

El rol de la Topología Algebraica en las fases de la materia

Daniel Sheinbaum
Conacyt - Fac. Química, UNAM

Plan de la plática

I- Comentarios generales

II- Introducción rápida a la
mecánica cuántica y análisis funcional

III- Materia condensada con frontera y
teoría K (* para expertos)

IV- Generalización y rol en matemática
moderna (si hay tiempo)

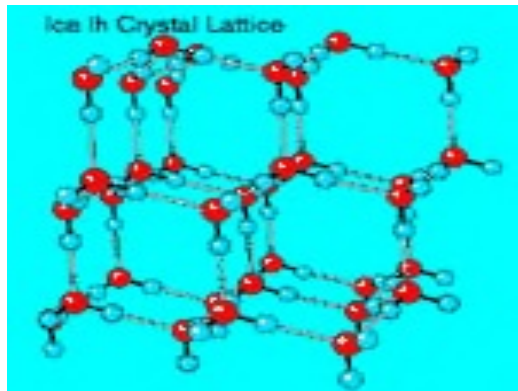
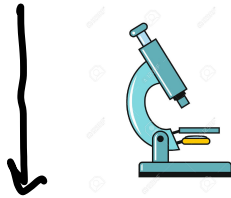
PARTE I:

Comentarios

Generales

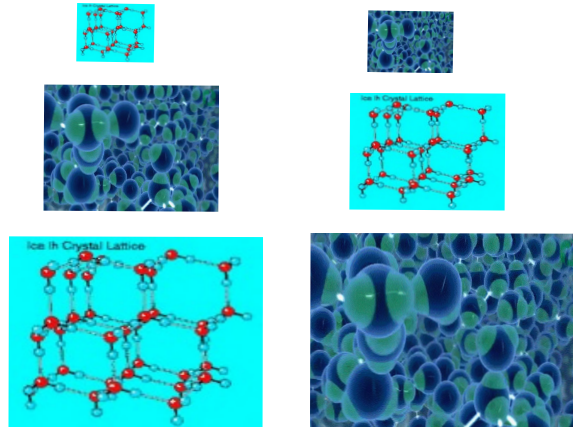
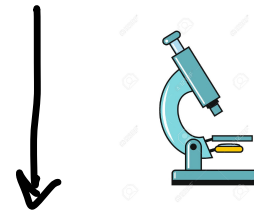
Fases de la materia

Hielo



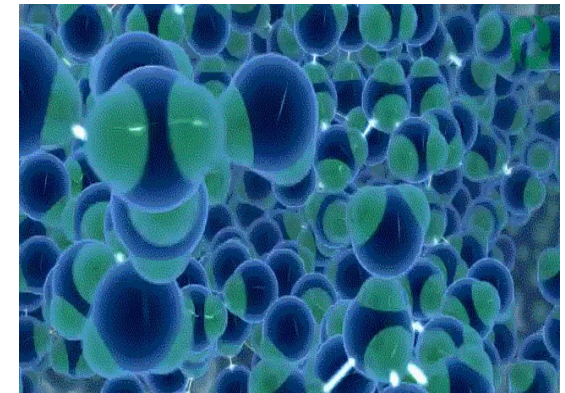
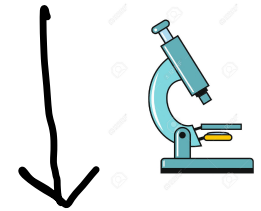
Simetría
Discreta

Transición
de fase



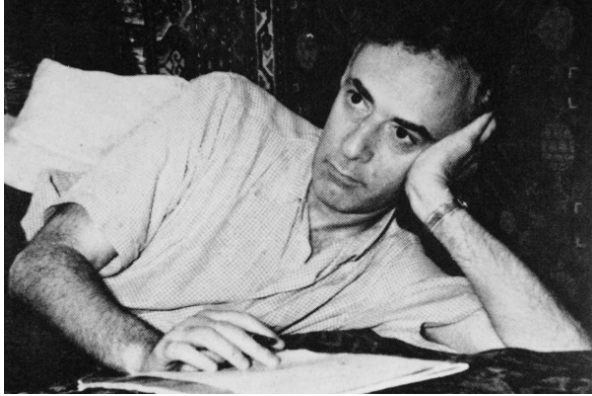
Muy Sensible a
pequeños cambios!

Agua



Simetría continua
en promedio

El agua está en un estado de la materia diferente al del hielo porque sus moléculas forman "patrones" con una simetría diferente.



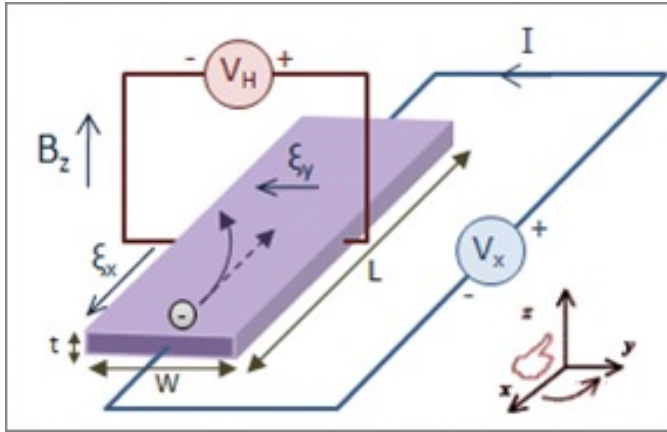
Paradigma de Landau

" Dos fases son diferentes porque tienen simetrías diferentes "

G' : " Para pasar de una fase a otra tienes que perder/ganar una simetría "

Ej: En 3 dimensiones hay 230 estructuras cristalinas con simetrías distintas.

1980 Efecto Hall Cuántico



Campo Magnético muy alto $B_z \sim \text{Teslas}$

Muy bajas temperaturas
 $T \sim 30^\circ \text{K}$

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E} ;$$

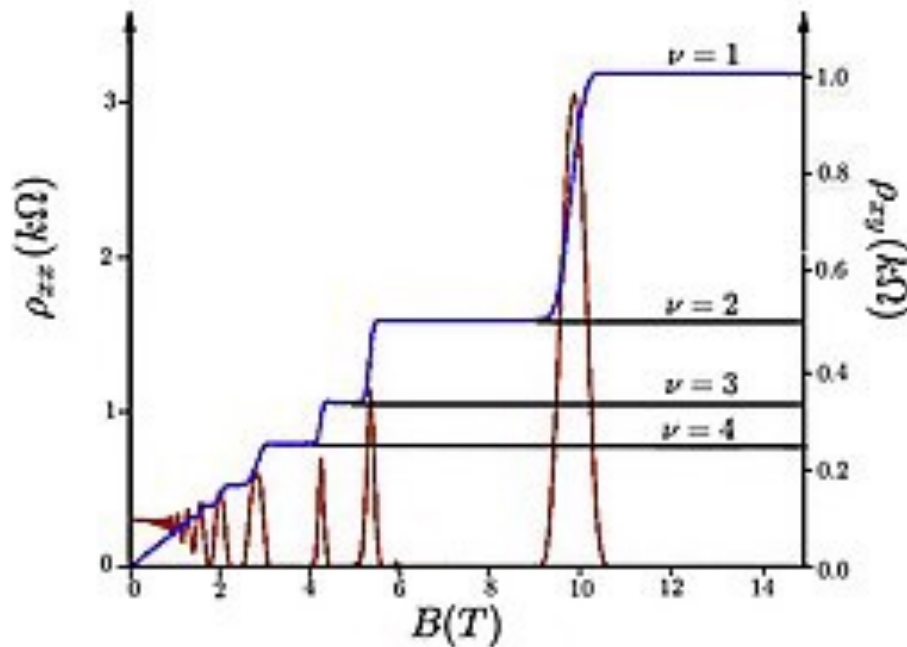
$$\sigma_{xx} = 0$$

$$\sigma_{xy} = \nu \frac{e^2}{h}, \nu \in \mathbb{Z}$$

cuantizado γ

$$\pm 1 \times 10^{-9}$$

e = carga electron
 h = constante de Planck



$\frac{\partial \mathcal{P}_{xx}}{\partial B} \xrightarrow{B \rightarrow B_{crit}} \infty$, El sistema está en transición de fase

PERO

⚠ NO hay rompimiento de simetría !

