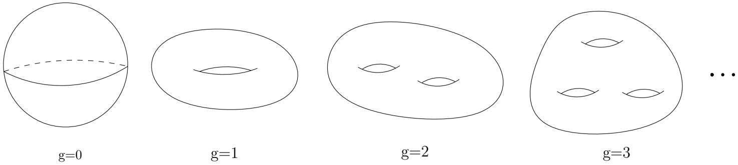
Grupos de superficie

Recordemos que las superficies cerradas orientadas son :



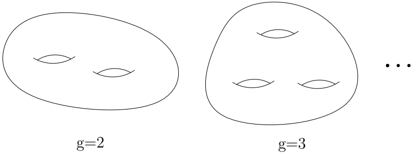
Grupos de superficie

Recordemos que las superficies cerradas orientadas son :



Grupos de superficie

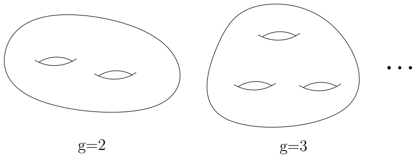
Recordemos que las superficies cerradas orientadas son :



Para el resto de la plática
Superficie $:=$ superficie cerrada orientada de género $g \geq 2$.

Grupos de superficie

Recordemos que las superficies cerradas orientadas son :



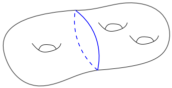
Para el resto de la plática
Superficie $:=$ superficie cerrada orientada de género $g \geq 2$.

Definición

Un grupo G es llamado grupo de superficie si podemos obtenerlo como el grupo fundamental de una superficie.

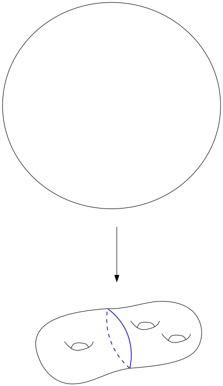
Árbol dual de una curva simple cerrada en una superficie

Sea S una superficie y sea γ una curva simple cerrada en S



Árbol dual de una curva simple cerrada en una superficie

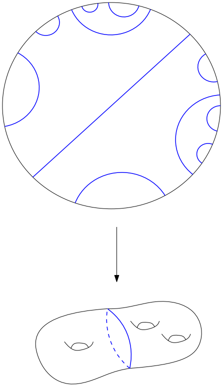
Sea S una superficie y sea γ una curva simple cerrada en S



- Consideramos el cubriente universal $p : \mathbb{H}^2 \to S$.

Árbol dual de una curva simple cerrada en una superficie

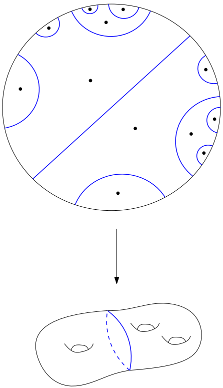
Sea S una superficie y sea γ una curva simple cerrada en S



- Consideramos el cubriente universal $p : \mathbb{H}^2 \to S$.
- $\mathcal{E} = \{\hat{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{H}^2 | p \circ \hat{\gamma} = \gamma\}$.

Árbol dual de una curva simple cerrada en una superficie

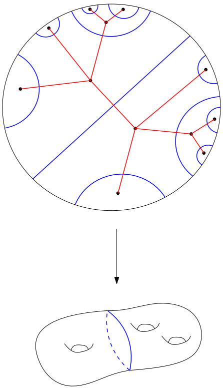
Sea S una superficie y sea γ una curva simple cerrada en S



- Consideramos el cubriente universal $p : \mathbb{H}^2 \to S$.
- $\mathcal{E} = \{\hat{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{H}^2 | p \circ \hat{\gamma} = \gamma\}$.
- Vértices del árbol dual $\mathcal{V} := \pi_0(\mathbb{H}^2 \setminus \mathcal{E})$.

Árbol dual de una curva simple cerrada en una superficie

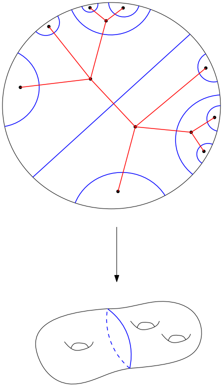
Sea S una superficie y sea γ una curva simple cerrada en S



- Consideramos el cubriente universal $p : \mathbb{H}^2 \to S$.
- $\mathcal{E} = \{\hat{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{H}^2 | p \circ \hat{\gamma} = \gamma\}$.
- Vértices del árbol dual $\mathcal{V} := \pi_0(\mathbb{H}^2 \setminus \mathcal{E})$.
- Aristas del árbol dual $:= \mathcal{E}$.

