# Teorema de Rigidez de Mostow

## Duodécima Jornada de Geometría, Topología y Dinámica

Andrés Rodríguez Migueles

Centro de Investigación en Matemáticas

21 de junio de 2024

### Theorem (Teorema de Rigidez de Mostow)

*Sean M y N $3$-variedades hiperbólicas completas, compactas y orientables. Si existe un isomorfismo $\phi : \pi_1(M) \to \pi_1(N)$ entonces este esta inducido por una única isometría entre M y N.*

### Theorem (versión Algebraica)

*Sean $\Gamma$ y $\Lambda$ dos subgrupos discretos, no-elementales y cocompactos de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$. Si existe un isomorfismo $\phi : \Gamma \to \Lambda$ entonces exite un elemento $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ tal que $\Gamma = g\Lambda g^{-1}$.*

### Observación

- *Todo invariante geométrico es un invariante topológico.*
- *Es válido en el caso de n-variedades hiperbólicas completas y de volumen finito con $n \geq 3$ (para latices en $\mathrm{PO}(n, 1)$) pero es falso para $n = 2$.*

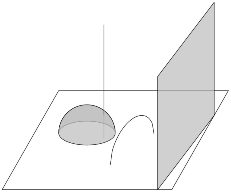
1. Preliminares
2. Estrategia de las pruebas
3. Primer paso
4. Volumen Simplicial
5. Extensión Baricéntrica
6. Funciones Cuasi-conformes

Recordemos

$$\mathbb{H}^3 := \{(x+yi, z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}_{>0}\} \quad \text{y} \quad \partial\mathbb{H}^3 = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \cong \mathbb{S}^2$$

con la métrica

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{z^2}$$



Geodésicas: lineas verticales, semicírculos que intersectan a $\partial\mathbb{H}^3$ con un ángulo recto. $Isom_+(\mathbb{H}^3) \cong \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ y la acción en $\partial\mathbb{H}^3$ es via transformaciones de Möbius (composición de un número par de inversiones).

**Definition**

Una $3$-variedad $M$ es hiperbólica si admite una metrica Riemanniana completa con curvatura constante $-1$. Equivalentemente, si hay un subgrupo discreto y libre de torsión $\Gamma$ en $PSL_2(\mathbb{C})$ tal que $M$ es homeomorfa a $\mathbb{H}^3/\Gamma$.

Sean $M$ y $N$ $3$-variedades hiperbólicas completas y compactas.

**Theorem (Primer paso)**

*Todo isomorfismo $\phi : \pi_1(M) \to \pi_1(N)$ induce un homeomorfismo $\partial\bar{f}\colon \partial\mathbb{H}^3 \to \partial\mathbb{H}^3$ $\phi$-equivariante ($\partial\bar{f} \circ \gamma = \phi(\gamma) \circ \partial\bar{f}$).*

A) $\partial\bar{f}$ es una transofrmación de Möbius (se exitende a $\bar{F}$ una isometría de $\mathbb{H}^3$ por la extensión de Poincaré).
   - A.a) (**Gromov-Thurston**) Construir un conjunto denso $D$ en $\partial\mathbb{H}^3$ tal que $\partial\bar{f}\,|_D$ es una transofrmación de Möbius ($\partial\bar{f}$ manda los vértices de cualquier tetraedro ideal regular en los vértices de un tetraedro ideal regular).
   - B.b) (**Tukia**) $\partial\bar{f}$ es cuasi-conforme y diferenciable en un punto fijo de un elemento loxodrómico.

B) (**Besson-Courtois-Gallot**) $\partial\bar{f}$ se extiende a una funcion suave $\bar{F}\colon \mathbb{H}^3 \to \mathbb{H}^3$ (extensión baricéntrica) y estiman su Jacobiano.

$\bar{F}$ es $\phi$-equivariante y los cubrientes universales $p_M$ y $p_N$ son isometrías locales entonces $F(p_M(x)) := p_N(\bar{F}(x)) \in \mathrm{Iso}_+(M.N)$.