The Nobel Prize in Physics 2016



© N. Elmehed, © Nobel Media 2016
David J. Thouless
Prize share: 1/2



© N. Elmehed, © Nobel Media 2016
F. Duncan M. Haldane
Prize share: 1/4



© N. Elmehed, © Nobel Media 2016
J. Michael Kosterlitz
Prize share: 1/4

⚠ La diferencia está en Topología ! (✓ topológica)
¿¿¿ Topología de qué ???



Charles Kane

Professor of Physics, [University of Pennsylvania](#)
Dirección de correo verificada de [physics.upenn.edu](#)

[Condensed Matter Physics](#)

SEGUIR

ARTÍCULOS

CITADO POR

ACCESO PÚBLICO

TÍTULO	CITADO POR	AÑO
Colloquium: Topological insulators MZ Hasan, CL Kane Reviews of modern physics 82 (4), 3045	15882	2010
Quantum spin Hall effect in graphene (También topológico) CL Kane, EJ Mele Physical review letters 95 (22), 226801	7092	<u>2005</u>
Z 2 topological order and the quantum spin Hall effect CL Kane, EJ Mele Physical review letters 95 (14), 146802	6037	<u>2005</u>
Superconducting proximity effect and Majorana fermions at the surface of a topological insulator L Fu, CL Kane Physical review letters 100 (9), 096407	4469	2008
Topological insulators in three dimensions L Fu, CL Kane, EJ Mele Physical review letters 98 (10), 106803	4330	2007
Topological insulators with inversion symmetry L Fu, CL Kane Physical Review B 76 (4), 045302	3861	2007

Desde
2016 :
35, 492
Es decir
un Área
Super
Activa !

En 2005 el "BOOM" de las
fases topológicas con el descubrimiento
de los aislantes topológicos

PARTE II

Mecánica Cuántica

y

Análisis Funcional

ADVERTENCIA:

poco riguroso y omiso

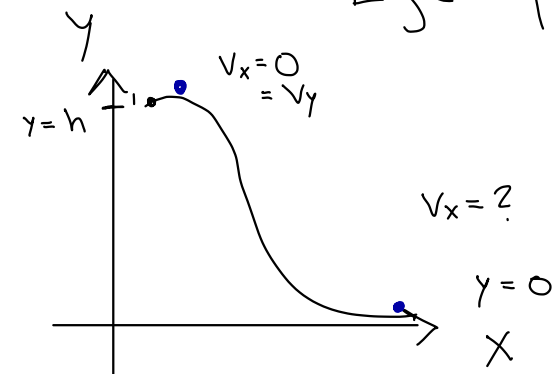
Repaso de física

$$\text{Energía Total} = \underset{\text{Energía cinética}}{\text{Energía}} + \underset{\text{Energía potencial}}{\text{Energía}}$$

$$E = \frac{1}{2} m \vec{V} \cdot \vec{V} + V(\vec{r}); \quad \begin{array}{l} \vec{r} \in \mathbb{R}^d, \text{ posición} \\ \vec{V} \in \mathbb{R}^d, \text{ velocidad} \end{array}$$

$$\text{constante} \quad \frac{\vec{P} \cdot \vec{P}}{2m}, \quad \vec{P} = m\vec{V} \quad V: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{Ejemplo: } d=2, \quad V(x, y) = mgy$$



$$E = mgh + \frac{m}{2} (0^2 + 0^2) = mgh$$

$$E = \cancel{mg(0)} + \frac{m}{2} (v_x^2 + 0^2)$$

$$\Rightarrow v_x = \pm \sqrt{2gh}$$

sistema: $(\vec{r}(t), \vec{P}(t))$ tales que
 $E(\vec{r}(t), \vec{P}(t)) = \text{constante}$

Un Salto Cuántico

Clásico

$$(\vec{r}(t), \vec{p}(t))$$

$$\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$$

Cuántico

Función compleja

$$\Psi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$$

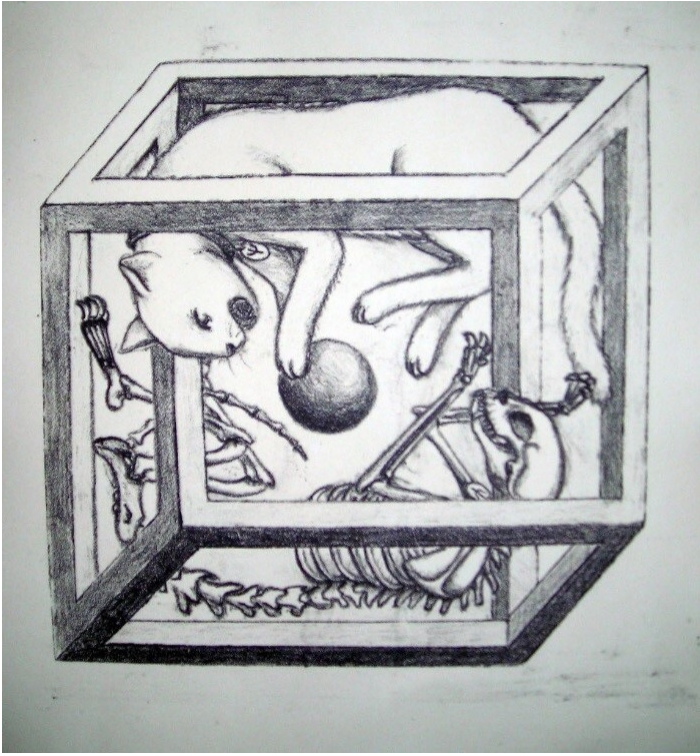
$$|\Psi(\vec{r})|^2 \int^d r \equiv \text{La probabilidad de encontrar a la partícula entre } \vec{r} \text{ y } \vec{r} + d\vec{r}$$

Ψ se le llama la función de Onda y conocerla es la forma de describir un estado cuántico.

Probabilidad de encontrar a la partícula en algún lugar de $\mathbb{R}^d$.

$$= \int_{\mathbb{R}^d} |\Psi(\vec{r})|^2 \int^d r < \infty$$

Superposición



¿El gato de Schrödinger está vivo y muerto a la vez?

La interpretación estandar dice:

$$\Psi_{\text{gato}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi_{\text{muerto}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi_{\text{vivo}}$$

i.e. los estados se suman y producen uno nuevo, es decir, los estados cuánticos se portan como vectores !!