Árbol dual de una curva simple cerrada en una superficie

Sea S una superficie y sea γ una curva simple cerrada en S

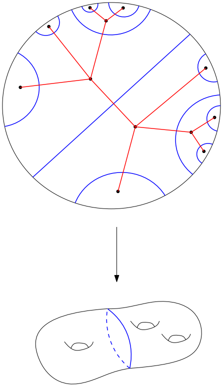


- Consideramos el cubriente universal $p : \mathbb{H}^2 \to S$.
- $\mathcal{E} = \{\hat{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{H}^2 | p \circ \hat{\gamma} = \gamma\}$.
- Vértices del árbol dual $\mathcal{V} := \pi_0(\mathbb{H}^2 \setminus \mathcal{E})$.
- Aristas del árbol dual $:= \mathcal{E}$.

La acción $\pi_1(S) \curvearrowright \mathbb{H}^2$ induce una acción de $\pi_1(S) \curvearrowright T_\gamma = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$.

Árbol dual de una curva simple cerrada en una superficie

Sea S una superficie y sea γ una curva simple cerrada en S



- Consideramos el cubriente universal $p : \mathbb{H}^2 \to S$.
- $\mathcal{E} = \{\hat{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{H}^2 | p \circ \hat{\gamma} = \gamma\}$.
- Vértices del árbol dual $\mathcal{V} := \pi_0(\mathbb{H}^2 \setminus \mathcal{E})$.
- Aristas del árbol dual $:= \mathcal{E}$.

La acción $\pi_1(S) \curvearrowright \mathbb{H}^2$ induce una acción de $\pi_1(S) \curvearrowright T_\gamma = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$.

$T_\gamma :=$ árbol dual de γ

Teoría de Bass-Serre

Sea G un grupo finitamente generado.

Teoría de Bass-Serre

Sea G un grupo finitamente generado. La teoría de Bass-Serre establece un diccionario

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Descomposiciones de } G \\ \text{como un producto} \\ \text{amalgamado o una} \\ \text{extensión HNN.} \end{array} \right\}$$

Teoría de Bass-Serre

Sea G un grupo finitamente generado. La teoría de Bass-Serre establece un diccionario

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Descomposiciones de } G \\ \text{como un producto} \\ \text{amalgamado o una} \\ \text{extensión HNN.} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Acciones de } G \\ \text{en árboles simpliciales,} \\ \text{sin inversiones, transitivas} \\ \text{en el conjunto de aristas.} \end{array} \right\}$$

$$G = A * B$$

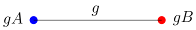
$$G = A * B \quad \Rightarrow \quad G \curvearrowright T$$

$$G = A * B \quad \Rightarrow \quad G \curvearrowright T$$

$$T = (G/A \sqcup G/B, G)$$

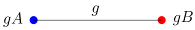
$$G = A * B \quad \Rightarrow \quad G \curvearrowright T$$

$$T = (G/A \sqcup G/B, G)$$



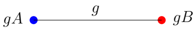
$$G = A * B \quad \Rightarrow \quad G \curvearrowright T$$

$$T = (G/A \sqcup G/B, G)$$



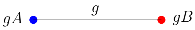
$$G = A * B \quad \Rightarrow \quad G \curvearrowright T$$