$h : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ una función entre espacios métricos, es una $(K, C)$**-cuasi-isometría**, donde $(\lambda, \epsilon) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$, si :

$$\frac{1}{\lambda} d_X(x_1, x_2) - \epsilon \leq d_Y(h(x_1), h(x_2)) \leq \lambda d_X(x_1, x_2) + \epsilon$$

y $d_Y(h(X), y) < \epsilon$ para toda $y \in Y$.

**Lemma (Milnor-Svarc)**

*$G \curvearrowright (X, d_X)$ (espacio métrico geodésico) por isometrias de forma discreta y cocompacta. Entonces ($G$, métrica de la palabra relativo a un conjunto generador) es cuasi-isométrico a $(X, d_X)$.*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{H}^3 \arrow[r, dashed, "\bar{f}"] \arrow[d, dashed, "h_M"] & \mathbb{H}^3 \arrow[d, dashed, "h_N"] \\ \pi_1(M) \arrow[r, "\phi"] & \pi_1(N) \end{tikzcd}$$

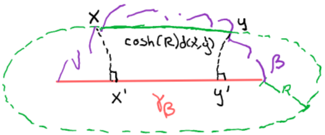
Entonces tenemos $\bar{f}$: $\mathbb{H}^3 \to \mathbb{H}^3$ cuasi-isometría $\phi$-equivariante.

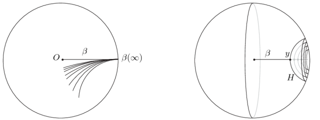
Un espacio métrico geodésico es $\delta-$**hiperbólico** si en cada triángulo geodésico, cada lado esta contenido en una $\delta-$vecindad de la unión de los otros dos lados.

**Lemma (Lema de Morse )**

*Si X es un espacio $\delta-$hiperbólico entonces hay una constante $R = R(\delta, \lambda, \epsilon)$ tal que para cada $(\lambda, \epsilon)-$cuasi-geodesica $\beta\colon [a, b] \to X$.*

$$d_H(\beta([a, b]), [\beta(a), \beta(b)]) \leq R$$




(a) An equivalence class $[\beta] \in \partial\mathbb{H}^n$ of geodesic rays.

(b) A basis of neighbourhoods for $[\beta] \in \partial\mathbb{H}^n$.

Dado $\beta$ un rayo geodésico y $\bar{f}\colon \mathbb{H}^3 \to \mathbb{H}^3$ cuasi-isometría definimos $\partial\bar{f}\colon \partial\mathbb{H}^3 \to \partial\mathbb{H}^3$ como

$$\partial\bar{f}([\beta]) = [\bar{f} \circ \beta].$$

**Lemma**

*Si $\bar{f}\colon \mathbb{H}^3 \to \mathbb{H}^3$ cuasi-isometría $\phi$-equivaraínte entonces $\partial\bar{f}\colon \partial\mathbb{H}^3 \to \partial\mathbb{H}^3$ es un* ***homeomorfismo $\phi$-equivaraínte****.*

**Homología singular**:

$c \in \{\Sigma r_\sigma \sigma\} = C_k^{sing}(M)$

$\|\alpha\| := \inf_{\alpha=[c]} \{\Sigma|r_\sigma| \mid c = \Sigma r_\sigma \sigma\}$

$\alpha \in H_k^{sing}(M) \xleftrightarrow{\text{isometría}}$

Clase fundamental

$\langle [M] \rangle = H_3^{sing}(M)$, si $\Sigma r_\sigma \sigma \in [M]$

$Vol(M) = \langle [M], \Omega_M \rangle =$

$\sum_\sigma r_\sigma \int_{\Delta^3} \sigma^* \Omega_M$

**Homología medible**:

$C^\infty(\Delta^k, M)$ con la topología $C^1$

$C_k^{med}(M) := \{\mu \in \mathcal{M}(C^\infty(\Delta^k, M))$
Borel, soporte compacto, con signo, variación total acotada$\}$