A $L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$ se le llama espacio de Hilbert "separable" (base ortonormal numerable)

Clásico

$V(\vec{r})$

función real

Cuántico

$$\hat{V} : L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$$

Transformación lineal (operator)

$$(\hat{V}\psi)(\vec{r}) = V(\vec{r})\psi(\vec{r})$$

$$\vec{P} = (P_1, \dots, P_d)$$

$$\hat{P}_i : L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$$

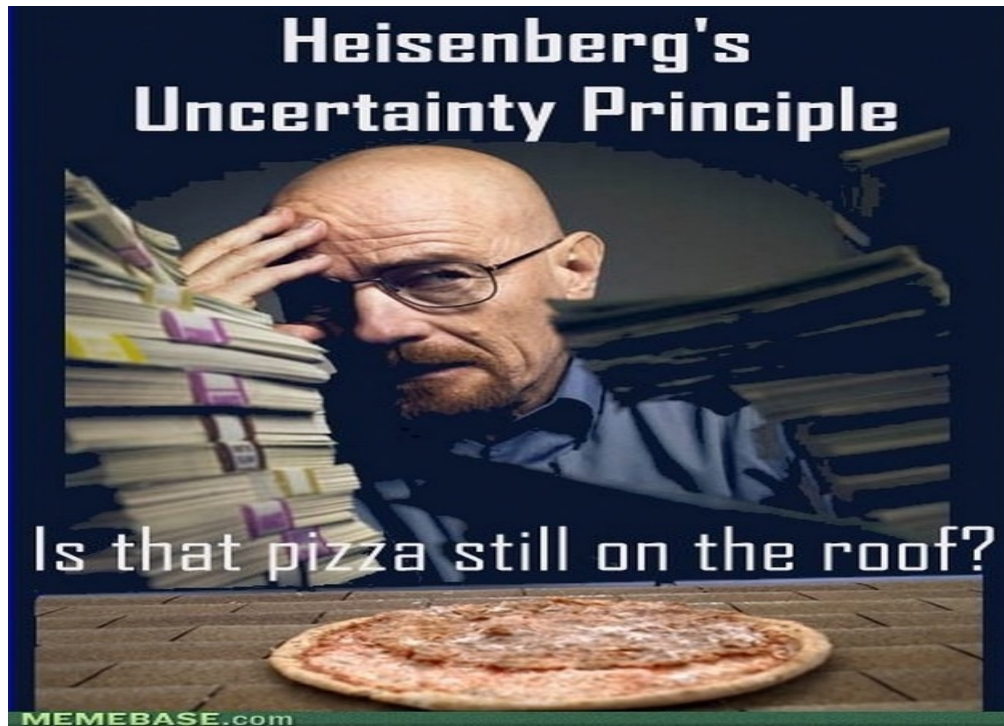
Transformación lineal

$i = 1, \dots, d$

¿Qué es $\hat{P}_i \psi$?

Principio de incertidumbre

$$\hbar = 1$$



$$\Delta x \Delta p_x$$

$$\geq \frac{\hbar}{2}$$

Ley FUNDAMENTAL
de la física

Version de operadores: $\hat{p}_x \hat{x} - \hat{x} \hat{p}_x = i\hbar I$

donde $(\hat{x} \psi)(x) = x \psi(x)$

La única solución es:

$$\hat{p}_x \psi = i\hbar \frac{d}{dx} \psi$$

$$\begin{aligned} \text{Veamos: } i\hbar \frac{d}{dx} (x\psi) - x \left(i\hbar \frac{d}{dx} \psi \right) \\ = i\hbar \psi \end{aligned}$$

Clásico

$$E = \frac{\vec{p} \cdot \vec{p}}{2m} + V(\vec{r})$$

Cuántico

$$E\psi = \left[\underbrace{\frac{1}{2m} \sum_{i=1}^d \hat{p}_i^2 + \hat{V}}_{\hat{H}} \right] \psi$$

Operador Hamiltoniano

i.e se convierte en un problema de eigenvalores

$$\hat{H}\psi = E\psi \quad \text{ó} \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V(\vec{r})\psi = E\psi$$

Conocida como la Ecuación de Schrödinger
Para encontrar las E 's y las ψ 's

Atiyah: Análisis Funcional y Teoría K

Las matemáticas de la mecánica cuántica se llaman análisis funcional

(Unión de álgebra lineal, topología, teoría de la medida, etc)

Sir Michael Atiyah (1929-2019)



¿Cómo obtener teoría K usando transformaciones lineales?

$x \mapsto A(x)$, $A(x)$ operator

¿Hay algún espacio vectorial canónico de dimensión finita asociado a $A(x)$?

¿ La dimension del Kernel de una familia de operadores varia continuamente ?

$$(1-t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t & t \\ 0 & 1-t \end{pmatrix}$$

$$t=0 \quad \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \{0\}$$

$$t=1 \quad \text{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Intuitivamente : Operadores de Fredholm
 $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ son los que tienen dim kernel "estable"

$$\text{Atiyah: } [X, \mathcal{F}(\mathcal{H})] \cong K^0(X)$$

64'

Janich

PARTE IV

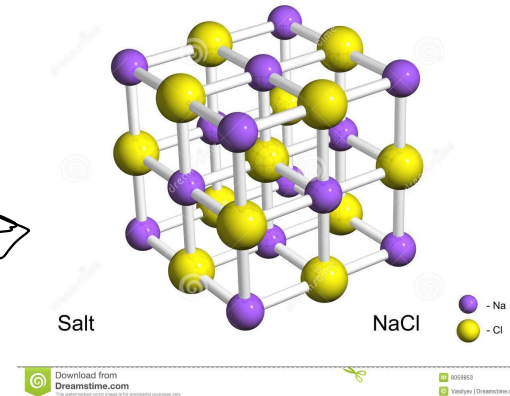
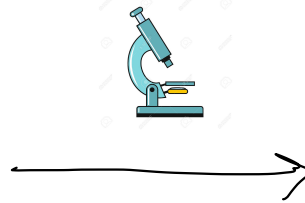
Materia Condensada
con frontera y Teoría K

ADVERTENCIA:

Diseñada para expertos
y Profesor@s del departamento

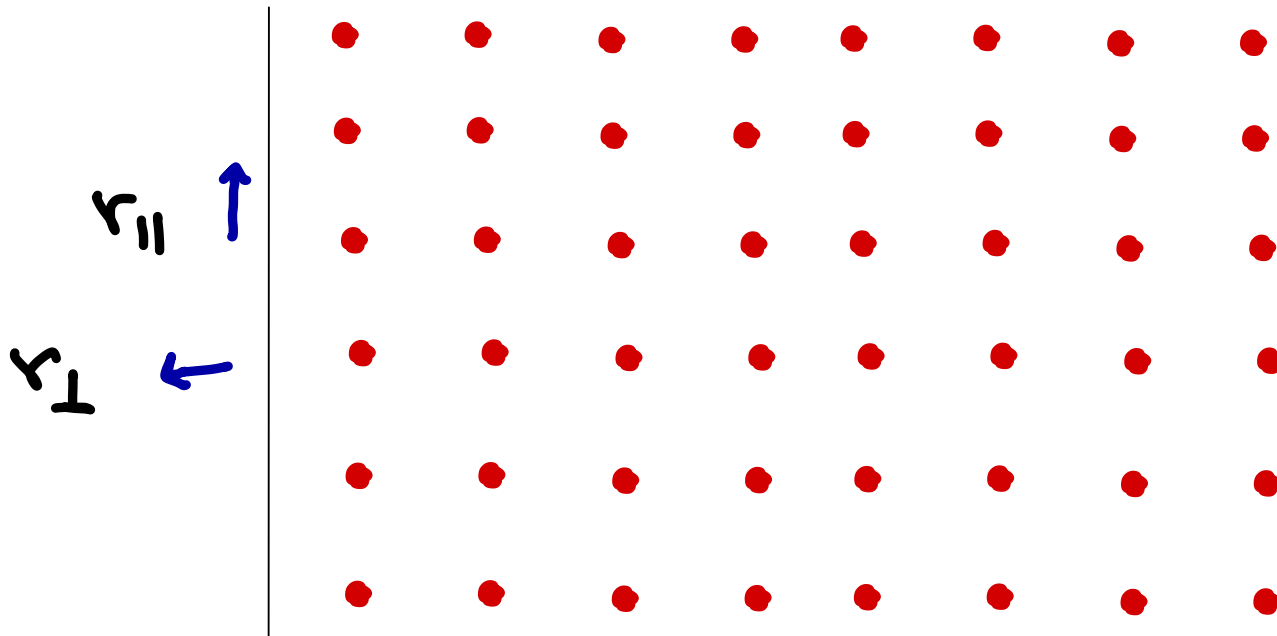
Materia Condensada Con frontera

Sal



Estructura
Cristalina
de la
Sal

Cristal semi-infinito : simetría periódica ($\mathbb{Z}^{d-1}$)
excepto en la frontera



$$V(r_{\perp}, \vec{r}_{||} + \vec{a}_{||}) = V(r_{\perp}, \vec{r}_{||})$$

$$\vec{a}_{||} \in \mathbb{Z}^{d-1}$$

||

$$(a_2, \dots, a_d)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{d-1}$

Teorema de Bloch de Superficie

Descompongan $\mathcal{H}$ como Integral directa:

$$\mathcal{H} \cong \int_{\Pi^{d-1}}^{\oplus} \mathcal{H}_{\vec{k}_{||}} d\vec{k}_{||} ; \quad \Pi^{d-1} = \text{Hom}(\mathbb{Z}^{d-1}, \mathbb{S}^1)$$

Zona de Brillouin de superficie

Dado $[\mathcal{H}, U(\vec{a}_{||})] = 0 \quad \forall \vec{a}_{||} \in \mathbb{Z}^{d-1} ; \quad U: \mathbb{Z}^{d-1} \rightarrow U(L^2(\mathbb{R}^d))$

$$\mathcal{H} \cong \int_{\Pi^{d-1}}^{\oplus} \mathcal{H}(\vec{k}_{||}) d\vec{k}_{||}$$

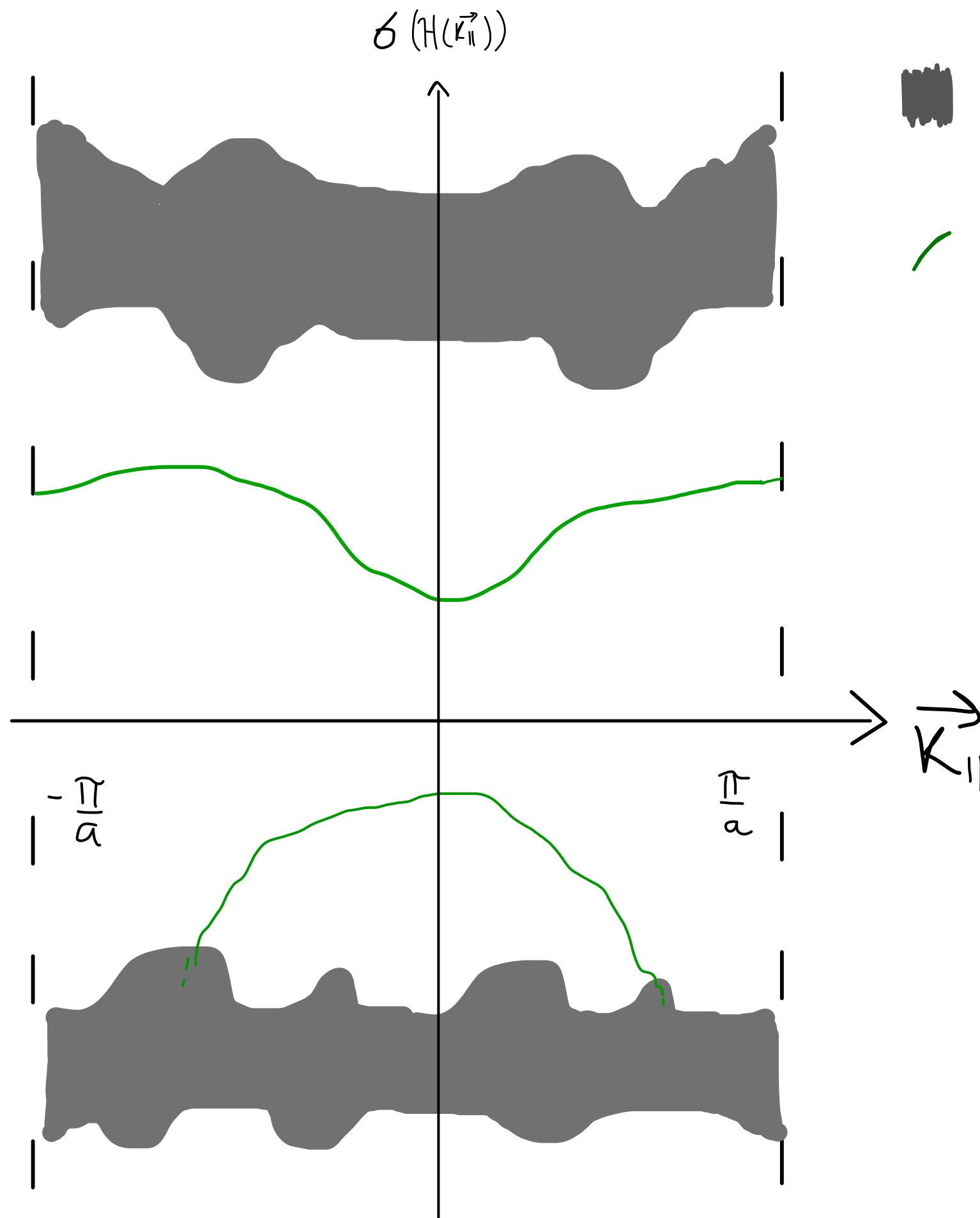
$$\mathcal{H}'' = \begin{pmatrix} & & 0 \\ & k_1 & \\ 0 & & k_2 \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{H}(\vec{k}_{||}): \mathcal{H}_{\vec{k}_{||}} \rightarrow \mathcal{H}_{\vec{k}_{||}}$$

$$\mathcal{H}(\vec{k}_{||}) = -\partial_{r_{\perp}}^2 + (i\nabla_{||} - \vec{k}_{||})^2 + V$$

llamado Hamiltoniano de Bloch
de superficie

$$d=2$$



■ Banda Interior ($\sigma_c(H(\vec{k}_{\parallel}))$)