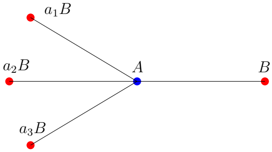
$$T = (G/A \sqcup G/B, G)$$



$$G = A * B \quad \Rightarrow \quad G \curvearrowright T$$

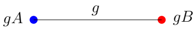
$$T = (G/A \sqcup G/B, G)$$

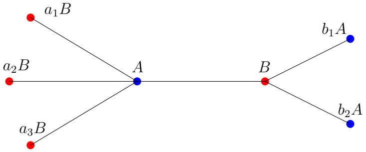




$$G = A * B \quad \Rightarrow \quad G \curvearrowright T$$

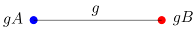
$$T = (G/A \sqcup G/B, G)$$

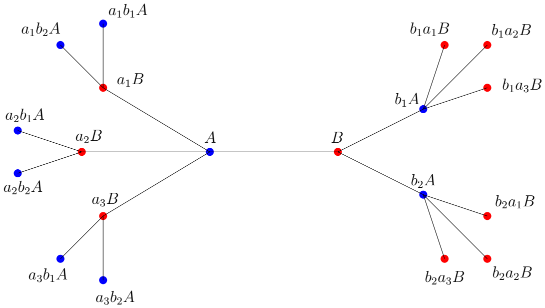




$$G = A * B \quad \Rightarrow \quad G \curvearrowright T$$

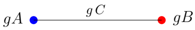
$$T = (G/A \sqcup G/B, G)$$

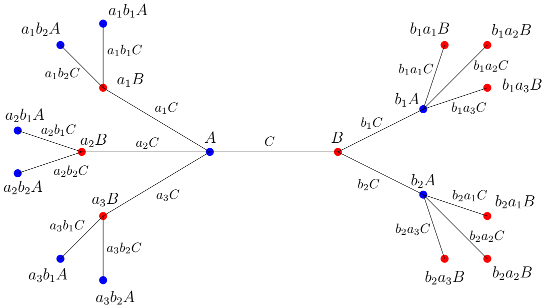




$$G = A *_C B \quad \Rightarrow \quad G \curvearrowright T$$

$$T = (G/A \sqcup G/B, G/C)$$





Estrategia para extender acciones en árboles

Sean G y Γ finitamente generados tales que

$$G \lhd \Gamma$$

Estrategia para extender acciones en árboles

Sean G y Γ finitamente generados tales que

$$G \lhd \Gamma \quad \Rightarrow \quad \Gamma \curvearrowright G \text{ por conjugación}$$

Estrategia para extender acciones en árboles

Sean G y Γ finitamente generados tales que

$$G \lhd \Gamma \quad \Rightarrow \quad \Gamma \curvearrowright G \text{ por conjugación}$$

$$\begin{aligned} \eta : \Gamma &\longrightarrow Aut(G) \\ x &\mapsto (g \mapsto xgx^{-1}) \end{aligned}$$

Estrategia para extender acciones en árboles

Sean G y Γ finitamente generados tales que

$$G \lhd \Gamma \quad \Rightarrow \quad \Gamma \curvearrowright G \text{ por conjugación}$$

$$\eta : \Gamma \longrightarrow Aut(G)$$

$$x \mapsto (g \mapsto xgx^{-1})$$

- $\eta(G) = \mathrm{Inn}(G)$

Estrategia para extender acciones en árboles

Sean G y Γ finitamente generados tales que

$$G \lhd \Gamma \quad \Rightarrow \quad \Gamma \curvearrowright G \text{ por conjugación}$$

$$\begin{aligned} \eta : \Gamma &\longrightarrow Aut(G) \\ x &\mapsto (g \mapsto xgx^{-1}) \end{aligned}$$

- $\eta(G) = \mathrm{Inn}(G)$
- Si el centro de G es trivial, i.e. si $Z(G) = \{g \in G | gx = xg \, \forall \, x \in G\} = 1$

Estrategia para extender acciones en árboles

Sean G y Γ finitamente generados tales que

$$G \lhd \Gamma \quad \Rightarrow \quad \Gamma \curvearrowright G \text{ por conjugación}$$

$$\begin{aligned} \eta : \Gamma &\longrightarrow Aut(G) \\ x &\mapsto (g \mapsto xgx^{-1}) \end{aligned}$$

- $\eta(G) = \mathrm{Inn}(G)$
- Si el centro de G es trivial, i.e.
  si $Z(G) = \{g \in G | gx = xg \, \forall \, x \in G\} = 1 \Rightarrow \eta_{\restriction_G}$ es injectiva

Estrategia para extender acciones en árboles

Sean G y Γ finitamente generados tales que

$$G \lhd \Gamma \quad \Rightarrow \quad \Gamma \curvearrowright G \text{ por conjugación}$$

$$\begin{aligned} \eta : \Gamma &\longrightarrow Aut(G) \\ x &\mapsto (g \mapsto xgx^{-1}) \end{aligned}$$

