

Flujos de Reeb en dimensión 3 y algunas de sus propiedades genéricas

Ana Rechtman

IRMA Université de Strasbourg

7 de abril de 2022

Suspensiones y secciones

X – campo vectorial (no-singular), ϕ_t su flujo (es decir, $\frac{\partial \phi_t}{\partial t} = X \circ \phi_t$).
 M una variedad compacta sin frontera de dimensión 3.

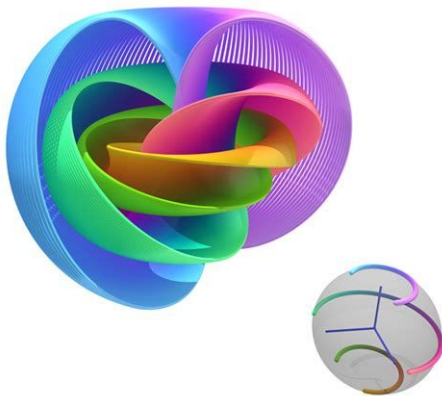
Suspensiones y secciones

X – campo vectorial (no-singular), ϕ_t su flujo (es decir, $\frac{\partial \phi_t}{\partial t} = X \circ \phi_t$).
 M una variedad compacta sin frontera de dimensión 3.

Ejemplo 2 – \mathbb{S}^2 y su flujo geodésico

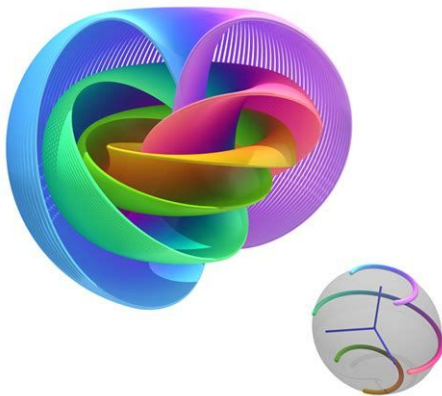
Suspensiones y secciones

Suspensiones y secciones



$$\begin{aligned}\phi_t : \mathbb{S}^3 &\rightarrow \mathbb{S}^3 \\ \phi_t(z_1, z_2) &\mapsto e^{2\pi it}(z_1, z_2).\end{aligned}$$

Suspensiones y secciones



$$\begin{aligned}\phi_t : \mathbb{S}^3 &\rightarrow \mathbb{S}^3 \\ \phi_t(z_1, z_2) &\mapsto e^{2\pi it}(z_1, z_2).\end{aligned}$$

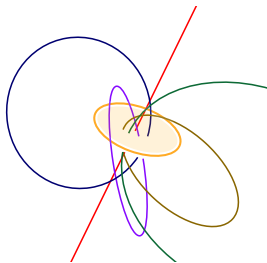
No tiene una sección, pero puede tener secciones con frontera.

Secciones de Birkhoff

Definición (Sección de Birkhoff, 1917)

Sea S una superficie compacta con frontera encajada en M . S es una sección de Birkhoff si

- su interior es transversal a X ;
- su frontera es tangente a X ;
- interseca toda órbita de X en tiempo acotado.



Secciones del flujo de Hopf

Toda órbita del flujo de Hopf es frontera de una sección de Birkhoff que es un disco.

Secciones del flujo de Hopf

Toda órbita del flujo de Hopf es frontera de una sección de Birkhoff que es un disco.

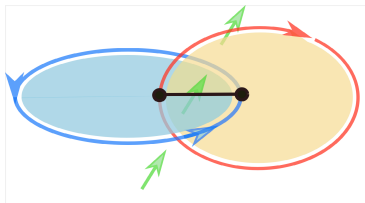
De hecho toda colección finita de órbitas de Hopf es frontera de una sección de Birkhoff.

Secciones del flujo de Hopf

Toda órbita del flujo de Hopf es frontera de una sección de Birkhoff que es un disco.

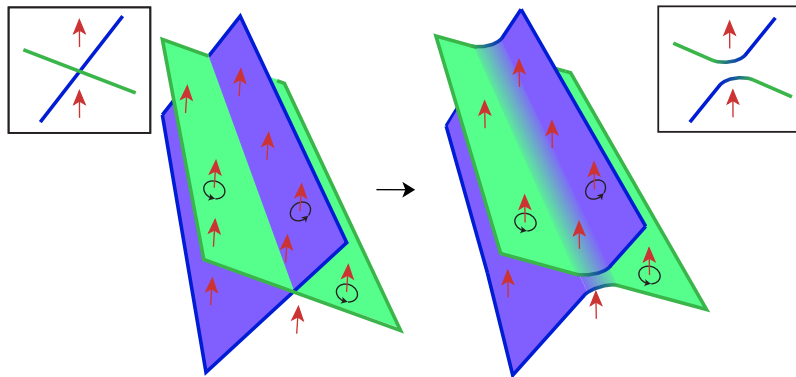
De hecho toda colección finita de órbitas de Hopf es frontera de una sección de Birkhoff.

γ_1, γ_2 dos órbitas periódicas,

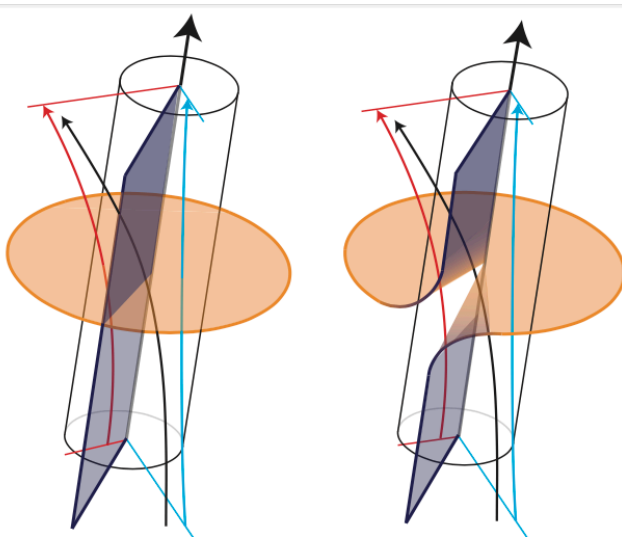


son frontera de una sección de Birkhoff que es un anillo.