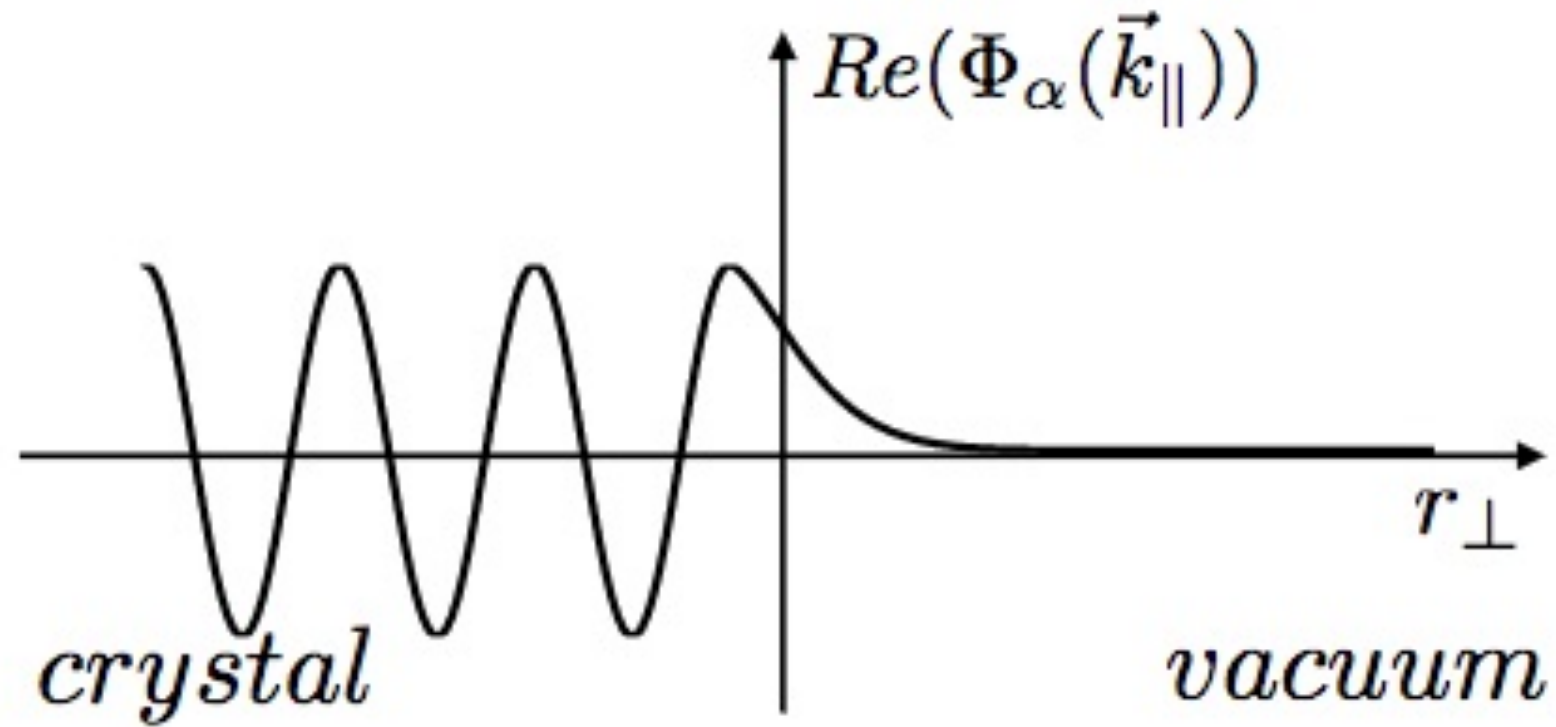
— Banda de Superficie ($\sigma_p(H(\vec{k}_{\parallel}))$)

$\sigma(H(\vec{k}_{\parallel}))$ es continuo como
función de $\vec{k}_{\parallel}$

Tipos de Soluciones

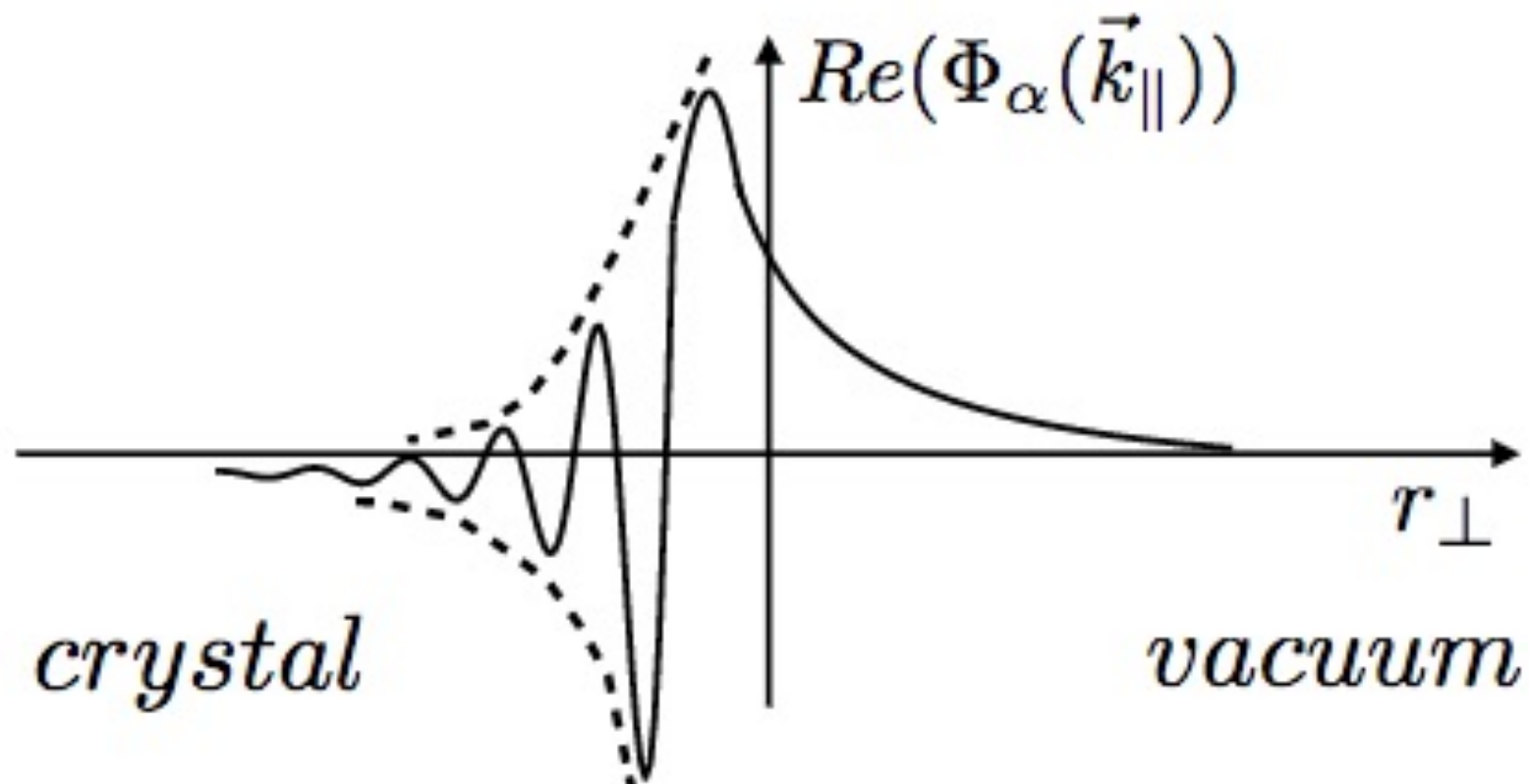
Solución de l
Interior

(a)