$H_k^{med}(M) \ni \alpha$

$\delta_i : \Delta^{k+1} \to \Delta^k$

$\partial_{med} := \Sigma(-1)^i(\delta_i^*)_*$

$\|\alpha\| := \inf_{\alpha=[\mu]} \{|\mu|\}$

Clase fundamental

$\langle [M] \rangle = H_3^{med}(M)$, si $\mu \in [M]$

$Vol(M) = \langle [\mu], \Omega_M \rangle =$

$\int_{\sigma \in C^\infty(\Delta^3, M)} \left( \int_{\Delta^3} \sigma^* \Omega_M \right) d\mu(\sigma)$

**Theorem**

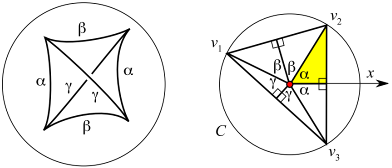
*Si $M$ es una variedad cerrada hiperbólica orientada, entonces*

$$v_3 \|M\| = Vol(M),$$

*donde $v_3$ es el volumen de un tetraedro ideal regular.*

# Tetraedro ideal regular

Un tetraedro ideal en $\mathbb{H}^3$ es la envolvente convexa de cuatro puntos ideales no coplanares.




- Dos lados opuestos tienen ángulos diedrales iguales.
- Tenemos que $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, porque una horoesfera basada en un vértice intersecta en un triángulo Euclideano.
- Tienen volumen finito e igual a $\Lambda(\alpha) + \Lambda(\beta) + \Lambda(\gamma)$ donde $\Lambda(\theta) = -\int_0^\theta \log|2\sin t|dt$.
- Los tetraedros ideales regulares suceden cuando $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$. Más aún, cada permutación de sus vertices se puede obtener como restricción de una isometría en $\mathbb{H}^3$. Y estos son los tetraedros hiperbólicos con volumen maximal (denotado su valor por $v_3$).
- $\text{Möb}(\partial\mathbb{H}^3)$ actua transitivamente en el espacio de tetraedros ideales regulares.

# $v_3\|M\| = Vol(M)$ con $M = \mathbb{H}^3/\Gamma$

$v_3\|M\| \geq Vol(M)$

**Enderezando**:

$\sigma : \Delta^3 \to M$

$\widetilde{\sigma} : \Delta^3 \to \mathbb{H}^3$ levantamiento rel. al cubriente universal $p$

$\overline{\sigma}$ tetraedro geodésico rel. a $\{\widetilde{\sigma}(e_i)\}_{i=0}^3$ $\sigma$ homotopica a

$End(\sigma) := p \circ \overline{\sigma}$

Sea $\Sigma r_\sigma End(\sigma) = c \in [M]$

$Vol(M) = \sum_\sigma r_\sigma \int_{\Delta^3} End(\sigma)^* \Omega_M$

$\leq \sum_\sigma |r_\sigma| Vol(End(\sigma))$

$\leq \sum_\sigma |r_\sigma| v_3$

$\leq v_3\|M\|$ tomando el ínfimo.

$v_3\|M\| \leq Vol(M)$

**Untando**:

$\sigma$ tetraedro geodésico en $\mathbb{H}^3$.

$\alpha(\sigma) : \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})/\Gamma \to C^\infty(\Delta^3, M)$

$\alpha(\sigma)(g\Gamma) = p_M \circ g \circ \sigma$

$Unt(\sigma) := \alpha(\sigma)_*[\lambda_{Haar}]$

$\lambda_{Haar}\{g \mid g \cdot x_0 \in U\} = Vol(U)$

$Unt(\sigma)(C^\infty(\Delta^3, M)) = Vol(M)$

$\nu = \frac{1}{2}(Unt(\sigma) \oplus Unt(\sigma_-))$

$|\nu| = Vol(M) \Rightarrow [\nu] = k[M]$

$kVol(M) =$

$\int_{\tau \in C^\infty(\Delta^3, M)} \left(\int_{\Delta^3} \tau^* \Omega_M\right) d\nu(\tau) =$

$Vol(M)Vol(\sigma)$

$\|M\| \leq \frac{|\nu|}{Vol(\sigma)} = \frac{Vol(M)}{Vol(\sigma)}$

$\|M\| \leq \frac{Vol(M)}{v_3}$ tendiendo al máximo.