- $\eta(G) = \mathrm{Inn}(G)$
- Si el centro de G es trivial, i.e.
  si $Z(G) = \{g \in G | gx = xg \,\forall\, x \in G\} = 1 \Rightarrow \eta_{\restriction_G}$ es injectiva
  $$\{G \curvearrowright T\} \Leftrightarrow \{\mathrm{Inn}(G) \curvearrowright T\}$$

Estrategia para extender acciones en árboles

Sean G y Γ finitamente generados tales que

$$G \lhd \Gamma \quad \Rightarrow \quad \Gamma \curvearrowright G \text{ por conjugación}$$

$$\eta : \Gamma \longrightarrow Aut(G)$$
$$x \mapsto (g \mapsto xgx^{-1})$$

- $\eta(G) = \mathrm{Inn}(G)$
- Si el centro de G es trivial, i.e. si $Z(G) = \{g \in G | gx = xg \,\forall\, x \in G\} = 1 \Rightarrow \eta_{\restriction_G}$ es injectiva
$$\{G \curvearrowright T\} \Leftrightarrow \{\mathrm{Inn}(G) \curvearrowright T\}$$

Estrategia

Identificando G con su grupo de automorfismos interiores, buscamos extender la acción de $\mathrm{Inn}(G)$ sobre T a un grupo más grande de automorfismos de G.

Sea $G = A *_C B$, tal que C es subgrupo propio de A y B

Sea $G = A *_C B$, tal que C es subgrupo propio de A y B y sea T su árbol de Bass-Serre.

Sea $G = A *_C B$, tal que C es subgrupo propio de A y B y sea T su árbol de Bass-Serre.

Lema 1

Supongamos que $\varphi : G \to G$ es un automorfismo de G tal que

$$\varphi(A) = xAx^{-1} \quad \varphi(B) = xBx^{-1} \quad y \quad \varphi(C) = xCx^{-1},$$

para un elemento $x \in G$.

Sea $G = A *_C B$, tal que C es subgrupo propio de A y B y sea T su árbol de Bass-Serre.

Lema 1

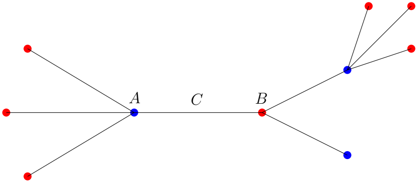
Supongamos que $\varphi : G \to G$ es un automorfismo de G tal que

$$\varphi(A) = xAx^{-1} \quad \varphi(B) = xBx^{-1} \quad y \quad \varphi(C) = xCx^{-1},$$

para un elemento $x \in G$. Entonces φ define una isometría $\overline{\varphi} : T \to T$.

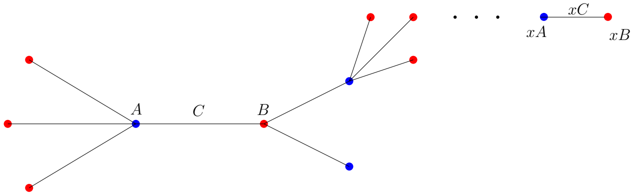
Idea Lemma

Considerar los estabilizadores de vértices y aristas de la acción $G \curvearrowright T$.



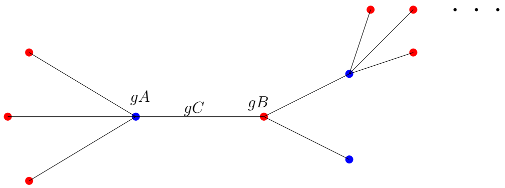
Idea Lemma

Considerar los estabilizadores de vértices y aristas de la acción $G \curvearrowright T$.



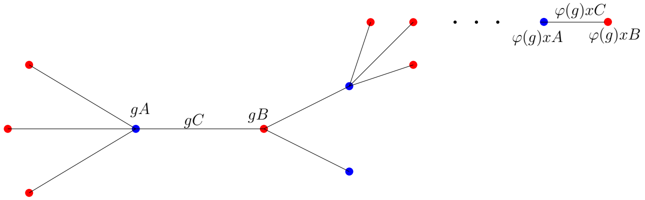
Idea Lemma

Considerar los estabilizadores de vértices y aristas de la acción $G \curvearrowright T$.



Idea Lemma

Considerar los estabilizadores de vértices y aristas de la acción $G \curvearrowright T$.



Sea $x \in G$.