(b)

Solución de
Superficie



P_S y P_B

Sea
$$P_S = \int_{\pi^{d-1}}^{\oplus} P_{pp}(\vec{k}_{||}) d\vec{k}_{||}$$

$$\eta \in \text{Ran } P_S$$

$$\Leftrightarrow \lim_{a \rightarrow \infty} \sup_t \int_{|r_{\perp}| > a} |(e^{itH} \eta)(\vec{r})|^2 d^d r = 0$$

$$P_B = I - P_S = \int_{\pi^{d-1}}^{\oplus} P_{ac}(\vec{k}_{||}) d\vec{k}_{||}$$

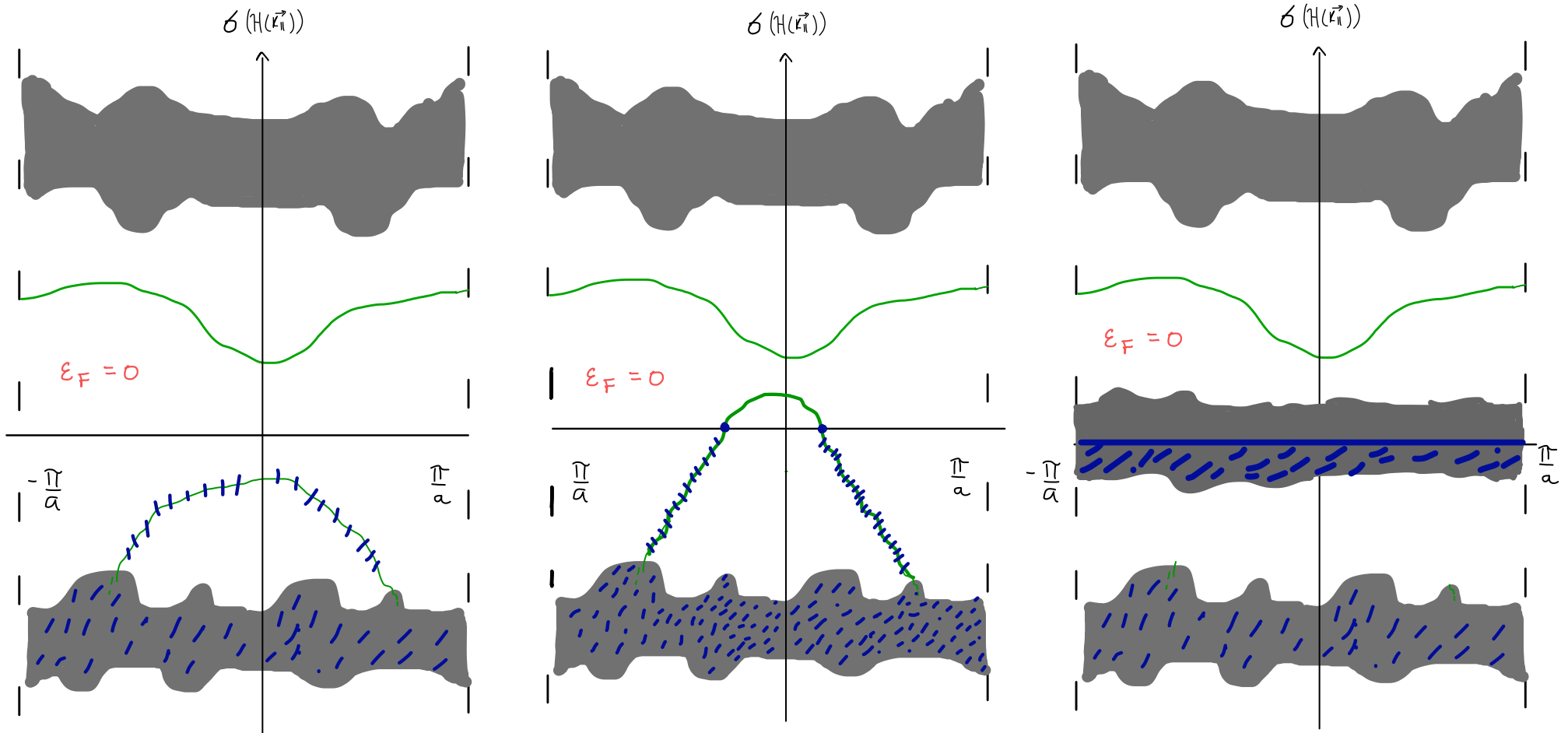
↑ "Cercano a la superficie"

↑ "Lejano a la superficie"

"Aislante"

"Interior aislante"

"Metal"



(Física) Interior aislante = $H(\vec{k}_{II}) \in \mathcal{F}_*^{sq}$ (MATE)

aislante

Resultado técnico crucial

Interior aislante $\Rightarrow$ Teoría K

Adem - Antolín - Semenoff - DS JHEP 2016 (En el doctorado)

$$H: \pi^{d-1} \longrightarrow \tilde{F}_*^{sa}(\mathcal{H})$$

Fases topológicas de fermiones que no interactúan en un semicristal con interior aislante $= [\pi^{d-1}, \tilde{F}_*^{sa}(\mathcal{H})]$

Atiyah - Singer 69'