$\square$

## Proposición

*$\partial\bar{f}$ manda los vértices de cualquier tetraedro ideal regular en los vértices de un tetraedro ideal regular*

**Idea:** De lo contrario, la pérdida de volumen de algunos tetraedros en un ciclo fundamental efectivo no puede compensarse con la ganancia de volumen de otros, siempre que los tetraedros sean lo suficientemente grandes (debido a que sus volúmenes están acotados por $v_3$).

---

**Más precisamente:** De lo contrario habría un tetraedro ideal regular y una $\epsilon$ tal que para todo tetraedro geodésico $\sigma$ con vertices cercanos al ideal regular dado $Vol(End(\bar{f} \circ \sigma)) < v_3 - \epsilon$.

Tomamos $V$ una vecindad de la identidad en $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$, $\delta = \frac{\lambda_{Haar}(V)}{Vol(M)}$ y escogemos $\sigma$ tal que $Vol(\sigma) > v_3 - \delta$.

Por un lado, si consideramos $\nu = \frac{1}{2}(Unt(\sigma) \oplus Unt(\sigma_-))$,

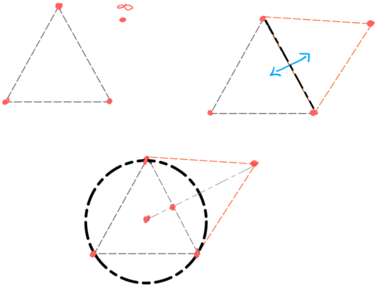
$$\langle \Omega_N, (End_* \circ \bar{f}_*)(\nu) \rangle < Vol(\sigma)Vol(N),$$

y como $End$ es homotópico a la identidad y $\bar{f}$ es equivalencia homotópica, tenemos

$$\langle \Omega_N, (End_* \circ \bar{f}_*)(\mu) \rangle = \langle \Omega_N, \bar{f}_*(\mu) \rangle = \langle \bar{f}^*(\Omega_N), \mu \rangle = \langle \Omega_M, \mu \rangle = Vol(\sigma)Vol(M).$$

# Prueba de Gromov-Thurston

**Fin de la prueba del Teorema de Rigidez de Mostow:** Sean $v_0, \ldots, v_3 \in \partial\mathbb{H}^3$ los vértices de un tetraedro ideal regular $\Delta^3$ y sea $\gamma \in$Möb$(\partial\mathbb{H}^3)$ tal que $\partial\bar{f} \circ \gamma^{-1}(v_i) = (v_i)$ y $v_0 = \infty$.
Como todo triángulo ideal regular en $\mathbb{H}^3$ es la cara de precisamente dos tetraedros ideales regulares y $\partial\bar{f}$ es un homeomorfismo.




Si reflejamos $\Delta^3$ a lo largo de sus caras de forma iterativa obtenemos una teselación de $\partial\mathbb{H}^3$ mediante triángulos equilateros (si las caras de reflexión tienen a $\infty$), y en general al seguir reflejando, observamos que los vértices ideales forman un subconjunto denso de $\partial\mathbb{H}^3$ de puntos fijos para $\partial\bar{f} \circ \gamma^{-1}$.

# Prueba de Besson-Courtois-Gallot

La **entropía de volumen** $h(g)$ para $(Y, g)$ una $n-$variedad compacta conexa es:

$$h(g) := \lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} \log Vol_g(B(p, R)).$$

Donde $Vol_g(B(p, R))$ es el volumen de la bola de radio $R$ centrada en $p$ en $\tilde{Y}$, el cubriente universal de $Y$.