Sea $x \in G$. La conjugación por x define un automorfismo interior de G :

$$\begin{aligned} I : G &\to G \\ g &\mapsto xgx^{-1}, \end{aligned}$$

Sea $x \in G$. La conjugación por x define un automorfismo interior de G :

$$\begin{aligned} I : G &\to G \\ g &\mapsto xgx^{-1}, \end{aligned}$$

$$I(A) = xAx^{-1} \quad I(B) = xBx^{-1} \quad \text{y} \quad I(C) = xCx^{-1}.$$

Sea $x \in G$. La conjugación por x define un automorfismo interior de G :

$$\begin{aligned} I : G &\to G \\ g &\mapsto xgx^{-1}, \end{aligned}$$

$$I(A) = xAx^{-1} \quad I(B) = xBx^{-1} \quad \text{y} \quad I(C) = xCx^{-1}.$$

Lema 1 $\Rightarrow$ I define una isometría $\overline{I} : T \to T$

Sea $x \in G$. La conjugación por x define un automorfismo interior de G :

$$\begin{aligned} I : G &\to G \\ g &\mapsto xgx^{-1}, \end{aligned}$$

$$I(A) = xAx^{-1} \quad I(B) = xBx^{-1} \quad \text{y} \quad I(C) = xCx^{-1}.$$

Lema 1 $\Rightarrow$ I define una isometría $\overline{I} : T \to T$

$$\overline{I}(g \cdot A) = I(g)x \cdot A = (xgx^{-1})x \cdot A = xg \cdot A = x \cdot (g \cdot A).$$

Sea $x \in G$. La conjugación por x define un automorfismo interior de G :

$$\begin{aligned} I : G &\to G \\ g &\mapsto xgx^{-1}, \end{aligned}$$

$$I(A) = xAx^{-1} \quad I(B) = xBx^{-1} \quad \text{y} \quad I(C) = xCx^{-1}.$$

Lema 1 $\Rightarrow$ I define una isometría $\bar{I} : T \to T$

$$\bar{I}(g \cdot A) = I(g)x \cdot A = (xgx^{-1})x \cdot A = xg \cdot A = x \cdot (g \cdot A).$$

$\therefore$ $\bar{I}$ define la misma isometría que la acción de x en T.

$$\therefore G \curvearrowright T \Leftrightarrow \mathrm{Inn}(G) \curvearrowright T$$

Sea $\Lambda < Aut(G)$ tal que $\varphi \in \Lambda$

Sea $\Lambda < Aut(G)$ tal que $\varphi \in \Lambda$ si

$$\varphi(A) = xAx^{-1}, \varphi(B) = xBx^{-1} \text{ y } \varphi(C) = xCx^{-1}$$

para algún $x \in G$.

Sea $\Lambda < Aut(G)$ tal que $\varphi \in \Lambda$ si

$$\varphi(A) = xAx^{-1}, \varphi(B) = xBx^{-1} \text{ y } \varphi(C) = xCx^{-1}$$

para algún $x \in G$.
Si $\varphi, \psi \in \Lambda$, entonces

$$\overline{\varphi \circ \psi} = \overline{\varphi} \circ \overline{\psi} \quad \text{y}$$
$$\overline{\varphi^{-1}} = \overline{\varphi}^{-1}.$$

Sea $\Lambda < Aut(G)$ tal que $\varphi \in \Lambda$ si

$$\varphi(A) = xAx^{-1}, \varphi(B) = xBx^{-1} \text{ y } \varphi(C) = xCx^{-1}$$

para algún $x \in G$.
Si $\varphi, \psi \in \Lambda$, entonces

$$\overline{\varphi \circ \psi} = \overline{\varphi} \circ \overline{\psi} \quad \text{y}$$
$$\overline{\varphi^{-1}} = \overline{\varphi}^{-1}.$$

Lema 2

Si $G \lhd \Gamma$ y la imagen de $\Gamma \to Aut(G)$ está contenida en Λ, entonces la acción $G \curvearrowright T$ se extiende a Γ.

Sean Γ un grupo finitamente generado y S una superficie tales que $\pi_1(S) \lhd \Gamma$.

Sean Γ un grupo finitamente generado y S una superficie tales que $\pi_1(S) \lhd \Gamma$.