$$\approx K^{-1}(\pi^{d-1})$$



Resumen Intuitivo

$$[\pi^{d-1}, F_*^{sa}(\mathcal{H})] \approx k^{-1}(\pi^{d-1})$$

Objeto matemático

Origen Físico

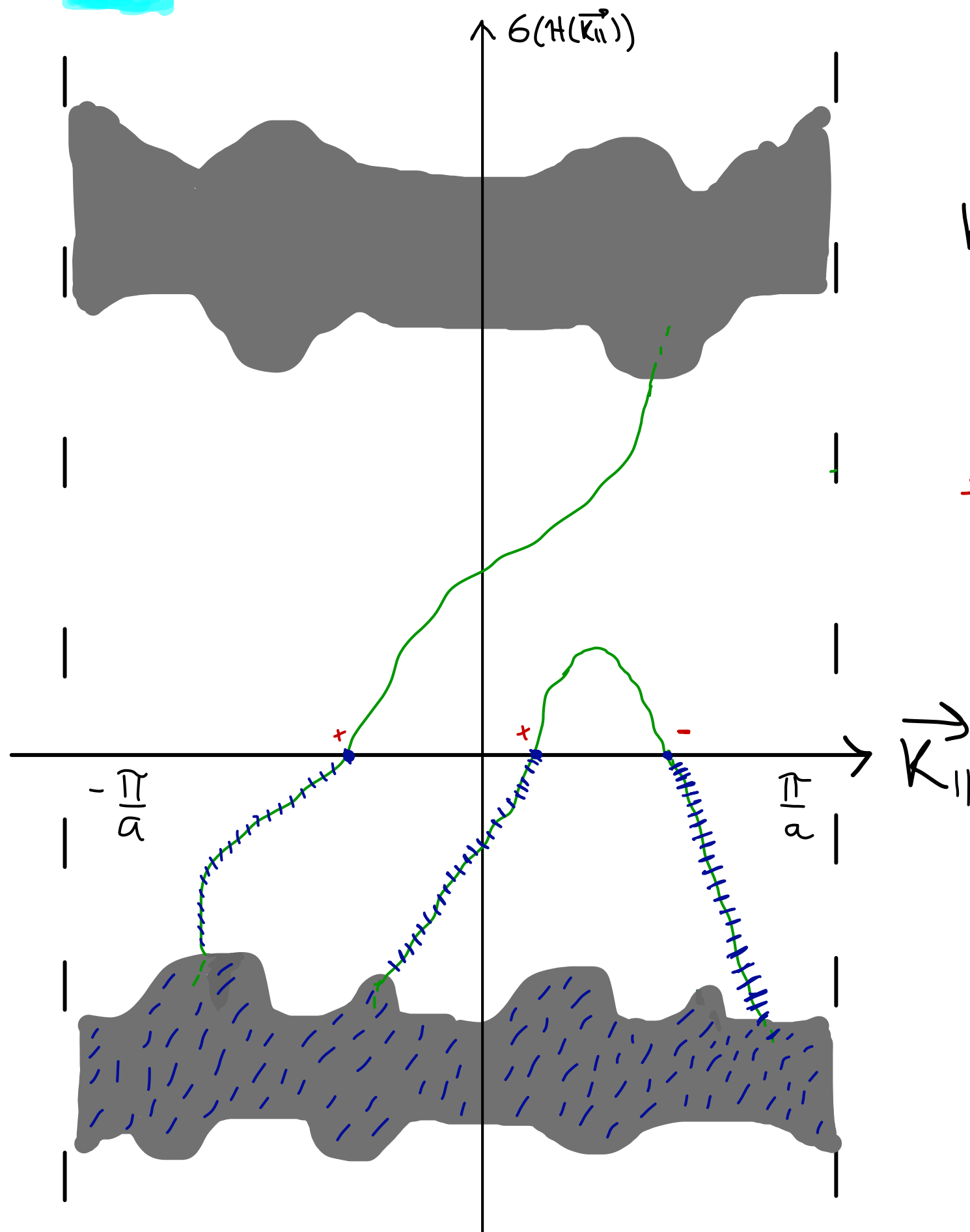
π^{d-1} $\longleftrightarrow$ Simetría de traslación discreta en $d-1$ direcciones $\mathbb{Z}^{d-1}$

$F_*^{sa}(\mathcal{H})$ $\longleftrightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} sa \rightarrow \text{Mecánica Cuántica} \\ F_* \rightarrow \text{Restricción física sobre } \underline{\text{conductancia}} \end{array} \right.$

$[,]$ $\longleftrightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Variar un parámetro:} \\ \text{Noción de } \underline{\text{fase}} \underline{\text{Cuántica}} \end{array} \right.$

Ejemplo Físico

$\delta = 2$



EHQI

$$K^{-1}(\pi^{2-1}) = K^{-1}(\bigcirc)$$

$$= \mathbb{Z} \quad (\text{Flujo espectral})$$

$$\# + - \# - = \text{Invariante}$$

$$\text{Flujo espectral} = 1$$

$$G_{\text{Borde}} = 1 \cdot \frac{e^2}{h}$$

Simetrías = extensiones equivariantes

Agujero-Partícula $\Xi: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ antiunitaria

$$\{\mathcal{H}, \Xi\} = 0 ; \quad \mathcal{H}(\vec{k}_{||}) \Xi = -\Xi \mathcal{H}(-\vec{k}_{||}) ; \quad \Xi^2 = \pm \mathbb{I}$$

Reversibilidad Temporal $\Theta: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ antiunitaria

$$[\mathcal{H}, \Theta] = 0 ; \quad \mathcal{H}(\vec{k}_{||}) \Theta = \Theta \mathcal{H}(-\vec{k}_{||}) ; \quad \Theta^2 = \pm \mathbb{I}$$

La Zona de Brillouin de superficie X_s se convierte
en un espacio
con involución

$$\tau: X_s \rightarrow X_s, \quad \tau^2 = \mathbb{I}_{X_s}$$
$$\vec{k}_{||} \mapsto -\vec{k}_{||}$$

Ahora queremos clases de homotopía
que respeten la involución y las relaciones
de conmutación.

Haces "Reales" y teoría KR (Atiyah)

Un espacio Real (X, τ) es un esp. topológico con involución τ i.e.
 $\tau^2 = I$

Un haz vectorial Real $E \xrightarrow{p} X$ es un haz vectorial complejo con involución τ_E t.q.
i) $p \circ \tau_E = \tau_X$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \times E_x & \longrightarrow & E_x \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C} \times E_{\tau(x)} & \longrightarrow & E_{\tau(x)} \end{array}$$

La completación de Grothendieck de las clases de isomorfismos de haces vectoriales Reales sobre X se denota como KR(X)

$$KR^{-8}(X) \approx KR(X)$$

(Periodicidad de
Bott)

Equivariant Whitehead + Matumoto

Whitehead

X, Y complejos G -CW

$X \xrightarrow{f} Y$ es una equiv. G -homotópica

$\Leftrightarrow f^H: X^H \rightarrow Y^H$ es una equiv. homotópica
 $\forall H \subseteq G$, subgrupo cerrado

Matumoto

$$[X, F(\mathcal{H}_R)]_{c_2} \approx KR(X)$$

$$[X, F(\mathcal{H}_Q)]_{D_2} \approx KH(X)$$

Donde KH es para haces cuya involución es de orden 4.

Using the equivariant version of Whitehead + Matumoto
we have the following results

$$[X_S, \mathcal{P}_*^{\text{sa}}(\mathcal{H}_\mathbb{R})]_{\square^2 = I} \simeq KR^{-1}(X_S)$$

$$[X_S, \mathcal{P}_*^{\text{sa}}(\mathcal{H}_\mathbb{Q})]_{\square^2 = -I} \simeq KH^{-1}(X_S)$$

$$[X_S, \mathcal{P}_*^{\text{sa}}(\mathcal{H}_\mathbb{R})]_{\theta^2 = I} \simeq KR^{-7}(X_S)$$