**Theorem (Besson-Coutois-Gallot)**

*Sea $(Y, g)$ y $(X, g_0)$ dos variedades compactas y con curvatura negativa, tales que $(X, g_0)$ es hiperbólica. Supongamos que $X$ y $Y$ son homotópicamente equivalentes. Entonces, si $dimX = dimY = n \geq 3$ tenemos*

i) $h(g)^n Vol(Y, g) \geq h(g_0)^n Vol(X, g_0)$.

ii) *La igualdad se satisface si y solo si $X$ es isométrica a $Y$ (rescalando $g$ por $\frac{h(g)}{h(g_0)}$).*

**Prueba del Teorema de Rigidez de Mostow:** Como $M$ y $N$ son hiperbólicas y homotópicas, entonces tenemos una función $f\colon M \to N$ de grado $1$ y como $\|f_*(\alpha)\| \leq \|\alpha\|$, entonces ambas variedades tienen el mismo volumen. Por otro lado, en el espacio hiperbólico $Vol_{g_0}(B(p, R)) = e^{2R}$, por tanto $h(g_0) = 2$. Finalmente por la condición *ii*) tenemos que $M$ y $N$ son isométricas. $\square$

El Teorema de B-C-G es consequencia de la construcción de $F$ extendiendo $\partial\bar{f}$ a una función suave $\phi$-equivaraínte, llamada la (extensión baricéntrica), con las siguientes propiedades:

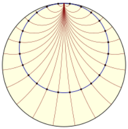
1. $|\operatorname{Jac}_x F| \leq \left(\frac{h(g)}{h(g_0)}\right)^n$,
2. Si para algún $x \in X$, $|\operatorname{Jac}_x F| = \left(\frac{h(g)}{h(g_0)}\right)^n$ entonces $D_xF$ es una homotecia de razón $\frac{h(g)}{h(g_0)}$.

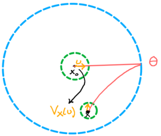
**Función de Busmann**: Si $\mathcal{H}$ denota la horoesfera que pasa por $\theta \in \partial\mathbb{H}^3$ y $x_0 \in \mathbb{H}^3$, definimos:

$$B_\theta : X \to \mathbb{R}_{\geq 0} \quad B_\theta(x) = \pm \operatorname{dist}_{\mathbb{H}^3}(x, \mathcal{H})$$

Notemos que $\partial\mathbb{H}^3$ se identifica con $UT_{x_0}\mathbb{H}^3$ y define una función

$$V_x : UT_{x_0}\mathbb{H}^3 \to UT_x\mathbb{H}^3 \quad \text{como} \quad V_x(u) = -D_xB_\theta(u).$$






Entonces si $\lambda_x$ es la medida canonica en la esfera unitaria $UT_{x_0}\mathbb{H}^3$ llamamos la **medida visual** en $x \in \mathbb{H}^3$ como

$$\mu_x = (V_x^{-1})_*(\lambda_x).$$

# Baricentro

Si $\lambda$ es una medida de $\partial\mathbb{H}^3$ definimos

$$\beta_\lambda(x) = \int_{\partial\mathbb{H}^3} B_\theta(x)d\lambda(\theta),$$

## Proposición

*Si $\lambda$ no tiene átomos, la función $\beta$ es estrictamente convexa en $\mathbb{H}^3$. Más aún, $\beta(x)$ tiende a infinito cuando $x$ tiende a $\theta \in \partial\mathbb{H}^3$ a lo largo de una geodésica. Por tanto $\beta$ tiene un único punto crítico en $\mathbb{H}^3$ que es un mínimo que llamaremos el **baricentro de la media** $\lambda$ y denotamos por bar$(\lambda)$.*

Como $\mu_x$ no tiene átomos, usando la función continua $\partial\bar{f}$ podemos contruir la función :

$$x \in \mathbb{H}^3 \mapsto \partial\bar{f}_*(\mu_x) \in \mathcal{M}_1(\partial\mathbb{H}^3).$$

Podemos definir la función $\bar{F}\colon \mathbb{H}^3 \to \mathbb{H}^3$ como:

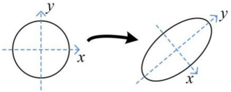
$$\bar{F}(x) := bar(\partial\bar{f}_*(\mu_x)).$$

# Funciones Cuasi-conformes

Sea $X$ y $Y$ espaciso métricos con $f\colon X \to Y$ un homeomorfismo. La función $f$ es llamada **cuasi-conforme** si satisface que:

$$H_f(x) := \limsup_{r\to 0} \frac{\sup\{\|f(x)-f(y)\| \mid \|x-y\| = r\}}{\inf\{\|f(x)-f(y)\| \mid \|x-y\| = r\}},$$

esta acotada por arriba en $X$.