γ una curva simple cerrada en S

Sean Γ un grupo finitamente generado y S una superficie tales que $\pi_1(S) \lhd \Gamma$.

$$\gamma \text{ una curva simple cerrada en } S \Rightarrow \pi_1(S) \curvearrowright T_\gamma$$

Sean Γ un grupo finitamente generado y S una superficie tales que $\pi_1(S) \lhd \Gamma$.

$$\gamma \text{ una curva simple cerrada en } S \Rightarrow \pi_1(S) \curvearrowright T_\gamma$$

Pregunta 1

¿Bajo qué condiciones podemos extender dicha acción a Γ ?

Sean Γ un grupo finitamente generado y S una superficie tales que $\pi_1(S) \lhd \Gamma$.

$$\gamma \text{ una curva simple cerrada en } S \Rightarrow \pi_1(S) \curvearrowright T_\gamma$$

Pregunta 1

¿Bajo qué condiciones podemos extender dicha acción a Γ ?

Proposición (N)

Si la acción por conjugación de Γ sobre $\pi_1(S)$ preserva la clase de conjugación de γ,

Sean Γ un grupo finitamente generado y S una superficie tales que $\pi_1(S) \lhd \Gamma$.

$$\gamma \text{ una curva simple cerrada en } S \Rightarrow \pi_1(S) \curvearrowright T_\gamma$$

Pregunta 1

¿Bajo qué condiciones podemos extender dicha acción a Γ ?

Proposición (N)

Si la acción por conjugación de Γ sobre $\pi_1(S)$ preserva la clase de conjugación de γ,entonces la acción $\pi_1(S) \curvearrowright T_\gamma$ se extiende a un subgrupo de Γ de índice a lo sumo 2.

Definición

- *Una variedad de Kähler es una variedad compleja dotada de una métrica hermitiana cuya parte imaginaria es una 2-forma cerrada*

Definición

- *Una variedad de Kähler es una variedad compleja dotada de una métrica hermitiana cuya parte imaginaria es una* 2*-forma cerrada*
- *Un grupo es llamado grupo de Kähler, si puede ser obtenido como el grupo fundamental de una variedad compacta de Kähler.*

La familia de grupos de Kähler es cerrada bajo dos operaciones :

La familia de grupos de Kähler es cerrada bajo dos operaciones :

- el producto directo

La familia de grupos de Kähler es cerrada bajo dos operaciones :

- el producto directo y
- pasar a un subgrupo de índice finito.

La familia de grupos de Kähler es cerrada bajo dos operaciones :

- el producto directo y
- pasar a un subgrupo de índice finito.

Ejemplos :

La familia de grupos de Kähler es cerrada bajo dos operaciones :

- el producto directo y
- pasar a un subgrupo de índice finito.

Ejemplos :

- $\mathbb{Z}^{2n}$,

La familia de grupos de Kähler es cerrada bajo dos operaciones :

- el producto directo y
- pasar a un subgrupo de índice finito.

Ejemplos :

- $\mathbb{Z}^{2n}$,
- $\pi_1(S)$ donde S es una superficie cerrada orientada

La familia de grupos de Kähler es cerrada bajo dos operaciones :

- el producto directo y
- pasar a un subgrupo de índice finito.

Ejemplos :

- $\mathbb{Z}^{2n}$,
- $\pi_1(S)$ donde S es una superficie cerrada orientada
- grupos finitos (Serre, 58).

Grupos de Kähler actuando en árboles

Teorema (Gromov-Schoen,1992)

Sea X una variedad compacta de Kähler cuyo grupo fundamental Γ actúa en un árbol T.

Grupos de Kähler actuando en árboles

Teorema (Gromov-Schoen,1992)

Sea X una variedad compacta de Kähler cuyo grupo fundamental Γ actúa en un árbol T. Supongamos que

- *T no es trivial ni isomorfo a una línea.*

Grupos de Kähler actuando en árboles

Teorema (Gromov-Schoen,1992)

Sea X una variedad compacta de Kähler cuyo grupo fundamental Γ actúa en un árbol T. Supongamos que

- *T no es trivial ni isomorfo a una línea.*
- *$\Gamma \curvearrowright T$ es minimal y sin puntos fijos en la frontera de T.*

Grupos de Kähler actuando en árboles

Teorema (Gromov-Schoen,1992)

Sea X una variedad compacta de Kähler cuyo grupo fundamental Γ actúa en un árbol T. Supongamos que

- *T no es trivial ni isomorfo a una línea.*
- *$\Gamma \curvearrowright T$ es minimal y sin puntos fijos en la frontera de T.*