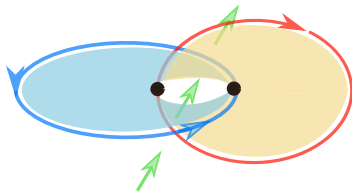
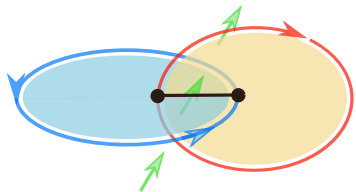
Secciones del flujo de Hopf



Secciones del flujo de Hopf



Secciones del flujo de Hopf



Secciones del flujo de Hopf

Funciona para toda superficie de revolución
con curvatura estrictamente positiva

Secciones de Birkhoff

Ventajas y desventajas:

- La topología de la variedad no nos dice si pueden o no existir secciones de Birkhoff.

Secciones de Birkhoff

Ventajas y desventajas:

- La topología de la variedad no nos dice si pueden o no existir secciones de Birkhoff.
- No sabemos que tan comunes son. ¿Los flujos con secciones de Birkhoff son C^1 densos?

Secciones de Birkhoff

Ventajas y desventajas:

- La topología de la variedad no nos dice si pueden o no existir secciones de Birkhoff.
- No sabemos que tan comunes son. ¿Los flujos con secciones de Birkhoff son C^1 densos?
- Hay flujos sin secciones y sin secciones de Birkhoff, hay flujos sin órbitas periódicas que no son suspensiones (K. Kupberberg).

Teorema (Birkhoff)

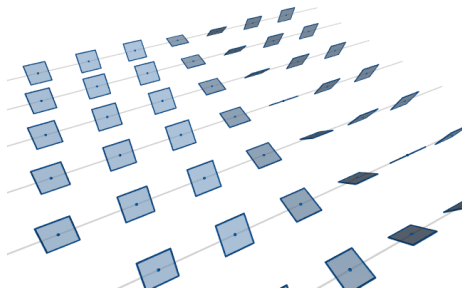
Sea Σ una superficie cerrada con una métrica Riemanniana de curvatura igual a -1 . Su flujo geodésico admite una sección de Birkhoff.

Estructuras de contacto y flujos de Reeb

Una estructura de contacto ξ es un campo de planos no integrable,

Estructuras de contacto y flujos de Reeb

Una estructura de contacto ξ es un campo de planos no integrable, quiere decir que $\xi = \ker(\alpha)$ con α una 1-forma diferencial y $\alpha \wedge d\alpha = 0$.



Estructuras de contacto y flujos de Reeb

A α le asociamos el campo de Reeb X definido por

$$\alpha(X) = 1 \quad \iota_X d\alpha = 0.$$

Si f es una función que no se anula, entonces $\xi = \ker(\alpha) = \ker(f\alpha)$, pero X_α es distinto de $X_{f\alpha}$.

- 1 Un campo de Reeb no puede tener secciones (sin frontera).

Resultados y observaciones

- 1 Un campo de Reeb no puede tener secciones (sin frontera).
- 2 Todo campo de Reeb, en dimensión 3, tiene órbitas periódicas (Taubes 2007,

Resultados y observaciones

- 1 Un campo de Reeb no puede tener secciones (sin frontera).
- 2 Todo campo de Reeb, en dimensión 3, tiene órbitas periódicas (Taubes 2007, Cristofaro-Gardiner 2016).
- 3 Hay resultados sobre existencia de secciones de Birkhoff para flujos de Reeb (Hofer, Wysocki, Zehnder, Hryniewicz, Salomão, ...)

Definición

Una decomposición en libro abierto de M es un par (K, π) tal que K es un link y $\pi : M \setminus K \rightarrow \mathbb{S}^1$ una fibración.

Libros abiertos y estructuras de contacto

Definición

Una decomposición en libro abierto de M es un par (K, π) tal que K es un link y $\pi : M \setminus K \rightarrow \mathbb{S}^1$ una fibración.

Teorema (E. Giroux)

Toda estructura de contacto ξ está soportada por un libro abierto.

Es decir, **existe** una forma de contacto α tal que su campo de Reeb es tangente a K y transverso a las fibras.

Teorema (P. Dehornoy, V. Colin, U. Hryniewicz, A. R.)

En una 3-variedad cerrada y sin frontera M , el conjunto de campos de Reeb que admite una sección de Birkhoff forma un abierto denso en topología C^∞ .

Teorema (P. Dehornoy, V. Colin, A. R.)

Todo campo de Reeb no degenerado está soportado por un libro roto.

Teorema (P. Dehornoy, V. Colin, A. R.)

Todo campo de Reeb no degenerado está soportado por un libro roto.

Definición

Un libro roto es un par (K, \mathcal{F}) tal que K es un link y \mathcal{F} una foliación de dimensión 2 de $M \setminus K$, tales que:

- 1 la cerradura de las páginas es la página junto algunas componentes de K ;*
- 2 $K = K_r \cup K_b$.*

Libros rotos y sistemas de secciones