## Proposición

*Si $\bar{f}\colon \mathbb{H}^3 \to \mathbb{H}^3$ es una cuasi-isometría entonces $\partial\bar{f}\colon \partial\mathbb{H}^3 \to \partial\mathbb{H}^3$ es un homeomorfismo cuasi-conforme.*

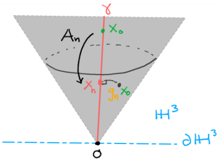
## Theorem (Radmacher-Stepanov)

*Todo homeomorfismo cuasi-conforme de $\mathbb{S}^2$ es absolutamente continuo con respecto a la medida de Lebesgue y es diferenciable c.t.p. con diferencial cuasi-conforme.*

**Theorem (Tukia)**

*Si $\Gamma$ es un grupo discreto no-elemental de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$, con $\xi$ punto loxodrómico fijo, y $h\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ un homeomorfismo differenciable en $\xi$ con derivada no zero. Si $h\Gamma h^{-1} \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$, entonces $h$ es una transformación de Möbius.*

**Idea:**




Denotemos $u_n = g_n^{-1}A_n$, y tenemos la transformación de Möbius $B = \lim u_n$. Si definimos $h_n := A_n^{-1} \circ h \circ A_n$, y denotamos con $L$ la derivada no zero, entonces $h_n(z) = L(z) + \epsilon(A_n(z))z$, y en el límite es $L$. Además $L$ es una transformación de Möbius fijando $0$ y $\infty$.

Fijemos $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{S}^2$. Dado un homeomorfismo $F\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$, sea $N(F) := F^{\#} \circ F$ donde $F^{\#}$ es la única transformación de Möbius, tal que $N(F)$ fija cada $p_i$.

$$N(h_n) = N(A_n^{-1}hA_n) = N(hA_n) = N(hg_nu_n) = N(g_n'hu_n) = N(hu_n),$$

$$N(L) = \lim_{n\to\infty} N(h_n) = N(hB).$$

Como $L$ y $B$ son de Möbius, entonces $h$ lo es también.

# Prueba de Tukia

**Prueba del Teorema de Rigidez de Mostow:** Tomamos $\Gamma = \pi_1(M)$, por los resultados anteriores existe un homeomorfismo cuasi-conforme y $\phi-$equivariant $\partial\bar{f}\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ c.t.p. diferenciable, que tiene un Jacobiano no zero en c.t.p. Más aún, por la compacidad todo punto limite en $\partial\mathbb{H}^3$ es un punto loxodrómico fijo. Y por la condición $\phi-$equivariancia implica que $(\partial\bar{f})\pi_1(M)(\partial\bar{f})^{-1} \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$. Entonces $\partial\bar{f}$ es una transformación de Möbius.

Termina la prueba como en la prueba de Gromov-Thurston. $\square$

# Consequencias del Teorema de Rigidez de Mostow

## Corolario

*Sea M una* $3$*-variedad cerrada orientable hiperbólica. Entonces*

$$Isom(M) \to Out(\pi_1(M))$$

*es un isomorphismo y* $Out(\pi_1(M))$ *es finito.*

## Corolario

*Si una* $3$*-variedad cerrada orientable M el espacio subjacente de una orbiedad hiperbólica* $\mathcal{O}$*. Entonces*

$$Vol(\mathcal{O}) \geq v_3 \|M\|.$$

G. Besson, G. Courtois, and S. Gallot
A simple proof of the rigidity and minimal entropy theorems,
*Geom. Funct. Anal. 5 (1995), no. 5 .*

G. D. Mostow
Quasi-conformal mappings in n-space and the rigidity of hyperbolic space forms,
*Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math., (34) , 1968.*

W.P. Thurston
The geometry and topology of three-manifolds,
*lecture notes, Princeton University, 1979.*

W.P. Tukia
Differentiability and rigidity of Möbius groups,
*Invent. Math. 82 (1985).*