Entonces existe una "orbisuperficie hiperbólica" Σ y una función holomorfa suprayectiva con fibras conexas $f : X \to \Sigma$ que induce una secuencia corta exacta

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow \Gamma \longrightarrow \pi_1^{orb}(\Sigma) \longrightarrow 1.$$

Grupos de Kähler actuando en árboles

Teorema (Gromov-Schoen,1992)

Sea X una variedad compacta de Kähler cuyo grupo fundamental Γ actúa en un árbol T. Supongamos que

- *T no es trivial ni isomorfo a una línea.*
- *$\Gamma \curvearrowright T$ es minimal y sin puntos fijos en la frontera de T.*

Entonces existe una "orbisuperficie hiperbólica" Σ y una función holomorfa suprayectiva con fibras conexas $f : X \to \Sigma$ que induce una secuencia corta exacta

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow \Gamma \longrightarrow \pi_1^{orb}(\Sigma) \longrightarrow 1.$$

Además la restricción de la acción $N \curvearrowright T$ es trivial.

Subgrupos normales de grupos de Kähler actuando en árboles

Sean Γ un grupo de Kähler y $G \lhd \Gamma$ tales que

Subgrupos normales de grupos de Kähler actuando en árboles

Sean Γ un grupo de Kähler y $G \lhd \Gamma$ tales que

- G es un grupo finitamente generado con centro trivial,

Subgrupos normales de grupos de Kähler actuando en árboles

Sean Γ un grupo de Kähler y $G \lhd \Gamma$ tales que

- G es un grupo finitamente generado con centro trivial,
- G actúa en un árbol T no trivial ni isomorfo a una línea.

Subgrupos normales de grupos de Kähler actuando en árboles

Sean Γ un grupo de Kähler y $G \lhd \Gamma$ tales que

- G es un grupo finitamente generado con centro trivial,
- G actúa en un árbol T no trivial ni isomorfo a una línea.
- la acción $G \curvearrowright T$ es minimal, fiel y sin puntos fijos en la frontera de T.

Subgrupos normales de grupos de Kähler actuando en árboles

Sean Γ un grupo de Kähler y $G \triangleleft \Gamma$ tales que

- G es un grupo finitamente generado con centro trivial,
- G actúa en un árbol T no trivial ni isomorfo a una línea.
- la acción $G \curvearrowright T$ es minimal, fiel y sin puntos fijos en la frontera de T.

Teorema 1 (N, 2021)

Supongamos que existe $\Gamma_0 < \Gamma$ de índice finito de manera que $G < \Gamma_0$ y la acción $G \curvearrowright T$ se extiende a Γ_0.

Subgrupos normales de grupos de Kähler actuando en árboles

Sean Γ un grupo de Kähler y $G \lhd \Gamma$ tales que

- G es un grupo finitamente generado con centro trivial,
- G actúa en un árbol T no trivial ni isomorfo a una línea.
- la acción $G \curvearrowright T$ es minimal, fiel y sin puntos fijos en la frontera de T.

Teorema 1 (N, 2021)

Supongamos que existe $\Gamma_0 < \Gamma$ de índice finito de manera que $G < \Gamma_0$ y la acción $G \curvearrowright T$ se extiende a Γ_0. Entonces G es virtualmente un grupo de superficie

Subgrupos normales de grupos de Kähler actuando en árboles

Sean Γ un grupo de Kähler y $G \triangleleft \Gamma$ tales que

- G es un grupo finitamente generado con centro trivial,
- G actúa en un árbol T no trivial ni isomorfo a una línea.
- la acción $G \curvearrowright T$ es minimal, fiel y sin puntos fijos en la frontera de T.

Teorema 1 (N, 2021)

Supongamos que existe $\Gamma_0 < \Gamma$ de índice finito de manera que $G < \Gamma_0$ y la acción $G \curvearrowright T$ se extiende a Γ_0. Entonces G es virtualmente un grupo de superficie y existe $\Gamma_1 < \Gamma$ de índice finito tal que

Subgrupos normales de grupos de Kähler actuando en árboles

Sean Γ un grupo de Kähler y $G \lhd \Gamma$ tales que

- G es un grupo finitamente generado con centro trivial,
- G actúa en un árbol T no trivial ni isomorfo a una línea.
- la acción $G \curvearrowright T$ es minimal, fiel y sin puntos fijos en la frontera de T.