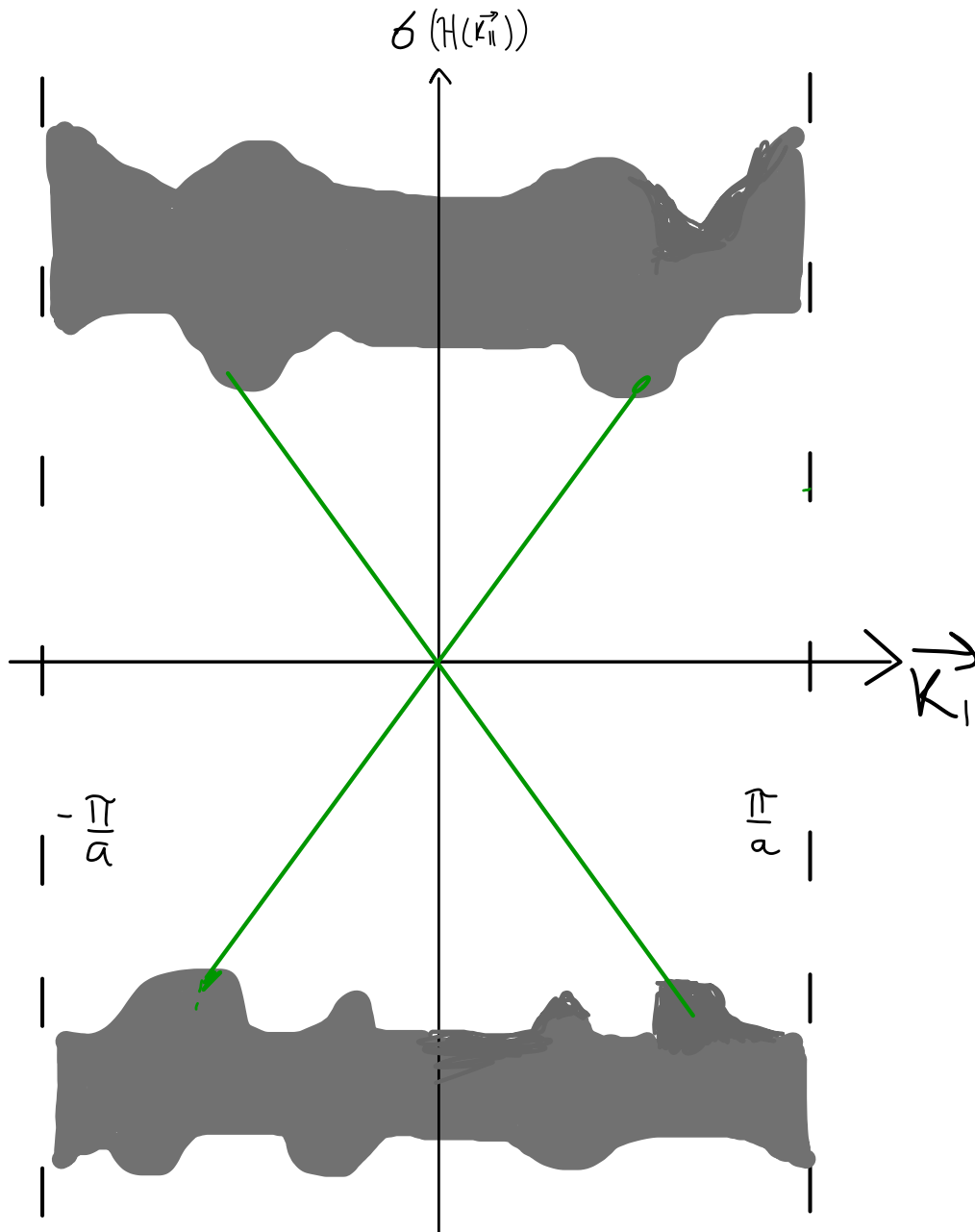
$$[X_S, \mathcal{P}_*^{\text{sa}}(\mathcal{H}_\mathbb{Q})]_{\theta^2 = -I} \simeq KH^{-7}(X_S)$$

$$d=2, \Theta^2 = -I$$

Efecto Hall
cuántico de espín

$$KH^{-7}(S^1) \cong \mathbb{Z}_2$$

Cruces
mod 2.



Resultados

Adem, Antolín, Semenoff
y DS

Symmetry			d		
AZ	Θ	Ξ	1	2	3
A	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}^2$
AI	I	0	0	0	0
AII	$-I$	0	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^3$
D	0	I	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}_2$
C	0	$-I$	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}^2$

PARTE IV (Breve)

Generalizaciones

y

Su Contexto en la

matemática actual.

Interacciones: Un nuevo mundo

Todo lo anterior es bajo la aproximación
de que los electrones no interactúan

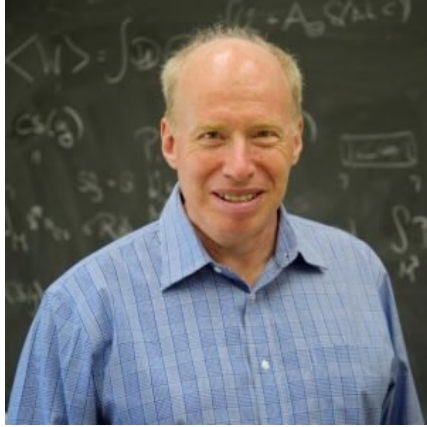
(sorprendentemente se puede llegar muy lejos así)

¿Cuál es el problema de agregar
interacciones entre electrones?

¿Cuál no?

Se sabe muchísimo menos
sobre estos casos y hay
propuestas distintas

Las propuestas de los topólogos Alg.



Dan Freed
(Austin)



Mike Hopkins
(Harvard)

"Fases topológicas
protegidas
por simetrías"
Denotadas

SPT

Yoshiko
Ogata



Teorías cuánticas de campos
topológicas invertibles Δ Están
desarrollando topología algebraica nueva!

Hay otras propuestas..... Δ Incluso de
matemáticas!

Grups cristalogràfics

$$d = 2$$

Els 17 grups de simetria a l'Alhambra

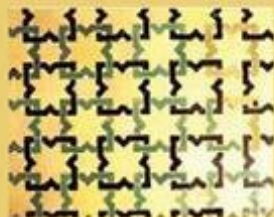
400 anys abans que Fedorov demostràs l'existència de 17 grups cristalogràfics plans, els àrabs ja ho havien posat de manifest a l'Alhambra de Granada.



p6



p6m



p4



p4g



p4m



cm



cmm



pm



pmm



pmg



p2



pg



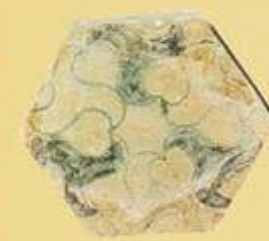
pgg



p3m1



p1



p3



p31m

DS y O. Antolín (JHEP 2021)

Fases Topológicas con interacción no degeneradas y periódicas cristalinas

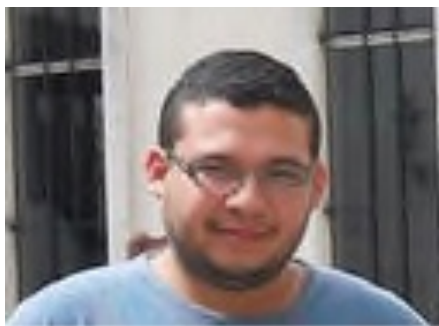
$$= H^2_P(\Pi^d; \mathbb{Z}) ; \quad P \text{ grupo cristalográfico puntual}$$

Comparación con la literatura en SPT, en $d=2$:

G	P	$H^2(G; \mathbb{Z})$	$H^4(G; \mathbb{Z})$
p2	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_2^4$
p3	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_3^2$	$\mathbb{Z}_3^3$
p4	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4^2$
p6	$\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}_2^2 \oplus \mathbb{Z}_3^2$
pm	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^2$
cm	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$
pmm	D_2	$\mathbb{Z}_2^4$	$\mathbb{Z}_2^8$
cmm	D_2	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_2^5$
p31m	D_3	$\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$
p3m1	D_3	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$
p4m	D_4	$\mathbb{Z}_2^3$	$\mathbb{Z}_2^6$
p6m	D_6	$\mathbb{Z}_2^2$	$\mathbb{Z}_2^4$

Grupo actual

J.E. Barrios-Vargas A. Martín-Ruiz L. Urrutia



Química

O. Antolín

ICN



I
M
A
T
E

Conclusiones

- * La topología de las "fases topológicas" es topología algebraica.
- * ¿Topología de qué? De familias de operadores parametrizadas por un toro
- * Teoría K sale de usar las Conexiones encontradas por Atiyah en análisis func.
- * Si quieren platicar mas, contactenme:
jshein@ciencias.unam.mx