Teorema 1 (N, 2021)

Supongamos que existe $\Gamma_0 < \Gamma$ de índice finito de manera que $G < \Gamma_0$ y la acción $G \curvearrowright T$ se extiende a Γ_0. Entonces G es virtualmente un grupo de superficie y existe $\Gamma_1 < \Gamma$ de índice finito tal que

- $G < \Gamma_1$ *y*

Subgrupos normales de grupos de Kähler actuando en árboles

Sean Γ un grupo de Kähler y $G \lhd \Gamma$ tales que

- G es un grupo finitamente generado con centro trivial,
- G actúa en un árbol T no trivial ni isomorfo a una línea.
- la acción $G \curvearrowright T$ es minimal, fiel y sin puntos fijos en la frontera de T.

Teorema 1 (N, 2021)

Supongamos que existe $\Gamma_0 < \Gamma$ de índice finito de manera que $G < \Gamma_0$ y la acción $G \curvearrowright T$ se extiende a Γ_0. Entonces G es virtualmente un grupo de superficie y existe $\Gamma_1 < \Gamma$ de índice finito tal que

- $G < \Gamma_1$ *y*
- $\Gamma_1 \simeq G \times (\Gamma_1/G)$.

Aplicación : Grupos de Kähler y grupos de superficie

Sean Γ un grupo de Kähler y S una superficie tales que $\pi_1(S) \lhd \Gamma$.

Aplicación : Grupos de Kähler y grupos de superficie

Sean Γ un grupo de Kähler y S una superficie tales que $\pi_1(S) \lhd \Gamma$.

Teorema 2 (N, 2021)

Supongamos que la acción por conjugación de Γ sobre $\pi_1(S)$ preserva la clase de conjugación de una curva simple cerrada en S.

Aplicación : Grupos de Kähler y grupos de superficie

Sean Γ un grupo de Kähler y S una superficie tales que $\pi_1(S) \lhd \Gamma$.

Teorema 2 (N, 2021)

Supongamos que la acción por conjugación de Γ sobre $\pi_1(S)$ preserva la clase de conjugación de una curva simple cerrada en S. Entonces existe $\Gamma_1 < \Gamma$ de índice finito tal que

Aplicación : Grupos de Kähler y grupos de superficie

Sean Γ un grupo de Kähler y S una superficie tales que $\pi_1(S) \lhd \Gamma$.

Teorema 2 (N, 2021)

Supongamos que la acción por conjugación de Γ sobre $\pi_1(S)$ preserva la clase de conjugación de una curva simple cerrada en S. Entonces existe $\Gamma_1 < \Gamma$ de índice finito tal que

- $\pi_1(S) < \Gamma_1$

Aplicación : Grupos de Kähler y grupos de superficie

Sean Γ un grupo de Kähler y S una superficie tales que $\pi_1(S) \lhd \Gamma$.

Teorema 2 (N, 2021)

Supongamos que la acción por conjugación de Γ sobre $\pi_1(S)$ preserva la clase de conjugación de una curva simple cerrada en S. Entonces existe $\Gamma_1 < \Gamma$ de índice finito tal que

- $\pi_1(S) < \Gamma_1$ *y*
- $\Gamma_1 \simeq \pi_1(S) \times (\Gamma_1/\pi_1(S))$.

Gracias por su atención !

Bibliografía

- J. Amorós, M. Burger, K. Corlette, D. Kotschick and D. Toledo *Fundamental groups of compact Kähler manifolds*, Mathematical Surveys and Monographs. **44**, American Mathematical Society, Providence, RI, (1996).
- M. Gromov and R. Schoen *Harmonic maps into singular spaces and p-adic superrigidity for lattices in groups of rank one*, Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications Mathématiques, No. 76, (1992), 165–246.
- P. Scott and T. Wall *Topological methods in group theory*, Homological group theory (Proc. Sympos., Durham, 1977), London Math. Soc. Lecture Note Ser., Cambridge Univ. Press, Cambridge-New York. **36**, (1979), 137–203.
- J.P. Serre *Trees*, Springer Monographs in Mathematics, Translated from the French original by John Stillwell, Corrected 2nd printing of the 1980 English translation, Springer-Verlag, Berlin, (2003).
- H. Shiga *On monodromies of holomorphic families of Riemann surfaces and modular transformations*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. **122**, No. 3, (1997), 541–549.